

Title	不動点伝播法による共通展開図の構成
Author(s)	後藤, 大河
Citation	
Issue Date	2025-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/19828
Rights	
Description	Supervisor: 上原 隆平, 先端科学技術研究科, 修士 (情報科学)

修士論文

不動点伝播法による共通展開図の構成

後藤 大河

主指導教員 上原 隆平

北陸先端科学技術大学院大学
先端科学技術研究科
(情報科学)

令和7年3月

Abstract

For a polyhedron Q , an unfolding is a polygon obtained by cutting and unfolding the surface of Q onto a plane. For polyhedra Q and Q' , a common unfolding is a polygon that serves as an unfolding for both Q and Q' . It is a famous open problem whether a common unfolding exists between distinct Platonic solids. This problem, proposed by Demaine et al. in 2008, remains unsolved for all 10 combinations of the 5 Platonic solids, and it continues to be a topic of active research from various perspectives.

One of the studies on common unfoldings of Platonic solids is the approach demonstrated by Shirakawa et al., which involves constructing a common unfolding for a polyhedron that closely approximates another Platonic solid. Through this study, a common unfolding between a cube and a tetramonohedron that closely approximates a regular tetrahedron was discovered. A tetramonohedron is a tetrahedron in which all faces are congruent.

In this research, we name the discrete point-generation process used in the previous study as the fixed point propagation method and extend its application to the combination of a regular octahedron and a regular tetrahedron. The procedure consists of two main steps: (1) creating a common unfolding for an octahedron and a tetramonohedron, and (2) gradually transforming the tetramonohedron into a regular tetrahedron, during which the fixed point propagation method is used to generate the required points sequentially along the boundary of the common unfolding.

As a result, it is confirmed that when a small margin of error is allowed, the procedure terminates, and a common unfolding is generated between the octahedron and a tetramonohedron close to a regular tetrahedron. Conversely, when no error is allowed and the edge lengths of the octahedron and regular tetrahedron are strictly specified, the procedure does not terminate. Ultimately, this study discovered a common unfolding for the regular octahedron and a tetramonohedron with an edge length error of 1.8866×10^{-8} from the regular tetrahedron. Furthermore, it was observed that the set of points generated by the fixed-point propagation method forms diverse geometric patterns depending on the parameters, which reveals certain underlying rules.

目次

第1章	はじめに	1
1.1	共通展開図	1
1.2	正多面体同士の共通展開図に関する研究	2
1.3	研究目的	3
第2章	準備	4
2.1	タイリング (tiling)	4
2.2	コンウェイ条件 (p2 タイリングの十分条件)	4
2.3	秋山・奈良の定理	5
2.4	回転ベルトによる無限種類の折り	6
第3章	不動点伝播法による共通展開図の生成	8
3.1	正8面体と等面4面体の共通展開図の生成手順	8
3.2	不動点伝播法による展開図の変形手順	9
3.2.1	不動点 (Fixed point)	10
3.2.2	不動点伝播法	10
第4章	不動点伝播法で用いるパラメータと正則連分数の関係	14
4.1	点の生成個数	14
4.2	展開図の形状	17
第5章	誤差 1.8866×10^{-8} の共通展開図の存在	21
第6章	おわりに	23

目 次

1.1	A common unfolding of a regular octahedron and tetramonohedron	1
1.2	An unfolding of a cube and a tetramonohedron	3
2.1	An example of p2 tiling	4
2.2	Examples of Conway tiles	5
2.3	The relationship between tetramonohedron and tiling	6
2.4	Folding infinitely many types of isotetrahedra from any given rectangle	7
3.1	An initial unfolding P_1 of a regular octahedron	8
3.2	The common unfolding of a regular octahedron and a tetramonohedron in Lemma 6	9
3.3	Fixed points on an unfolding	10
3.4	Point plotting using the fixed-point propagation method	11
3.5	An example of a construction diagram by fixed point propagation method ($l_1 = 8/77, l_2 = 15/77$)	12
4.1	Regular continued fraction	14
4.2	The generated points for $a_1 \equiv 0 \pmod{6}$	18

4.3	The generated points for $a_1 \equiv 1 \pmod{6}$	18
4.4	The generated points for $a_1 \equiv 2 \pmod{6}$	18
4.5	The generated points for $a_1 \equiv 3 \pmod{6}$	19
4.6	The generated points for $a_1 \equiv 4 \pmod{6}$	19
4.7	The generated points for $a_1 \equiv 5 \pmod{6}$	19
4.8	The generated points for $a_2 \equiv 0 \pmod{2}$	20
4.9	The generated points for $a_2 \equiv 1 \pmod{2}$	20
5.1	Connected and Disconnected	21
5.2	A common unfolding of a regular octahedron and an almost regular tetrahedron (error: 1.8866×10^{-8})	22
5.3	The connectable four corners in Figure 5.2	22

表 目 次

1.1	A common unfolding of a regular polyhedron and a non-regular polyhedron	2
4.1	The relationship between the values of a_1, a_2 and the number of iterations in the loop($2 \leq a_1 \leq 15$)	15
4.2	The relationship between the values of a_1, a_2 and the number of iterations in the loop ($16 \leq a_1 \leq 30$)	16

第1章 はじめに

現代の計算幾何学において、活発な研究が行われている分野の一つに、「計算折り紙」と呼ばれる研究領域がある。この領域は1990年代に「多面体と、それを折れる展開図」の研究が始まったことを契機に発足した、比較的新しい学問分野である。また、「折り」を基本操作とする問題全般が研究対象であるため、その研究範囲は極めて広い。これらの特徴から、領域内には多くの未解決問題が存在する。

本研究では、計算折り紙の中でも「共通展開図」に焦点を当てる。共通展開図に関する研究報告は近年も活発に行われているが、依然として多くの未解決問題が残されている。本研究では、共通展開図に関する基礎的な知見を得ることで、計算折り紙分野のさらなる応用および発展に寄与することを目指す。

1.1 共通展開図

多面体 Q の表面を（辺に限らず自由に）平面上に切り開いて得られる多角形を**展開図**と呼ぶ。切り開く箇所を多面体の辺に限定した場合に得られる展開図を**辺展開図**と呼ぶ。与えられた2つの多面体 Q と Q' に対し、両多面体の展開図となる共通の多角形を**共通展開図**と呼ぶ。図 1.1 に、正8面体と等面4面体と呼ばれる多面体の共通展開図を示す。ここで、等面4面体とは、以下で定義される多面体である。

Definition 1. ある多面体 Q が**等面4面体**であるとは、4つの面すべてが合同な鋭角3角形で構成されている4面体を指す。ただし、すべての辺の長さが等しい必要はないため、正4面体より広い概念である。

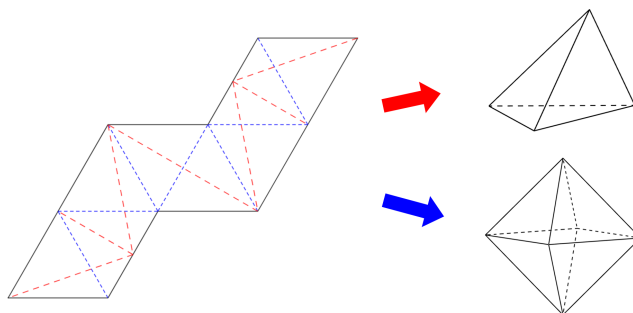


図 1.1: A common unfolding of a regular octahedron and tetramonohedron

これまでに、さまざまな多面体の共通展開図の存在が報告されている。(表 1.1) しかし、共通展開図には以下の未解決問題が知られている。

Open Problem: 2つの異なる正多面体の間に、共通展開図は存在するか

正多面体とは、全ての面が同一の正多角形から構成され、頂点が全て合同な凸多面体のクラスであり、正 4 面体、正 6 面体、正 8 面体、正 12 面体、正 20 面体の 5 種類が存在する。この問題は、Demain 等によって提案されて以降、5つの正多面体の異なるペア 10 通りの全てにおいて肯定的にも否定的にも解決されていない [1]。

表 1.1: A common unfolding of a regular polyhedron and a non-regular polyhedron

正 4 面体と大きさ $1 \times 1 \times \sqrt{3} - 1/2 = 1.232$ の直方体	[1]
立方体と各 3 角形の辺長が $1 : \sqrt{34}/6 : \sqrt{34}/6 = 0.9718$ の等面 4 面体	[2]
正 8 面体と各 3 角形の辺長が $1.0072 : 0.9965 : 0.9965$ の h 等面 4 面体	[2]
正 20 面体と各 3 角形の辺長が $1 : 1.145 : 1.25$ の等面 4 面体	[3]

1.2 正多面体同士の共通展開図に関する研究

この節では、先行研究で示された「1つの多面体に対し、別の正多面体に極めて近い多面体との共通展開図を構成する」手法について述べる。

正多面体同士の共通展開図に関する先行研究として、立方体と正 4 面体に極めて近い等面 4 面体の共通展開図の存在が、プログラムによって発見されたことが Shirakawa 等によって報告されている [4]。この文献では、まず立方体と等面 4 面体の共通展開図を作成し、その後、等面 4 面体を変形し正 4 面体に近づける手順が示されている。ある多角形 P が等面 4 面体の展開図であることは、 P がコンウェイ条件と呼ばれる条件を満たすことと同値であることが Akiyama 等によって示されている [6, 7]。この特徴づけを用い、立方体の展開図からコンウェイ条件が成り立つ形状を選定し、調整を加えることで補題 2 が得られる。

Lemma 2. 立方体と、辺の長さが $\sqrt{13}/2 : \sqrt{745/208} : \sqrt{745/208} = 1.80278 : 1.89255 : 1.89255$ である等面 4 面体の共通の展開図が存在する。

等面 4 面体をより正 4 面体に近づけるには、3 角形の全ての辺を $\sqrt{2\sqrt{3}} = 1.86121$ に近づけていく必要がある。そこで、長さ $\sqrt{13}/2$ の辺長を伸ばしていくことにより、共通展開図の変形を伴う手続きが発生する。この変形は共通展開図の境界線上に必ず存在する「不動点」と呼ばれる座標を起点として行われる。その後、等面 4 面体の展開図であるための条件と立方体の展開図であるための条件を交互に適用する。この条件の下で変形を進めると、共通展開図の境界線上に必要な点が離散的に発生していく。伸ばす辺長をそのまま $\sqrt{2\sqrt{3}}$ に変更するようにパラメー

タを無理数に調整すると、点の生成プロセスは無限に続き、停止しない．有限回数で停止させるには、変更手続きに用いるパラメータを有理数に設定する必要がある．このようにして有限回数で調整した結果得られた、立方体とほぼ正4面体の共通展開図の例を図 1.2 に示す．

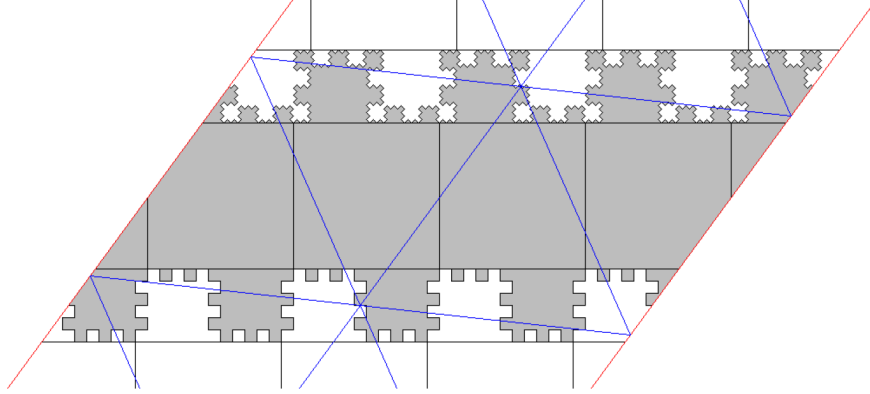


図 1.2: An unfolding of a cube and a tetramonohedron

誤差を ϵ で表し、辺長を $[\sqrt{2\sqrt{3}} - \epsilon, \sqrt{2\sqrt{3}} + \epsilon]$ の範囲で記述する．極めて細かい有理数を用いて辺長を $\sqrt{2\sqrt{3}}$ に近づけていくと、この結果を基に定理 3 が導出される．

Theorem 3. 誤差 $\epsilon < 2.89200 \times 10^{-1796}$ に対して、立方体と誤差 ϵ のほぼ正 4 面体の共通の展開図が存在する．

1.3 研究目的

先行研究では、立方体と正 4 面体にのみ焦点を当てていた．しかし、この組み合わせは立方体に限定されるものではなく、正 8 面体にも適用可能であると考えられる．そこで、本研究の目的は、先行研究で用いられた手法を他の正 8 面体に適用することで、同様の結果が得られるのか、あるいは誤差のない理論的に完全な共通展開図が発見されるのかを検討することである．

先行研究で用いられていた離散的な点の生成プロセスは、共通展開図に必要な点がどのように伝播するかを観察する手法である．本研究では、この手法を「不動点伝播法」と命名し、整理・再検討を行った．

第2章 準備

本章では，特定の4面体の展開図とある種のタイリングとの関係に基づく定理を示し，第3章で説明する共通展開図の生成手順に向けた準備を行う．

2.1 タイリング (tiling)

平面をいくつかの多角形を用いて，隙間も重なりもなく敷き詰めることを**タイリング (tiling)**と呼ぶ．ある多角形 P がタイリング可能であるとは，1種類の多角形 P を合同変換することで得られる多角形の集合によって，平面全体を埋め尽くすことをいう．中でも，多角形 P のコピーを 180° 回転と平行移動によって行うタイリングを **p2 タイリング (p2tiling)** と呼ぶ．

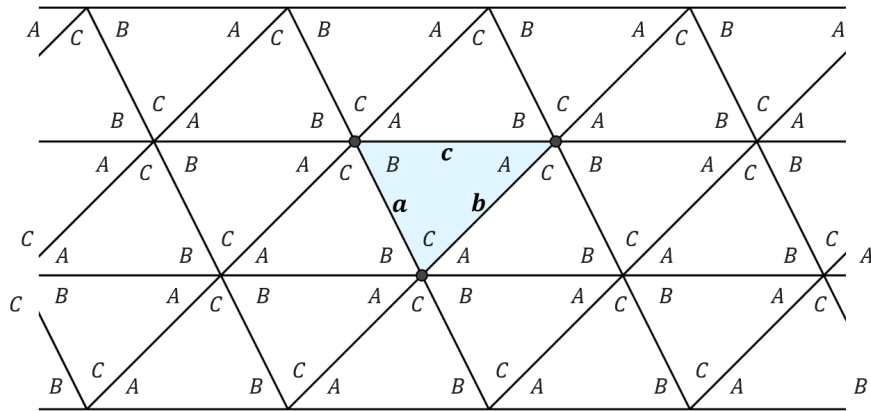


図 2.1: An example of p2 tiling

この回転によるタイリングは，平面上の点に同値関係を定義する．すなわち，平面上の点 p_1 が，このタイリングによって点 p_2 に移動する場合， p_1 と p_2 は互いに同値であるとする．

2.2 コンウェイ条件 (p2 タイリングの十分条件)

Definition 4. ある多角形 P が p2 タイリングであるための十分条件は， P の周上に，時計回りまたは反時計周りの順で6点 A, B, C, D, E, F を取ることができ，以

下の3つの条件を満たすことである.

1. 部分 AB が平行移動 τ によって部分 ED に移され, かつ $\tau(A) = E, \tau(B) = D$ が成り立つ.
2. 各部分 BC, CD, EF, FA はそれぞれの中心点に関し点対称である.
3. 6点の内, いくつかは一致してもよいが, 少なくとも3点が異なる.

これらの条件 (**コンウェイ条件**) を満たす多角形をコンウェイ・タイル (Conway tile) と呼ぶ. また, コンウェイ・タイルにおける4つの点対称の回転中心を**コンウェイ・タイルの4-ベース**と呼ぶ. (図 2.2 では青色の点で表示)

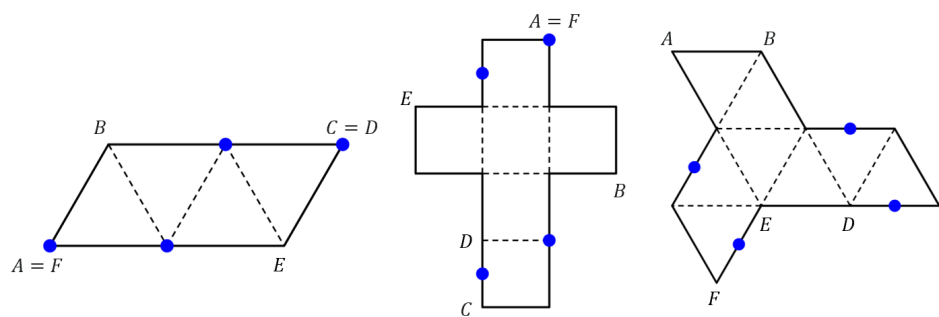


図 2.2: Examples of Conway tiles

2.3 秋山・奈良の定理

本節では, コンウェイ条件を用いて, 等面4面体の展開図と $p2$ タイリングとの間に存在する重要な関係を示す.

Theorem 5 ([6, 7]). 多角形 P が以下の3つの条件を満たすとき, P は等面4面体の展開図である.

1. P はコンウェイ条件を満たす.
2. コンウェイ・タイルの4-ベースは, 互いに同値ではない.
3. コンウェイ・タイルの4-ベースが, 等面4面体の合同な三角形の面で構成される三角格子の交点を構成する.

Proof. まず、適当な等面 4 面体 Q を考え、これに対応する $p2$ タイリング上に配置した状況を仮定する．この Q をタイリング上で転がしていく．このとき、どのような経路を転がしたとしても、最終的に元の位置に戻すと、 Q は完全に同じ位置に収まる．ここで Q の適当な展開図 P を考えて、 Q の表面に P の輪郭線を描いておく．この輪郭線を「スタンプ」としてタイリング上を転がし、タイリング上に P の輪郭線を「印刷」していく．ある 3 角形に注目すると、 Q が等面 4 面体である限り、どのような方法で転がしても、また何度その 3 角形を訪れても、 P の輪郭線の同じ部分がそこに印刷されることがわかる．したがって、 P は合同な 3 角形の面で構成される 3 角格子上に重ねて描かれたタイリングを形成する．

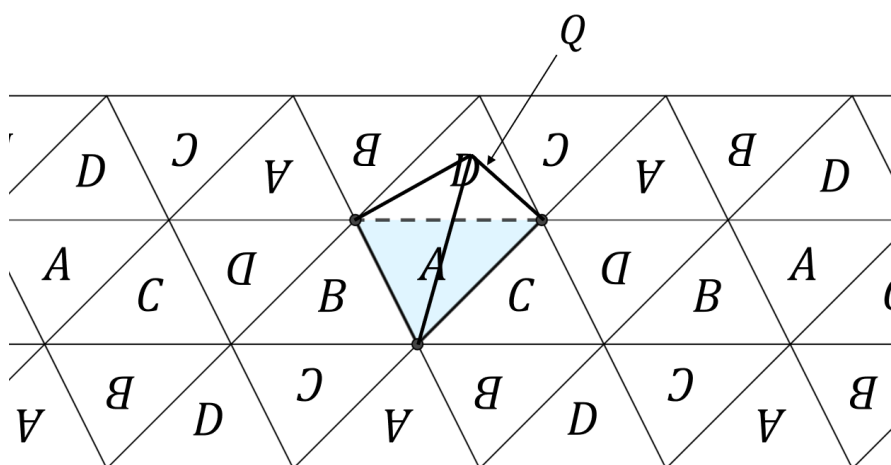


図 2.3: The relationship between tetramonohedron and tiling

定理 5 における三角格子が正三角形に基づくものであれば、正 4 面体の展開図を完全に特徴づけることができる．

2.4 回転ベルトによる無限種類の折り

定理 5 の例として、無限に多くの等面 4 面体を折ることが可能な展開図を示す．この展開図に現れる「回転ベルト」という特性は、本研究における共通展開図の変形にも利用される．

Theorem 6 ([6, 7]). 任意の長方形から、無限に多くの異なる等面 4 面体が折れる．

Proof. 大きさ $a \times b$ の長方形を 1 つ考える．この長方形の上辺の左半分に点 p を任意に取り、 p から右に $a/2$ だけ離れた点を p' とする．この p と p' を交互に回転中心として用いながら、長方形のコピーを 180° ずつ回転させて貼り付けていく．同様に下辺の左半分に点 q を任意に取り、 q から右に $a/2$ だけ離れた点を q' とし

同様の操作を行う．このように， $p \cdot p'$ と $q \cdot q'$ についてこれを交互に繰り返せば，長方形のコピーが平面全体を埋め尽くす．これは4点 p, p', q, q' を回転中心とするタイリングであり，定理5を満たすものである．したがって，この4点を通る等面4面体を折ることができる．また， p と q は任意の位置に取れるため，この方法により無限（非可算無限）に多くの種類の等面4面体を折ることが可能である．

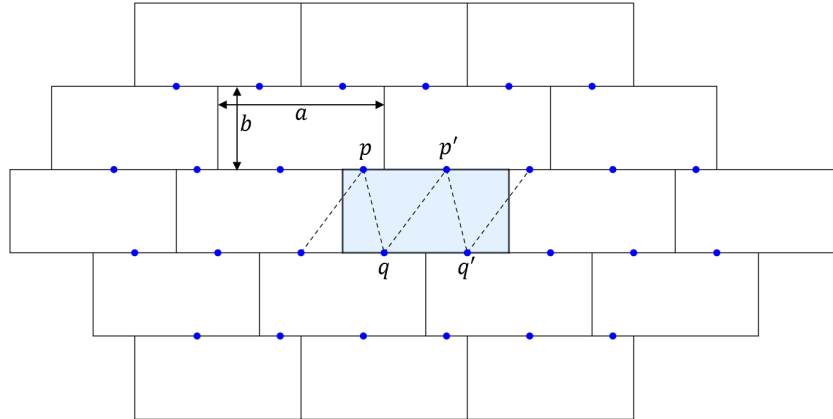


図 2.4: Folding infinitely many types of isotetrahedra from any given rectangle

第3章 不動点伝播法による共通展開図の生成

第3章では、2章で準備した展開図に関する性質を用いて、正4面体と正8面体の共通展開図を作成するアプローチについて述べる。まず初めに、正8面体と等面4面体の共通展開図を選定し、変形が伴わない範囲で等面4面体を正4面体に近づける方法を検討する。次に、「不動点伝播法」という手法を用いて展開図を変形し、さらに正4面体に近づけていく。最後に、これらの手法によって得られた結果を示す。

3.1 正8面体と等面4面体の共通展開図の生成手順

まず図3.1に示した単位正8面体の初期展開図 P_1 から議論を開始する。ここで点 p, p', c_2, c_4 は対応する辺の中点である。コンウェイ条件に基づき、 P_1 の周上に6点 A, B, C, D, E, F を取ることができ、コンウェイ・タイルの4-ベースは c_1, c_2, c_3, c_4 である。これは P_1 が定理5を満たしており、 c_1, c_2, c_3, c_4 を頂点とする等面4面体の展開図であることを示している。

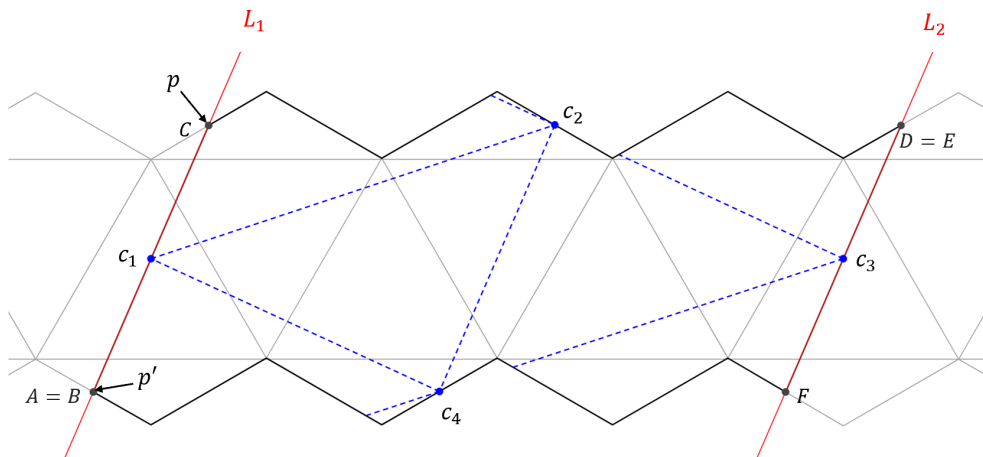


図 3.1: An initial unfolding P_1 of a regular octahedron

ここで、青色の破線 c_2c_4 が赤色の直線 L_1, L_2 と平行になっており、p2 タイリン

グが直線 L_1, L_2 で平行に分割されていることに注意する．すなわち，このタイリングは「回転ベルト」を形成しており， $|c_1c_2| = |c_3c_4|$ （または $|c_2c_3| = |c_1c_4|$ ）を満たす位置であれば， c_2c_4 が固定された無限に多くの等面 4 面体を折ることができる．言い換えれば，選定した展開図 P_1 は，正 8 面体と無限種類の等面 4 面体の共通展開図である．

さらに，この性質を活用して，図示した等面 4 面体の面の 3 角形を正 3 角形に近づけていく．具体的には，図 3.1 において L_1 および L_2 上で $|c_1c_2| = |c_2c_3| = |c_3c_4| = |c_1c_4|$ の長さを満たすように c_1 と c_3 を設定することで，補題 6 を得る．

Lemma 7. 正 8 面体と，辺の長さが $\sqrt{119073}/228 : \sqrt{119073}/228 : \sqrt{57}/6 = 1.51346 : 1.51346 : 1.25831$ である等面 4 面体の共通の展開図が存在する．

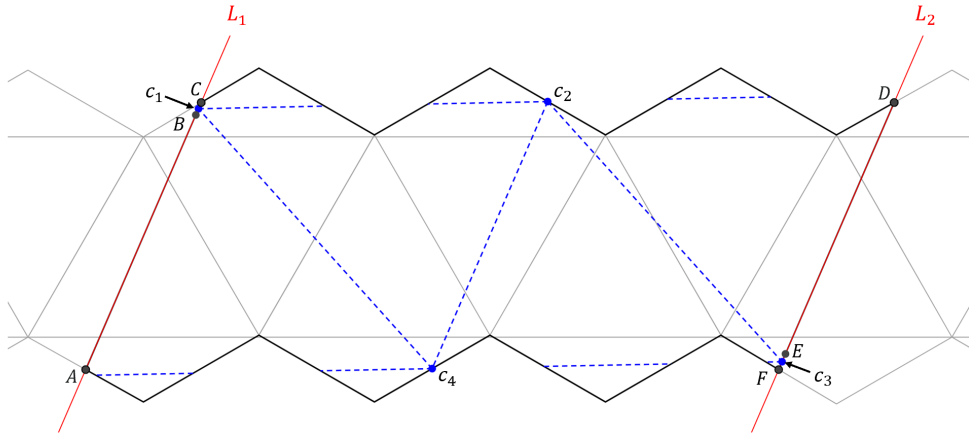


図 3.2: The common unfolding of a regular octahedron and a tetramonohedron in Lemma 6

共通展開図は，表面積が等しいという性質から，目標とする正 4 面体の辺長が $\sqrt{2}$ であることが計算によって導出される．一方，補題 7 で作成した共通展開図では， $|c_2c_4| = 1.25831 < \sqrt{2}$ である．このため，該当する辺を伸ばし，より正 4 面体の展開図に近づける手続きが必要となる．

3.2 不動点伝播法による展開図の変形手順

2 点間 $|c_2c_4|$ を伸ばすために，不動点伝播法という手法を提案する．不動点伝播法とは， c_2 を水平方向に右へ， c_4 を水平方向に左へ移動させることで， $|c_2c_4|$ を目標値に近づけていくアイデアを用いる．この手法では， c_2 と c_4 を境界線上ではなく別の位置へ移動させるため，その過程で初期展開図 P_1 の形状には変形が伴う．

この変形過程において保持される2つの性質を「不変性」として定式化し、以下に示す。

1. P_1 は変形後も正8面体の展開図である。
2. P_1 は等面4面体の展開図であり、かつ辺の長さについて $|c_1c_2| = |c_2c_3| = |c_3c_4| = |c_1c_4|$ がいつでも成立する。

これら2つの不変性を維持したまま変形を実行すると仮定すると、 $|c_2c_4|$ が $\sqrt{2}$ になれば、正8面体と正4面体の共通展開図が得られることとなる。

3.2.1 不動点(Fixed point)

不変性1より、正8面体の展開図が成り立つために必ず境界線上に必要な点を**不動点(Fixed point)**と命名する。不動点には2種類あり、図3.3では○と●で表現している。○は正8面体に折った際に蓋の面と底の面の中心に対応する点である。これらの点が展開図から取り除かれると、正8面体に穴が開く。一方、この点が展開図の内部に位置すると、正8面体の面に重なりが生じる。そのため、これらの点は P_1 の境界線上になければならない。また、●は正8面体の頂点となる点であり、凸多面体である以上、 P_1 の境界線上に配置される必要がある。

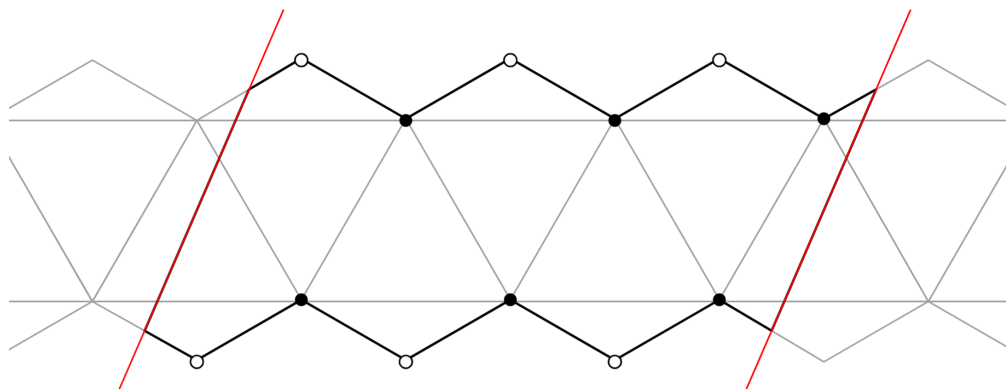


図 3.3: Fixed points on an unfolding

3.2.2 不動点伝播法

以下では、初期展開図 P_1 の上半分を対象に議論を進める。 P_1 の上半分には6個の不動点と回転中心 c_2 が存在する。この手法では、既存の展開図の輪郭線を全て取り除いた状態で考える。この時点で展開図上に残るのは、不動点と回転中心の

みである．不動点を起点として共通展開図に必要な点を順に伝播させ，展開図を形成していく．これが不動点伝播法の基本的なアイデアである．

正確を期すため，辺上に xy 座標軸を設定し，図 3.4 を参照して手順を説明する．まず， c_2 に最も近い不動点●を f_0 とし，この点の座標を原点 $(0, 0)$ に設定する．単位正 8 面体であるため， c_2 の初期座標は $(-1/4, \sqrt{3}/12)$ である．ここで， c_2 を水平方向に移動させる幅として小さな値 l_1 を取ると，移動後の回転中心は $c'_2 = (-1/4 + l_1, \sqrt{3}/12)$ となる．この移動により点対称の中心点が変化するため，不動点 f_0 を起点として新たな点 $f_1 = (-1/2 + 2l_1, \sqrt{3}/6)$ が境界線上に生成される．この展開図が正 8 面体の展開図であることから，蓋の面に対応する点 f_1 は，原点を中心に 120° 回転した点 $f_2 = (1/2 - l_1, \sqrt{3}/6 - \sqrt{3}l_1)$ に接着される．したがって， f_2 もまた境界線上の点である必要がある．さらに， f_2 を c'_2 に関して対称点を取ることで，新たに $f_3 = (-1 + 3l_1, \sqrt{3}l_1)$ が生成される．この展開図は正 8 面体を対象に開いたものであるため，対称性に基づき，点 (x, y) と $(x + 1, y)$ に対して同値関係 $(x, y) \equiv (x + 1, y)$ を定義する．この結果， $f_3 = (-1 + 3l_1, \sqrt{3}l_1)$ が境界線上の点であれば，同値な点 $(3l_1, \sqrt{3}l_1)$ も展開図の境界線上に存在することになる．(以下，この同値関係は適宜適用されるものとする．) この写像を繰り返し適用することで，6 個の不動点と新たな回転中心 $c'_2 = (-1/4 + l_1, \sqrt{3}/12)$ を基に，展開図の境界線上に必要な点の集合を逐次計算することが可能である．

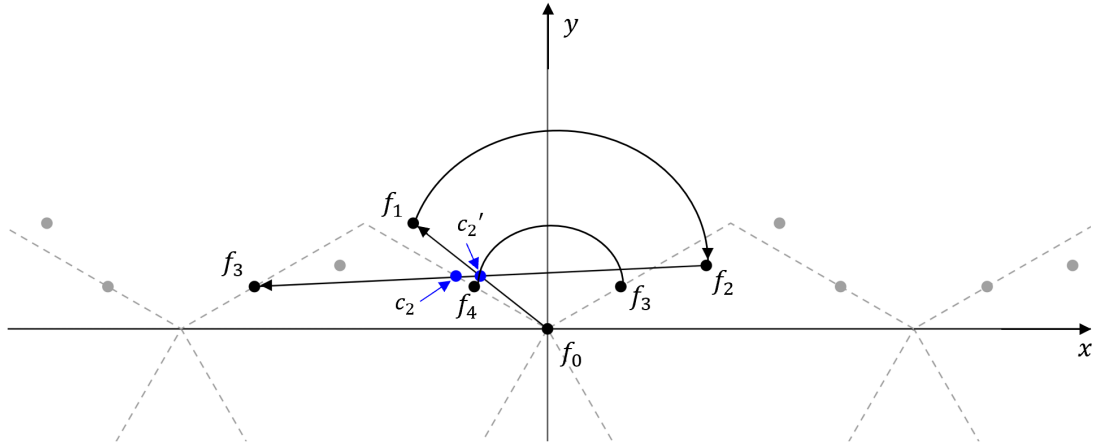


図 3.4: Point plotting using the fixed-point propagation method

この一連の手続きにおいて，補題 8 が成立する．

Lemma 8. 上記の不動点の射影手続きが有限回数で停止する必要十分条件は，ずらし幅 l_1 が有理数であることである．

Proof. ある互いに素な自然数 p と q (ただし $0 < p < q$) に対して， l_1 が有理数 p/q であったとき，射影手続きによって移動できる点の集合は，大きさ $O(pq)$ (定数倍) の格子状の点に含まれる．したがって射影手続きを $O(pq)$ 回繰り返せば，鳩

ノル原理より、いつか同じ点を2回訪れて、そこで点集合が確定する．一方 l_1 が有理数でない場合は、同じ座標は二度と現れないため、無限ループに入り手続きは終了しない．

この不動点伝播法による点の生成プロセスをプログラムで構築する．不動点伝播法に基づく点の生成過程のアルゴリズムを次ページに示す．

アルゴリズム1では、 $x_{\min} \leq \mathbf{p}_{\text{new}}[0] \leq 0$ の際に -120° 回転、そうでない場合は 120° 回転させた箇所に点を生成するよう設定されているが、これはあくまで $x = 0$ の座標が正8面体の蓋として右側に接着される例である．つまり、できあがる点集合の形状によって回転作業の場合分けは変更が必要である．

以上のプログラムが停止すれば、範囲内で同値な点のコピーを取ることで、境界線上に必要な点が全て生成されたことを意味する．ここで、 c_2 を水平方向に移動させる幅を l_1 と設定したように、底の面での移動幅を l_2 と定義する．その後、蓋の面と底の面それぞれに対して点の生成を行う．生成された点の集合と線分から得られた例を図3.5に示す．

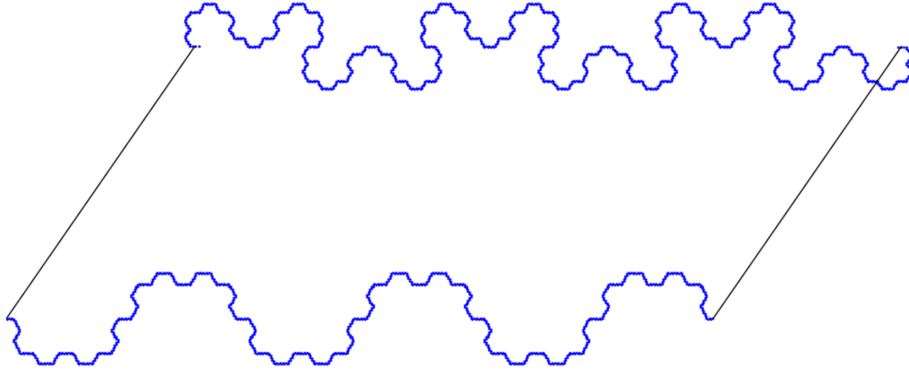


図 3.5: An example of a construction diagram by fixed point propagation method ($l_1 = 8/77, l_2 = 15/77$)

不動点伝播法による点の集合から導かれる多角形は、 l_1, l_2 それぞれの値によって、さまざまな幾何図形を表すことが確認された．

Algorithm 1 不動点伝播法による座標生成（蓋の面）

Input: 初期座標リスト InitialCoords（不動点の○と●）

Input: ブラシ幅 Zurashi（有理数）

Output: 生成された点のリスト AllPoints

1: AllPoints $\leftarrow$ InitialCoords（初期座標をコピー）

2: $x_c \leftarrow -\frac{1}{4} + \text{Zurashi}$, $y_c \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{12}$

3: 回転中心 **center** $\leftarrow [x_c, y_c]$

4: 範囲を設定: $x_{\min} \leftarrow -\frac{1}{2}$, $x_{\max} \leftarrow \frac{1}{2}$

5: 正方向および負方向に 120° の回転行列を定義：

$$\text{RotationMatrix}_+ \leftarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{RotationMatrix}_- \leftarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
6: for 各初期点  $\mathbf{p}_{\text{initial}} \in \text{InitialCoords}$  do
7:    $i \leftarrow 0$ 
8:   while True do
9:     if  $i = 0$  then
10:      現在の座標  $\mathbf{p}_{\text{current}} \leftarrow \mathbf{p}_{\text{initial}}$ 
11:    else
12:      前回生成した点を使用して  $\mathbf{p}_{\text{current}}$  を更新
13:    end if
14:    対称点を計算:  $\mathbf{p}_{\text{sym}} \leftarrow 2 \cdot \text{center} - \mathbf{p}_{\text{current}}$ 
15:    if  $x_{\min} \leq \mathbf{p}_{\text{sym}}[0] < x_{\max}$  then
16:      新しい点  $\mathbf{p}_{\text{new}} \leftarrow \mathbf{p}_{\text{sym}}$ 
17:    else
18:      範囲外の座標を調整:
19:      if  $\mathbf{p}_{\text{sym}}[0] \geq x_{\max}$  then
20:         $\mathbf{p}_{\text{new}}[0] \leftarrow \mathbf{p}_{\text{sym}}[0] - 1$ 
21:      else
22:         $\mathbf{p}_{\text{new}}[0] \leftarrow \mathbf{p}_{\text{sym}}[0] + 1$ 
23:      end if
24:       $\mathbf{p}_{\text{new}}[1] \leftarrow \mathbf{p}_{\text{sym}}[1]$ 
25:    end if
26:    if  $\mathbf{p}_{\text{new}}$  が AllPoints に存在しない then
27:      AllPoints に  $\mathbf{p}_{\text{new}}$  を追加
28:    else
29:      重複したため終了
30:      break
31:    end if
32:    回転行列を適用して新しい座標を計算:
33:    if  $x_{\min} \leq \mathbf{p}_{\text{new}}[0] \leq 0$  then
34:       $\mathbf{p}_{\text{rot}} \leftarrow \text{RotationMatrix}_- \cdot \mathbf{p}_{\text{new}}$ 
35:    else
36:       $\mathbf{p}_{\text{rot}} \leftarrow \text{RotationMatrix}_+ \cdot \mathbf{p}_{\text{new}}$ 
37:    end if
38:    AllPoints に  $\mathbf{p}_{\text{rot}}$  を追加
39:    繰り返しカウンタを更新:  $i \leftarrow i + 1$ 
40:  end while
41: end for
```

第4章 不動点伝播法で用いるパラメータと正則連分数の関係

この章では、不動点伝播法によって生成される点集合の性質とずらし幅のパラメータ l_1, l_2 を正則連分数で表した際の分母の値の関係について分析する。これにより、パラメータ調整と点集合の性質に関して得られた知見を述べる。

連分数とは、分母にさらに分数が含まれている形式の分数を指す。その中でも、図 4.1 に示すように、分子がすべて 1 である連分数を**正則連分数**と呼び、ある実数 x を正則連分数で表すことを**正則連分数展開**と呼ぶ。実数が有理数の場合、正則連分数展開は有限回で終了し、有限項の正則連分数でとして表すことができる。一方、無理数は無限に続く正則連分数で表現されることが知られている。

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

図 4.1: Regular continued fraction

実験的な結果から、不動点伝播法によって作成される点集合の性質が、ずらし幅のパラメータ l_1, l_2 を正則連分数で表した際の分母の値に依存していることが確認された。 l_1 の値を、 $a_0 = 0$, a_1 を 2 から 30, a_2 を 1 から 30 の範囲で正則連分数展開した場合の関係性を以下に示す。

4.1 点の生成個数

不動点伝播法によって生成される点の個数は、プログラムのループ回数から計算することができる。同値な点を適宜コピーする場合、1 ループにつき 6 点が生成される。つまり、(点の生成個数) = (ループ回数) $\times$ 6 で求めることができる。 a_1, a_2 の値とループ回数の関係性の表 4.1, 4.2 に示す。

表 4.1: The relationship between the values of a_1, a_2 and the number of iterations in the loop($2 \leq a_1 \leq 15$)

	a_1														
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
a_2	1	2	3	7	2	9	5	8	11	15	4	17	9	14	19
	2	7	13	8	15	17	12	31	49	18	31	33	22	55	85
	3	9	7	25	11	25	23	41	27	57	23	49	43	73	47
	4	6	25	31	34	33	55	28	97	71	72	65	103	50	169
	5	15	11	20	25	41	16	71	43	46	53	81	30	127	75
	6	17	37	49	57	49	73	81	145	113	121	97	137	145	253
	7	10	15	55	16	57	41	48	59	127	34	113	77	86	103
	8	23	49	32	71	65	66	111	193	74	151	129	124	199	337
	9	25	19	73	39	73	59	121	75	169	83	145	111	217	131
	10	14	61	79	76	81	127	68	241	183	162	161	239	122	421
	11	31	23	44	53	89	34	151	91	102	113	177	64	271	159
	12	33	73	97	113	97	145	161	289	225	241	193	273	289	505
	13	18	27	103	30	105	77	88	107	239	64	209	145	158	187
	14	39	85	56	127	113	120	191	337	130	271	225	226	343	589
	15	41	31	121	67	121	95	201	123	281	143	241	179	361	215
	16	22	97	127	118	129	199	108	385	295	252	257	375	194	673
	17	47	35	68	81	137	52	231	139	158	173	273	98	415	243
	18	49	109	145	169	145	217	241	433	337	361	289	409	433	757
	19	26	39	151	44	153	113	128	155	351	94	305	213	230	271
	20	55	121	80	183	161	174	271	481	186	391	321	328	487	841
	21	57	43	169	95	169	131	281	171	393	203	337	247	505	299
	22	30	133	175	160	177	271	148	529	407	342	353	511	266	925
	23	63	47	92	109	185	70	311	187	214	233	369	132	559	327
	24	65	145	193	225	193	289	321	577	449	481	385	545	577	1009
	25	34	51	199	58	201	149	168	203	463	124	401	281	302	355
	26	71	157	104	239	209	228	351	625	242	511	417	430	631	1093
	27	73	55	217	123	217	167	361	219	505	263	433	315	649	383
	28	38	169	223	202	225	343	188	673	519	432	449	647	338	1177
	29	79	59	116	137	233	88	391	235	270	293	465	166	703	411
	30	81	181	241	281	241	361	401	721	561	601	481	681	721	1261

表 4.2: The relationship between the values of a_1, a_2 and the number of iterations in the loop ($16 \leq a_1 \leq 30$)

	a_1															
		16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a_2	1	23	6	25	13	20	27	31	8	33	17	26	35	39	10	41
	2	28	47	49	32	79	121	38	63	65	42	103	157	48	79	81
	3	89	35	73	63	105	67	121	47	97	83	137	87	153	59	121
	4	111	110	97	151	72	241	151	148	129	199	94	313	191	186	161
	5	72	81	121	44	183	107	98	109	161	58	239	139	124	137	201
	6	177	185	145	201	209	361	241	249	193	265	273	469	305	313	241
	7	199	52	169	113	124	147	271	70	225	149	162	191	343	88	281
	8	116	231	193	182	287	481	158	311	257	240	375	625	200	391	321
	9	265	127	217	163	313	187	361	171	289	215	409	243	457	215	361
	10	287	248	241	351	176	601	391	334	321	463	230	781	495	420	401
	11	160	173	265	94	391	227	218	233	353	124	511	295	276	293	441
	12	353	369	289	401	417	721	481	497	385	529	545	937	609	625	481
	13	375	98	313	213	228	267	511	132	417	281	298	347	647	166	521
	14	204	415	337	332	495	841	278	559	449	438	647	1093	352	703	561
	15	441	219	361	263	521	307	601	295	481	347	681	399	761	371	601
	16	463	386	385	551	280	961	631	520	513	727	366	1249	799	654	641
	17	248	265	409	144	599	347	338	357	545	190	783	451	428	449	681
	18	529	553	433	601	625	1081	721	745	577	793	817	1405	913	937	721
	19	551	144	457	313	332	387	751	194	609	413	434	503	951	244	761
	20	292	599	481	482	703	1201	398	807	641	636	919	1561	504	1015	801
	21	617	311	505	363	729	427	841	419	673	479	953	555	1065	527	841
	22	639	524	529	751	384	1321	871	706	705	991	502	1717	1103	888	881
	23	336	357	553	194	807	467	458	481	737	256	1055	607	580	605	921
	24	705	737	577	801	833	1441	961	993	769	1057	1089	1873	1217	1249	961
	25	727	190	601	413	436	507	991	256	801	545	570	659	1255	322	1001
	26	380	783	625	632	911	1561	518	1055	833	834	1191	2029	656	1327	1041
	27	793	403	649	463	937	547	1081	543	865	611	1225	711	1369	683	1081
	28	815	662	673	951	488	1681	1111	892	897	1255	638	2185	1407	1122	1121
	29	424	449	697	244	1015	587	578	605	929	322	1327	763	732	761	1161
	30	881	921	721	1001	1041	1801	1201	1241	961	1321	1361	2341	1521	1561	1201

表 4.1, 4.2 の値を縦列で解析する。すなわち, a_1 の値を固定した状態で, a_2 の値による変化を観察した。この結果, 各列において, 特定の間隔で値を抽出すると, 規則的な等差数列が形成されることが確認された。

Observation 9. a_1 の値を固定した場合, a_2 の値には以下の性質が成り立つ。

- $a_1 \equiv 0 \pmod{6}$ である場合, a_2 の値の列は等差数列をなす.
- $a_1 \equiv 1 \pmod{6}$ または $\equiv 5 \pmod{6}$ である場合, a_2 の値を 5 列おきに選択肢した列は, それぞれ等差数列をなす.
- $a_1 \equiv 2 \pmod{6}$ または $\equiv 4 \pmod{6}$ である場合, a_2 の値を 2 列おきに選択肢した列は, それぞれ等差数列をなす.
- $a_1 \equiv 3 \pmod{6}$ である場合, a_2 の値を 1 列おきに選択肢した列は, それぞれ等差数列をなす.

これらの結果から, a_1 の値は 6 周期ごとに規則的な間隔で等差数列を形成することが示された. 次に, 表 4.1, 4.2 の値を横列で解析する. すなわち, a_2 の値を固定した状態で, a_1 の値による変化を観察した.

Observation 10. a_2 の値を固定した場合, a_1 の値には以下の性質が成り立つ.

- a_1 の値を 5 列おきに選択肢した列は等差数列をなす.

さらに, 横列の公差に着目しても, それ自体が等差数列を形成することが確認された.

以上の結果から, ずらし幅のパラメータ l_1 が a_1, a_2 の値のみで連分数展開できる場合, 初項と公差を求めることで, 生成される点の個数を計算によって求めることが可能であることが示された.

4.2 展開図の形状

不動点伝播法によって生成される点の集合は, ずらし幅のパラメータ l_1 の値に応じて多様な幾何図形を形成する. この図形は, a_1, a_2 の値に基づいて規則的に点が配置されることが確認された. まず, a_2 の値を 30 に固定し, a_1 の値を変化させた際の点の集合の形状を観察した. この結果, 点の生成個数が 5 つ飛ばしで規則性を示すのと同様に, 生成される形状にも 5 つ飛ばしで一貫した規則性が確認された. 生成される形状をより直感的に理解するため, 蓋の面を閉じた際に描かれる形状を図 4.2 から図 4.7 に示す.

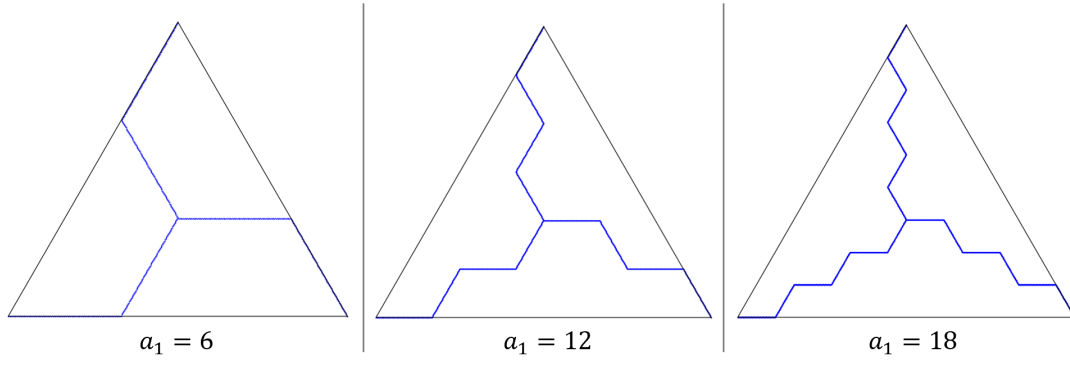


图 4.2: The generated points for $a_1 \equiv 0 \pmod{6}$

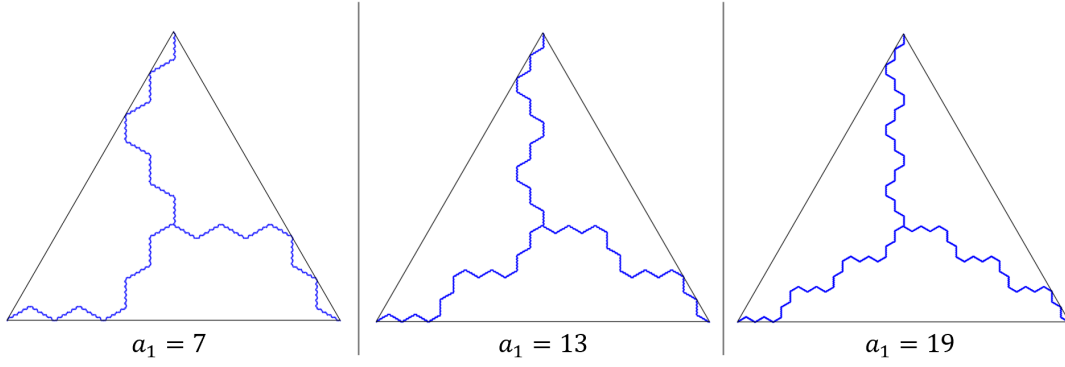


图 4.3: The generated points for $a_1 \equiv 1 \pmod{6}$

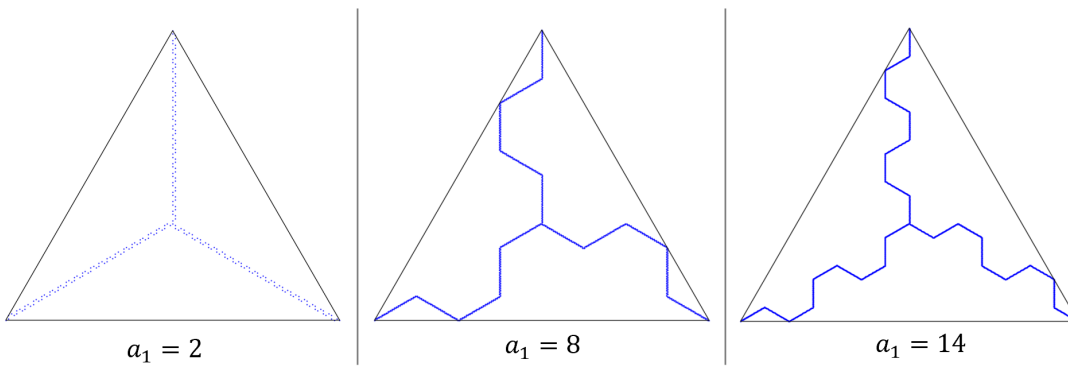


图 4.4: The generated points for $a_1 \equiv 2 \pmod{6}$

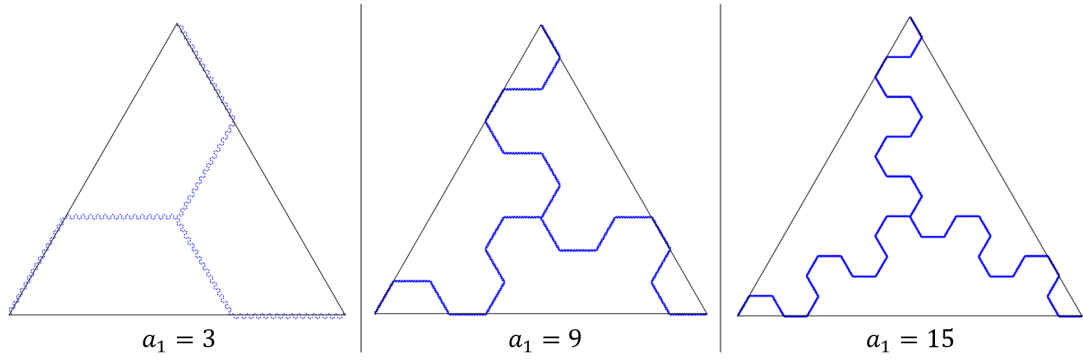


図 4.5: The generated points for $a_1 \equiv 3 \pmod{6}$

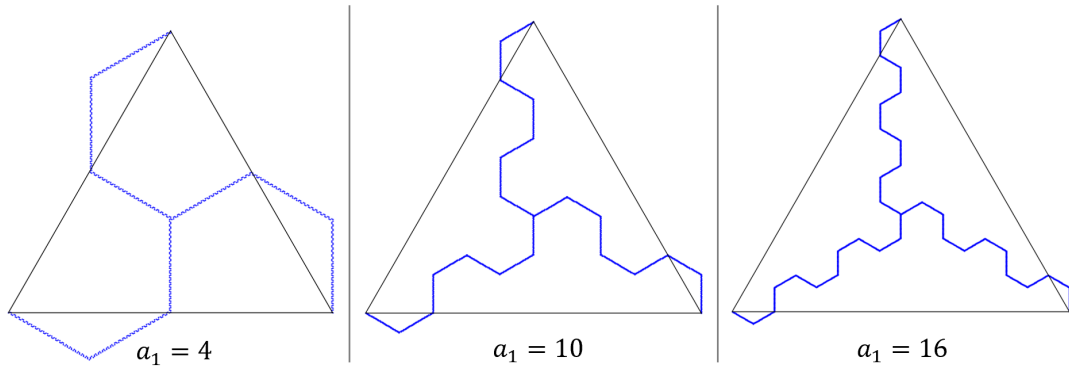


図 4.6: The generated points for $a_1 \equiv 4 \pmod{6}$

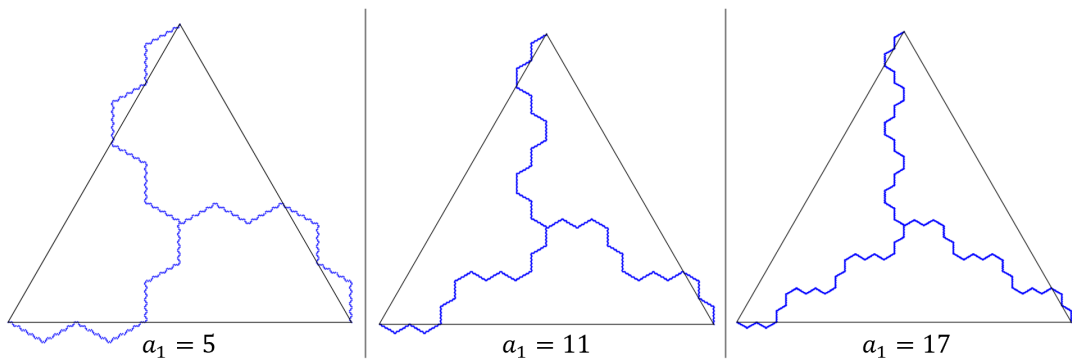


図 4.7: The generated points for $a_1 \equiv 5 \pmod{6}$

図から、 a_1 の値が点の集合の大まかな形状に影響を与えていることが確認された。また、各図を観察すると、ある初期の形状が存在し、 a_1 の値が5つ増加するごとに特定の形状が順次追加されていく様子が明確に観察された。次に、 a_1 の値

を固定し、 a_2 の値の変化が点の集合の形状に与える影響を観察した．今回は例として、 a_1 の値を 3 に固定し、観察を行ったものを示す．この結果、点の生成個数が 1 つ増加するごとに規則性を示すのと同様、点の生成箇所にも規則性が確認された．その様子を図 4.8、図 4.9 に示す．

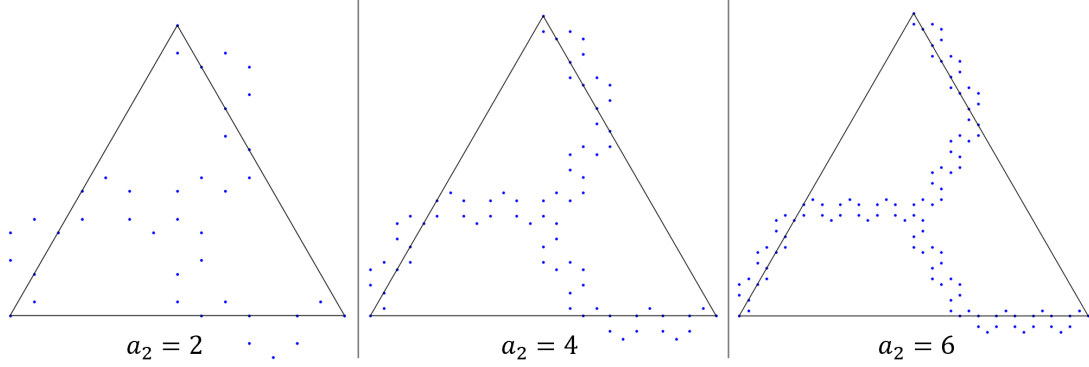


図 4.8: The generated points for $a_2 \equiv 0 \pmod{2}$

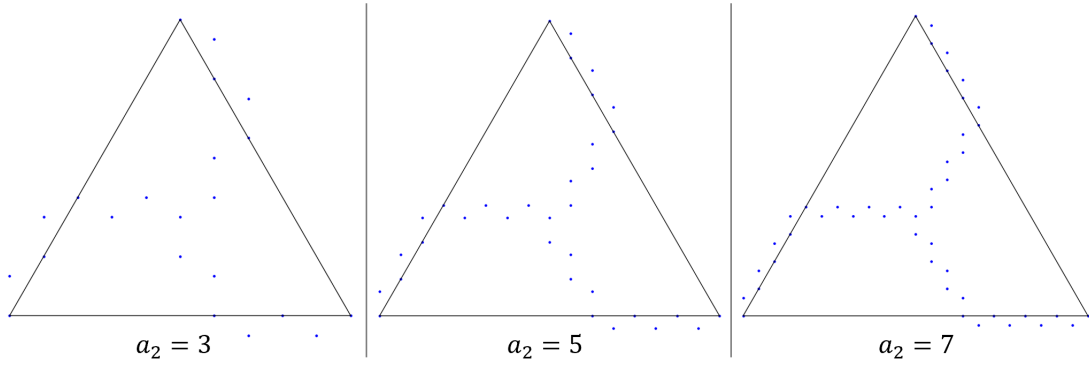


図 4.9: The generated points for $a_2 \equiv 1 \pmod{2}$

a_1 の値を 3 ではなく他の値で固定した場合でも、点の生成個数における規則性と同様の間隔で、点の集合にも規則性が確認された．

以上の結果から、生成される展開図の形状がパラメータ l_1 を正則連分数展開させた値に依存していることが確認された．本論文では a_1, a_2 に焦点を絞って説明を行ったが、 a_3 以降の値にも規則性が存在することが確認された．また、展開図の形状に対する影響としては、 $a_1, a_2, a_3 \dots$ の順で大まかな形状が定められていく様子が観察により確認された．

第5章 誤差 1.8866×10^{-8} の共通展開図の存在

不動点伝播法によって生成される図は，あくまで点の集合に過ぎない．そのため，生成された点同士を線分で結ぶというプロセスを経て，初めて展開図と呼べる形状が完成する．しかし，この方法を単純に適用したのでは，展開図として必要な連結性が必ずしも保証されない．この連結性に関する例を図 5.1 に示す．

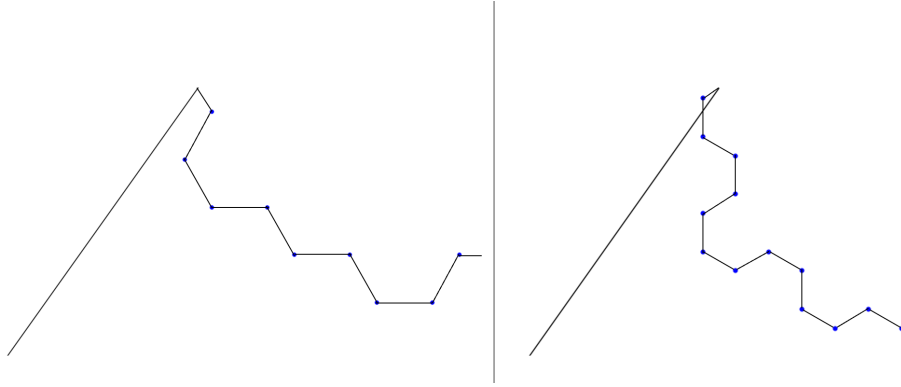


図 5.1: Connected and Disconnected

図 5.1 では，近い点同士を機械的に線分で結んだ結果を示している．左図は，線分同士が公差せず，綺麗な閉空間を形成しており，展開図として成立している．一方，右図では線分同士が公差しており，展開図として成立していない．

しかし，第 4 章で述べたように，不動点伝播法によって生成される点集合の形状は，ずらし幅のパラメータ l_1 の値に依存していることが確認されている．そのため，展開図の四隅が連結性を保つよう，パラメータを実験的に調整し，目標値 $l_1 + l_2 = (2\sqrt{6} - 3)/6$ に近づけていく．その結果， l_1 を $(2\sqrt{6} - 3)/6 \times 167/198$ ， l_2 を $(2\sqrt{6} - 3)/6 \times 31/198$ で分割し，正則連分数展開した値を用いると連結性が保証される点集合が観察された． $l_1 = 449/1682(a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = 15, a_6 = 3, a_7 = 2)$ ， $l_2 = 227/4581(a_1 = 20, a_2 = 5, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 6, a_6 = 2, a_7 = 1)$ に設定することで，定理 11 が得られる．ここで誤差を ϵ とし，辺の長さを $[\sqrt{2} + \epsilon]$ と表現する．

Theorem 11. 正 8 面体と誤差 1.8866×10^{-8} のほぼ正 4 面体の共通展開図が存在する．

観測的に発見されたこの共通展開図の誤差は 1.8866×10^{-8} である．この際に使用した l_1 と l_2 の正則連分数展開は a_1 から a_7 まで行ったものである．したがって，連分数展開をさらに詳細に進めることで，誤差をより小さく抑えた共通展開図の発見が可能であると考えられる．

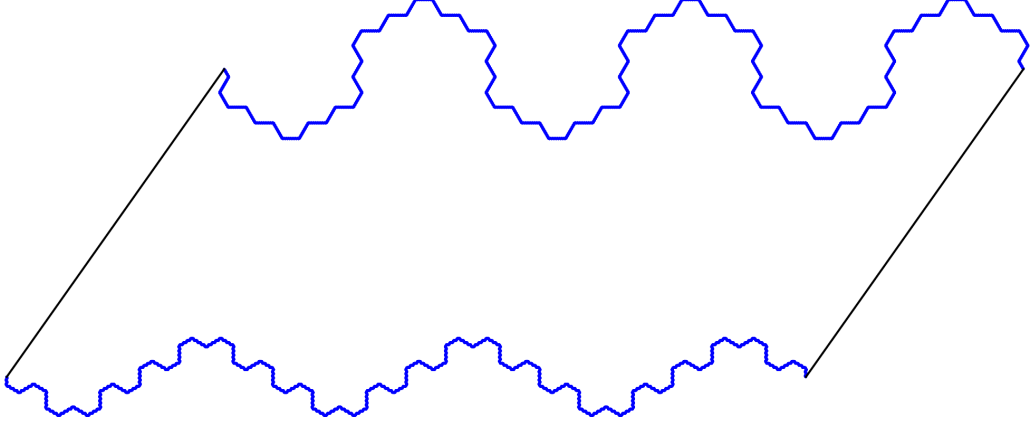


図 5.2: A common unfolding of a regular octahedron and an almost regular tetrahedron (error: 1.8866×10^{-8})

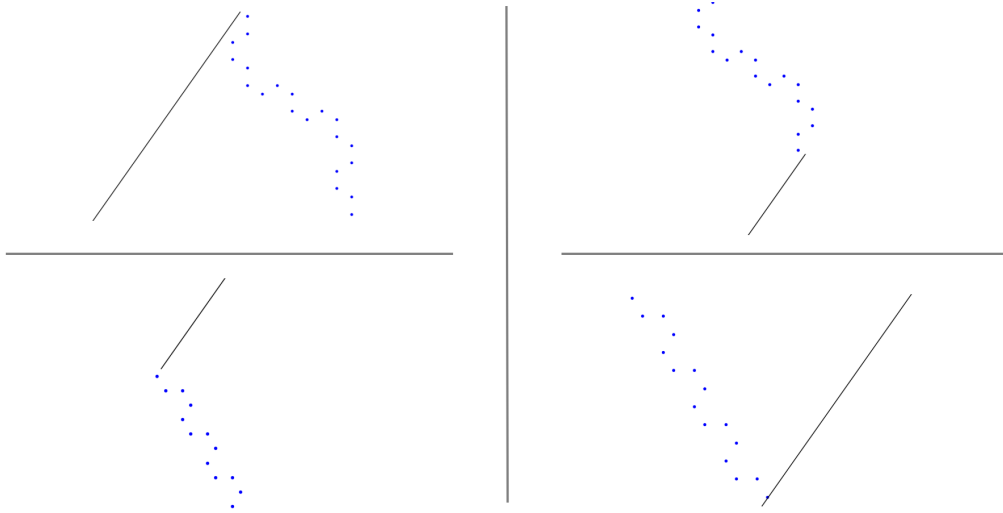


図 5.3: The connectable four corners in Figure 5.2

第6章 おわりに

本論文では、先行研究で用いられていた手法を「不動点伝播法」と命名し、正8面体と正4面体に対して再検討を行った。その結果、先行研究と同様に、極めて誤差の小さい等面4面体との共通展開図の存在を確認することができた。また、この手法では、誤差を0にするには無限個の点が必要となることも、先行研究と同様の結果として得られた。

さらに、本研究では正則連分数展開と展開図の形状に関する観察結果として、主に a_1 と a_2 に焦点を当てた。しかし、 a_3 以降に拡張可能な規則性が見つければ、連結性に関する議論を実験的な発見に留めることなく、数学的な定理と証明へと発展させることが可能になるかもしれない。

謝辞

本研究に際して，様々なご指導とご助言をいただきました上原隆平教授, 鎌田斗南助教に心より感謝いたします。そして，日々のゼミナールでのご助言や数々の知見をご教示いただいた上原研究室の研究補助員である谷口智子氏をはじめ，上原研究室の皆様に感謝の意を表します。

参考文献

- [1] E.D.Demaine and J.O'Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007. (邦訳：『幾何的な折りアルゴリズム』上原隆平訳，近代科学社，2009年.)
- [2] T.shirakawa. Unpublished. 2010.
- [3] T.Horiyama and R.Uehara. Nonexistence of Common Edge Developments of Regular Tetrahedron and Other Platonic Solids. In *China-Japan Joint Conference on Computational Geometry, Graphs and Applications (CGGA 2010)*, 2010.
- [4] T.Shirakawa, T.Horiyama, and R.Uehara. On Common Unfolding of a Regular Tetrahedron and a Cube. *Science of Origami*, 4(1):45-54, 2015.
- [5] 上原隆平.『計算折り紙入門』近代科学社，2018.
- [6] J.Akiyama. Tile-Makers and Semi-Tile-Makers. *American Mathematical Monthly*, 114:602-609, 2007.
- [7] J.Akiyama and C.Nara. Developments of Polyhedra Using Oblique Coordinates. *J.Indonesia. Math. Soc.*, 13(1):99-114, 2007.