

Title	Rep-octahedron に関する研究
Author(s)	能美, 雄太
Citation	
Issue Date	2025-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/19833
Rights	
Description	Supervisor: 上原 隆平, 先端科学技術研究科, 修士 (情報科学)

修士論文

Rep-octahedron に関する研究

能美 雄太

主指導教員 上原 隆平

北陸先端科学技術大学院大学
先端科学技術研究科
(情報科学)

令和7年3月

Abstract

A replicative net of polyhedron Q is a polygon that serves as a net for Q and can be subdivided into nets of (small copies of) Q . The number of small nets is called order of the replicative net. If they have the same surface area, the replicative net is called regular, and if they are congruent, it is called uniform. When Q is a cube, which is called rep-cube. The notion is well investigated as a rep-cube in the past few years. Additionally, there is preliminary research for the case where Q is a regular tetrahedron. However, studies extending this notion to other polyhedra have not been undertaken.

We investigate the case that Q is a regular octahedron, which is called rep-octahedron, as another application of the notion of a replicative net. We note that the classic platonic solids consist of five regular polyhedra, namely, a regular tetrahedron, a cube, a regular octahedron, a regular dodecahedron, and a regular icosahedron. Especially, it is known that a cube and a regular octahedron are dual and the numbers of distinct ways of edge unfolding are the same, which is equal to eleven. The purpose of this study is to investigate whether the properties already known for the rep-cube are also applicable to a rep-octahedron or not. It clarifies the similarities and differences between a pair of dual regular polyhedra.

First, we explored regular or uniform rep-octahedra of order k to exist. Then we found regular rep-octahedra of order k when k is 3,4,7,9,12,16 or 64 and uniform rep-octahedra of order k when k is 3,4,9,12 or 16 by actually designing them. These rep-octahedra were mainly figured out by hand, although it was done using a free puzzle solver called “Burrtools”.

Next, we investigated whether there is a way to generate infinitely many non-isomorphic regular rep-octahedra. We found a way to generate a regular rep-octahedron of order $k = 64i^2$ for any integer i , which yields infinitely many non-isomorphic regular rep-octahedra.

Third, we proved to establish the necessary conditions for the existence of a regular rep-octahedron. As a result, a regular rep-octahedron of order k does not exist when k is not an element of the set $\{x \mid \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0, x = a^2 + b^2 + ab\} = \{1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, \dots\}$.

Finally, we analyzed the uniform rep-octahedrons of smaller orders based on the eleven types of edge unfolding using computational experiments. In the computational experiments, the integer programming solver SCIP 8.0.3 was used. From the computational experiments, we showed that no uniform rep-octahedron of order 7 exists. There is a dual relationship between eleven edge unfoldings of a regular octahedron and ones of a cube, however, no interrelation was observed in the results of this study when focusing on replicative nets.

目次

第1章	はじめに	1
1.1	用語の定義	1
1.2	歴史	5
1.3	先行研究	5
第2章	Regular rep-octahedron の存在性	11
2.1	小さな k の値に対する Regular rep-octahedron の存在性	11
2.2	Regular rep-octahedron が存在する必要条件	11
2.3	Regular rep-octahedron が存在する十分条件	14
第3章	Uniform rep-octahedron	17
3.1	準備	17
3.2	次数 k の Uniform rep-octahedron の存在性	20
第4章	おわりに	22
第5章	謝辞	24

目 次

1.1	次数 2 の Rep-cube	2
1.2	次数 3 の Rep-octahedron	3
1.3	Regular と Uniform のいずれでもない Rep-octahedron	3
1.4	立方体と正八面体の双対関係	4
1.5	正八面体の 11 種類の辺展開図	5
1.6	立方体の 11 種類の辺展開図	5
1.7	12 種類のペントミノ	6
1.8	ペントミノでできた立方体の展開図	6
1.9	次数 4 の rep-tile の例	7
1.10	次数 4, 8, 9 の Regular (Uniform) rep-cube	7
1.11	次数 5, 9, 10 の Regular rep-cube	8
1.12	定理 3 の証明で用いる展開図	9
1.13	次数 $18i^2$ ($i = 1$) の Uniform rep-cube	9
1.14	次数 $18i^2$ ($i = 3$) の Uniform rep-cube	9
2.1	次数 3, 4, 12 の Regular (Uniform) Rep-octahedron	12
2.2	次数 9, 16 の Regular (Uniform) Rep-octahedron	12
2.3	次数 7, 64 の Regular Rep-octahedron	13
2.4	定理 5 の証明で用いる辺展開図	14
2.5	正八面体の辺展開図をひし形に分割	14
2.6	ひし形を分割	15
2.7	次数 $64i^2$ の Regular rep-octahedron を作るためのパターン	15
2.8	pp を埋め込んで得られる, 次数 $64i^2$ ($i = 1$) の Regular rep-octahedron.	16
2.9	pp を埋め込んで得られる, 次数 $64i^2$ ($i = 2$) の Regular rep-octahedron.	16
3.1	番号を配置した Q	18
3.2	p を Q 上の $0, 1, 2, 3, 8, 12, 16, 23$ を覆うように置いたとき	19
3.3	z 型の辺展開図	21

表 目 次

1.1	辺展開図の双対関係	4
1.2	Uniform rep-cube を構成できる辺展開図	10
3.1	SCIP の実行環境	19
3.2	Uniform rep-octahedron を構成できる辺展開図	20

第1章 はじめに

理論計算機科学の分野において折り紙の「折り」に着目した研究が行われ、計算折り紙として発展している。これは、「折り」を基本操作とした幾何学であり、工学や化学など多岐に応用が期待されることから、脚光を浴びている。本研究では、Rep-octahedron について扱う。Rep-octahedron は、それ自身が正八面体の展開図であり、かつ複数の正八面体の展開図に分割可能な多角形のことを指す。これまでの研究では正多面体にこの着想を適用することは立方体と正四面体に留まっている。そのため、正八面体を対象に自己複製的な着想を拡張することで、これからの研究分野や学問における発展に役立つことが期待される。

1.1 用語の定義

展開図とは、多面体の表面に切り込みを入れて平面上に展開することで得られる、連結で重なりがない多角形である。特に、切り込みを多角形の辺に限定して得られる展開図を辺展開図と呼ぶ。

Q を多面体、 k を自然数とする。ある多角形 P が次数 k の Q の Replicative-net であるとは、 P 自身が Q の展開図であり、かつ k 個の小さな Q の展開図に分割可能であることをいう。特に、 Q が立方体の場合は Rep-cube、正八面体の場合は Rep-octahedron とそれぞれ呼ぶ。Rep-cube と Rep-octahedron の例を図 1.1, 図 1.2 にそれぞれ示す。

ある Replicative net を P とする。分割された展開図の面積が全て等しいとき、 P は Regular であるという。特に、分割された展開図が全て合同のとき、 P は Uniform であるという。

図 1.2 に示す Rep-octahedron は Uniform rep-octahedron であり Regular rep-octahedron である。図 1.3 に Uniform と Regular のいずれでもない Rep-octahedron を示す。

Rep-cube は「多面体を展開したことでできた単純多角形を分割して、分割後の各ピースを折り直すことで、それぞれが元の多面体と相似な多面体になるものは存在するか」という着想を立方体に適用したものであり、Abel らによって提唱された概念である [1]。

立方体と正八面体の間には双対と呼ばれる関係がある。

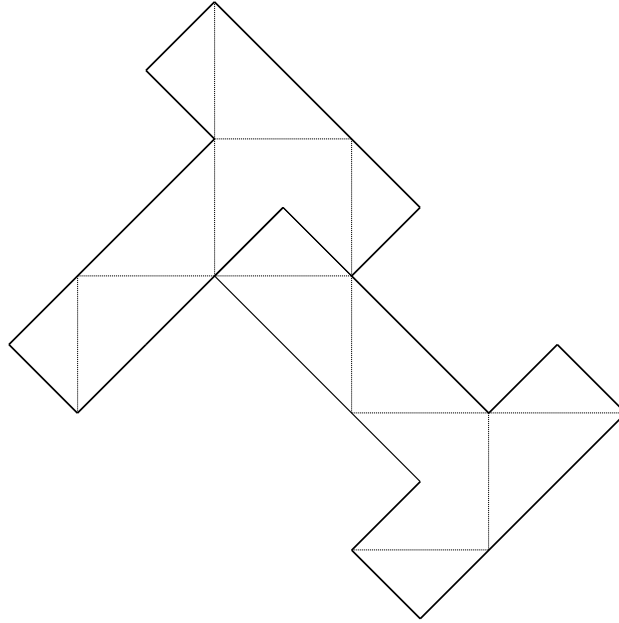


図 1.1: 次数 2 の Rep-cube

2つの立体の間に双対関係があるとは、一方の立体の各面の重心を頂点とし、辺を共有する面に対応する頂点同士を直線で結んだとき、頂点で接する面の重心を結ぶ多角形を面とすると、もう一方の立体が得られることである．図 1.4 に立方体と正八面体の間にある双対関係を示す．

多面体において、双対同士の辺展開の方法の個数は同じであり、正八面体と立方体の辺展開図はどちらも 11 種類存在することが知られている．図 1.5 と図 1.6 に正八面体と立方体の辺展開図をそれぞれ示した．また、正八面体と立方体の 11 種類の辺展開図の間には 1 対 1 対応がある [2]．

[2] の証明をもとにして、11 種類の辺展開図を対応付ける． Q を立方体、 P_i ($1 \leq i \leq 11$) を Q の 11 種類の辺展開図、 Q' を正八面体、 P'_j ($1 \leq j \leq 11$) を Q' の 11 種類の辺展開図とする． P_i の上での 6 つの面を頂点、面の接続を辺とするグラフ G_i を作る．次に、 Q' の 6 つの頂点を頂点、 P'_j に展開するとき切る Q' の辺を辺とするグラフ G'_j を作る． G_i と G'_j が同型であるとき、辺展開図 P_i と P'_j を対応付けすることとする．

正八面体と立方体の辺展開図における双対関係の対応の例を表 1.1 に示す．

Rep-cube はこれまで複数の研究がある [1, 5, 6] が、立方体の双対である正八面体に対しては研究がされていない．本研究の目的は、Rep-octahedron を研究し、Rep-cube について知られている主要な性質の拡張可能性を検討し、2 つの多面体の間の性質の共通点と差異を明らかにすることである．そして、正八面体と立方体の間にある双対関係が、Rep-octahedron と Rep-cube の性質にどのような影響

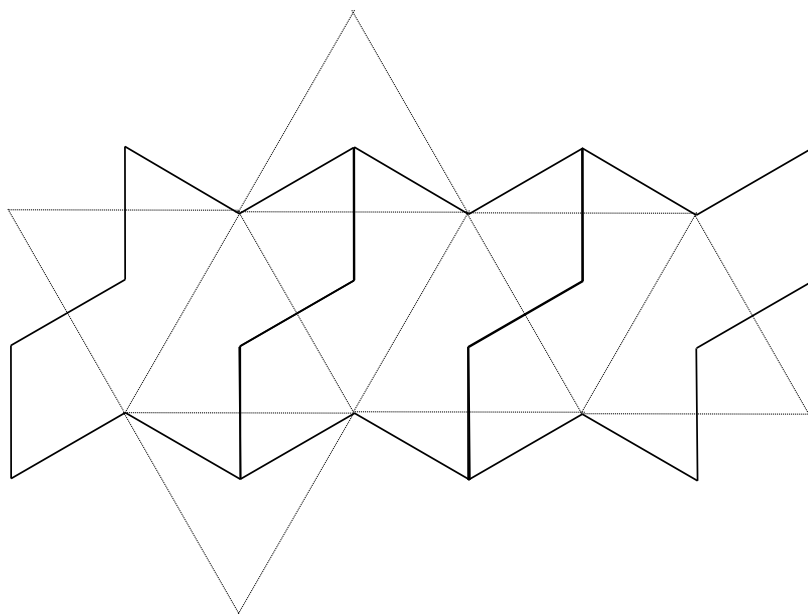


図 1.2: 次数 3 の Rep-octahedron

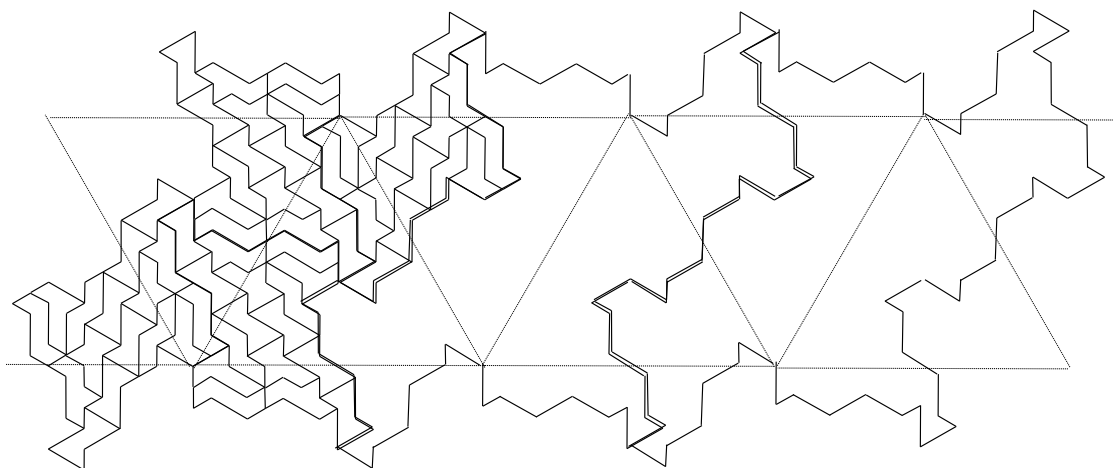


図 1.3: Regular と Uniform のいずれでもない Rep-octahedron

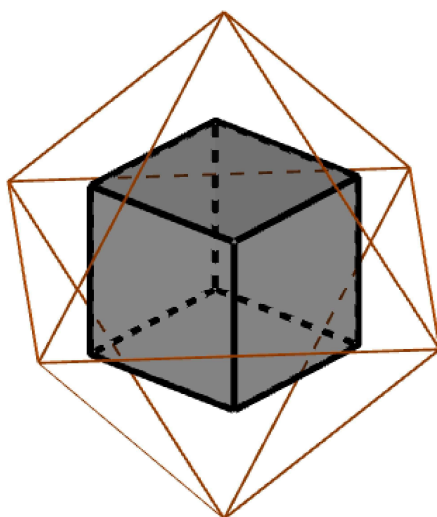


図 1.4: 立方体と正八面体の双対関係

↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓

表 1.1: 辺展開図の双対関係

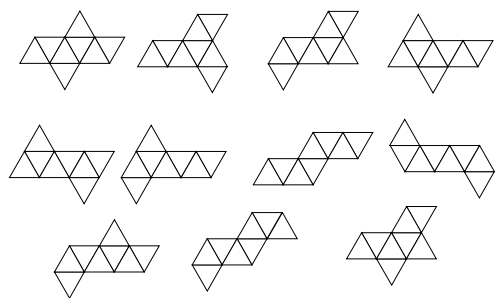


図 1.5: 正八面体の 11 種類の辺展開図

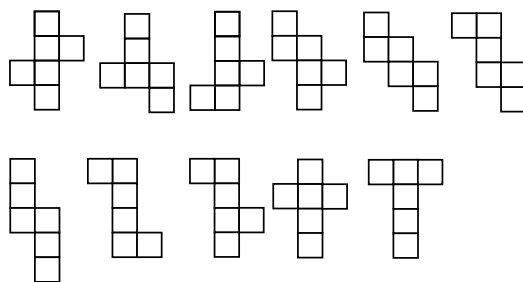


図 1.6: 立方体の 11 種類の辺展開図

を与えているか探求する.

1.2 歴史

Replicative net に関連した歴史を説明する. Replicative net の概念はポリオミノと Rep-tile の 2 つの概念から着想を得ている.

ポリオミノとは, 複数個の単位正方形の辺同士をつないでできる多角形であり Solomon W. Golomb が考案した [3]. 特に, 単位正方形を 5 つつないでできたポリオミノをペントミノと呼び, 全部で 12 種類ある. 12 種類のペントミノを図 1.7 に示す.

H・D・ジェミジャミンは 12 種類の全てのペントミノを用いて 1 辺が $\sqrt{10}$ の立方体を覆う方法を示した [3]. 図 1.8 にペントミノでできた立方体の展開図を示す.

次数 k の Rep-tile とは, k 個に分割すると, 分割したパーツが全て合同でもとの多角形と相似である多角形である [4]. Rep-tile についても Golomb が考案した. 次数 4 の Rep-tile の例を図 1.9 に示す.

1.3 先行研究

Replicative net を一般化した研究としては, Rep-cube を対象とした研究がこれまでいくつか行われてきた.

定理 1 ([1, 5, 6]). $k = 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 18, 25, 36, 50, 64$ のそれぞれについて, 次数 k の *Regular rep-cube* が存在する.

図 1.1 は次数 2 の Regular rep-Cube である. またこれは Uniform rep-Cube でもある. 図 1.10 と図 1.11 に Regular rep-cube の例を示す.

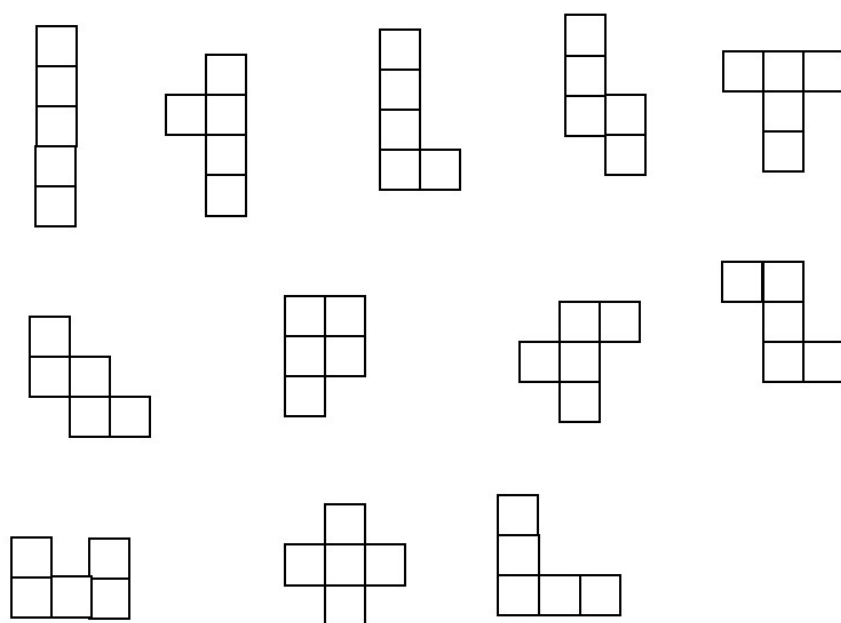


図 1.7: 12 種類のペントミノ

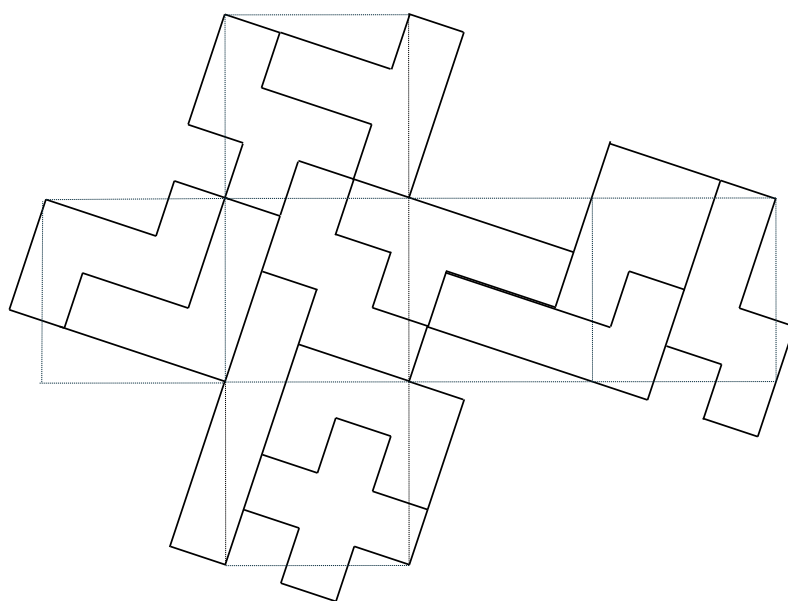


図 1.8: ペントミノでできた立方体の展開図

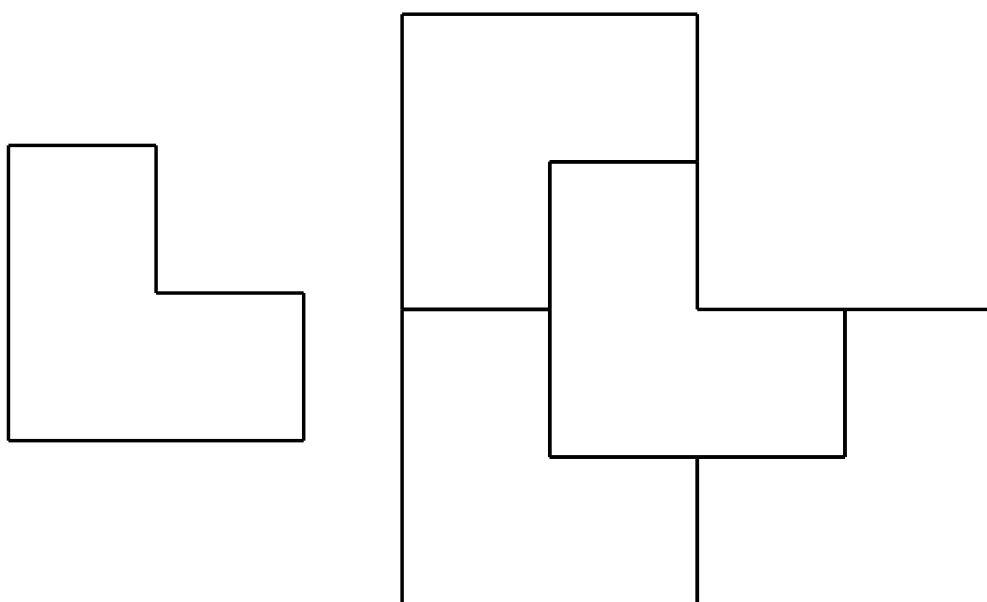


図 1.9: 次数 4 の rep-tile の例

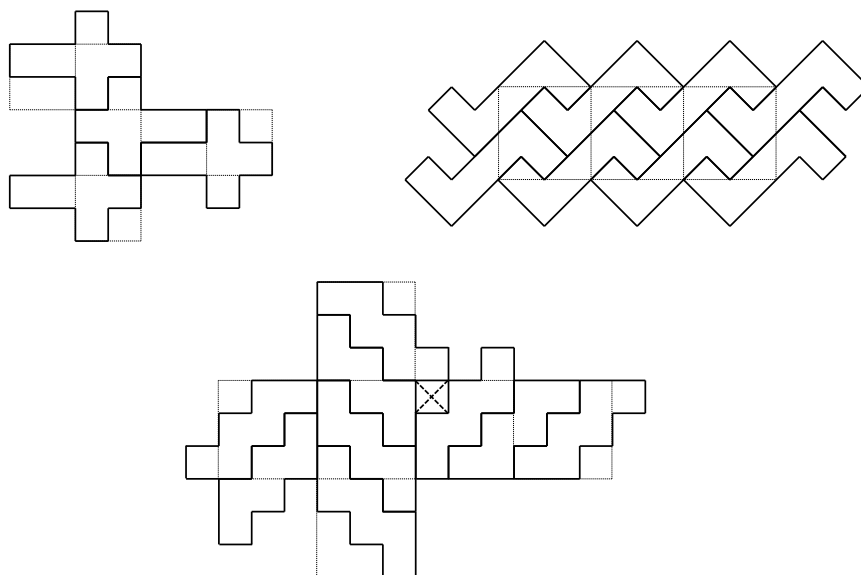


図 1.10: 次数 4, 8, 9 の Regular (Uniform) rep-cube

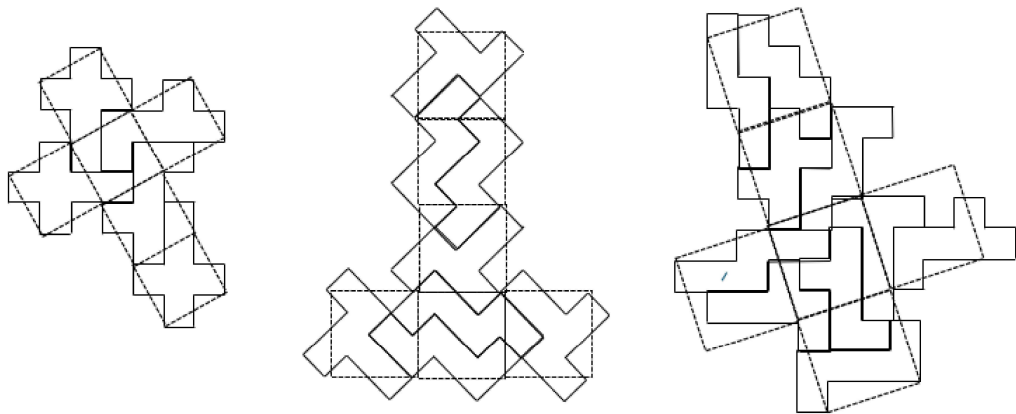


図 1.11: 次数 5, 9, 10 の Regular rep-cube

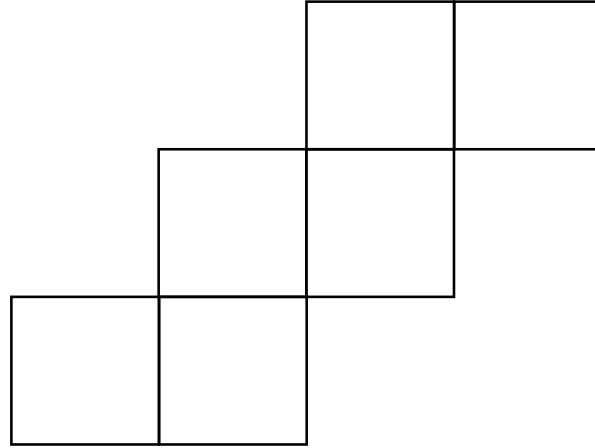


図 1.12: 定理 3 の証明で用いる展開図

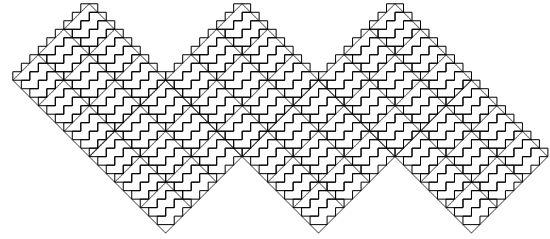
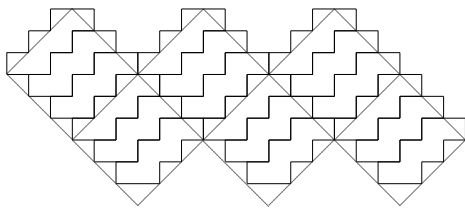


図 1.13: 次数 $18i^2$ ($i = 1$) の Uniform rep-cube

図 1.14: 次数 $18i^2$ ($i = 3$) の Uniform rep-cube

定理 2 ([5, 6]). 次数 k の *Regular rep-cube* が存在する必要条件是, k が集合 $\{x \mid \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0, x = a^2 + b^2\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, \dots\}$ に含まれることである.

定理 3 ([1]). i を任意の正整数とする. $k = 18i^2$ を満たすとき次数 k の *Uniform rep-cube* が存在する.

Proof. 図 1.12 で示した展開図に着目する. この展開図を 18 枚使用して図 1.13 のように敷き詰める. すると次数 18 の Uniform rep-cube が得られる. これを細分化することで無限に Uniform rep-cube が構成できる. 図 1.14 は図 1.13 を細分化して得られた次数 162 の Uniform rep-cube である. $\square$

定理 4 ([6, 7]). 11 種類の立方体の辺展開図それぞれに対して, それをもとにして

											
2	×	○	○	×	×	×	○	×	×	○	×
4	○	○	○	○	×	○	×	×	○	○	○
5	○	○	○	○	×	○	×	×	○	×	○
8	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

表 1.2: Uniform rep-cube を構成できる辺展開図

次数 $k \leq 7$ の *Uniform rep-cube* を構成できるか否かをまとめたものは，表 1.2 に示す通りである．

Rep-cube 以外に正四面体の場合にも研究がされてきた [8] が，それ以外の多面体に対してはこれまで研究されていない．

第2章 Regular rep-octahedron の存在性

この章では、次数 k の Regular rep-octahedron が存在するための必要条件と十分条件について示す。

2.1 小さな k の値に対する Regular rep-octahedron の存在性

定理 5. $k = 3, 4, 7, 9, 12, 16, 64$ のそれぞれについて、次数 k の Regular rep-octahedron が存在する。

Proof. $k = 3, 4, 7, 12, 16$ のときの次数 k の Regular rep-octahedron を図 2.1 と図 2.2, 図 2.3 に示す。□

定理 5 の各 Regular rep-octahedron の存在を検証する際には Burrtools[9] を用いた。Burrtools とはフリーのパズルソルバーの 1 つである。Burrtools は与えられたピースに対して、枠にピースを詰め込めるかどうかを調べるソフトウェアであり、解が存在する場合はその解を出力することもできる対話型ソフトウェアである。本研究では正八面体の辺展開図をピース、Rep-octahedron を目的の枠として探索を行った。展開図の外形を調整しながら辺展開図のピースを隙間なく重なりなくはめ込むことができるかどうかを試行錯誤しながら解を求めた。Burrtools と手作業による探索で上記の結果を得た。

2.2 Regular rep-octahedron が存在する必要条件

次数 k の Regular rep-octahedron が存在する必要条件について示す。最初に補題 1 を示す。

補題 1. 正八面体 Q の 1 辺を単位長として、 Q の任意の展開図を P とする。このとき、 P をうまく単位三角格子点上に配置すると、 P の外周上の Q の頂点をすべて同時に格子点上にのせることができる。

なおここで、 Q のすべての頂点は P の外周上の点になることが知られている [2]。

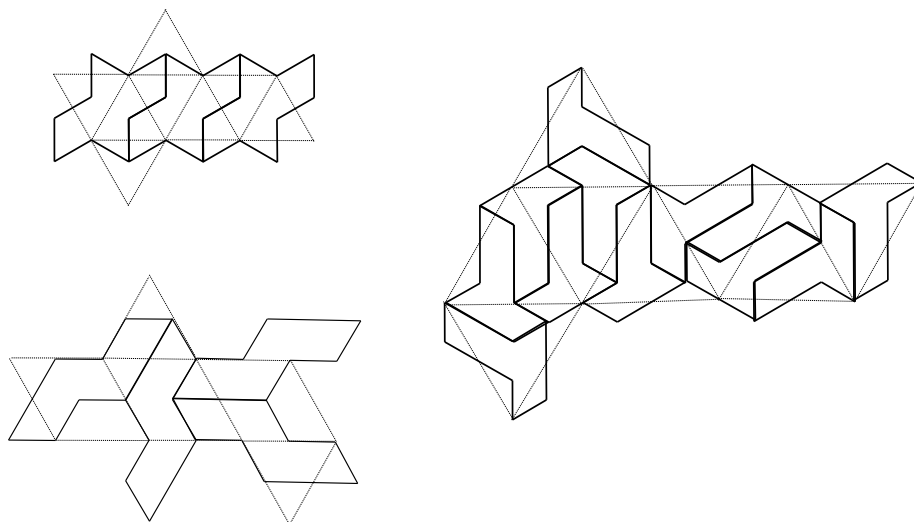


図 2.1: 次数 3, 4, 12 の Regular (Uniform) Rep-octahedron

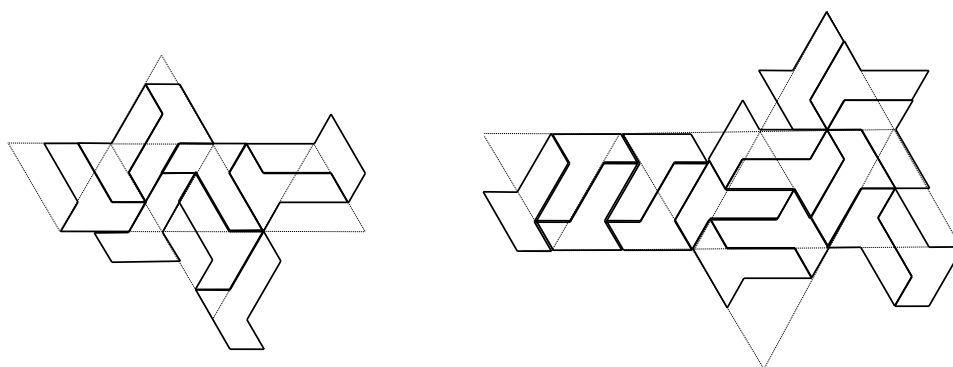


図 2.2: 次数 9, 16 の Regular (Uniform) Rep-octahedron

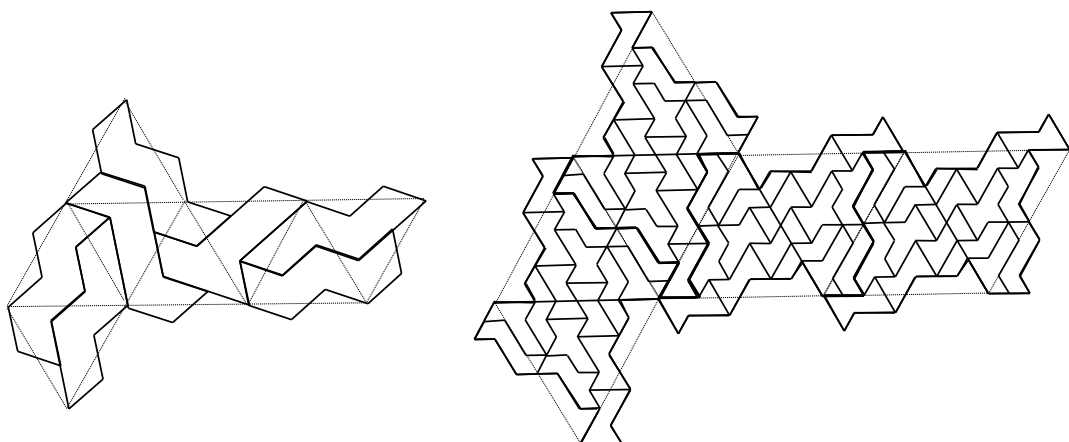


図 2.3: 次数 7, 64 の Regular Rep-octahedron

Proof. 単位立方体 Q' の任意の展開図を P' とする．先行研究 [5] では，秋山のスタンパーの考え方 [10] を用いて， P' を単位正方格子の上に適当に配置すると， P' の外周上にある Q' の頂点を全て同時に格子点上におけることを示している．この考え方を正八面体と三角格子に置き換えることで，補題 1 を得る．

□

集合 S について， $S = \{x \mid \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0, x = a^2 + b^2 + ab\} = \{1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, \dots\}$ と定義する．

定理 6. 与えられた *Rep-octahedron* P が k 個の同じ面積の辺展開図 P_i ($1 \leq i \leq k$) から構成されたとする．このとき $k \in S$ であることが必要条件である．つまり， $k \notin S$ であれば，その k に対しては辺展開図による次数 k の *Regular rep-octahedron* は存在しない．

Proof. 先行研究 [1] で用いた Regular rep-cube の非存在性に関する証明を，Rep-octahedron に拡張する．

P_i を単位正三角形で 8 つで構成できるとすると， P_i の面積は $2\sqrt{3}$ ， P の面積は $2\sqrt{3}k$ と表すことができる．このとき， P は辺の長さ $\sqrt{k}$ の正八面体 Q の展開図であり，各 P_i は単位長の辺をもつ正八面体 Q_i の展開図である．

P_i を単位三角格子の上に配置することを考える． Q_i の 1 辺の長さは単位長のなので，補題 1 より Q_i のすべての頂点が三角格子点上になるように配置できる．このとき， Q_i の任意の 2 頂点間の距離は，余弦定理より $\sqrt{a^2 + b^2 + ab} = l$ ($a, b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0$) と表すことができる (ただしここで l は自然数)．

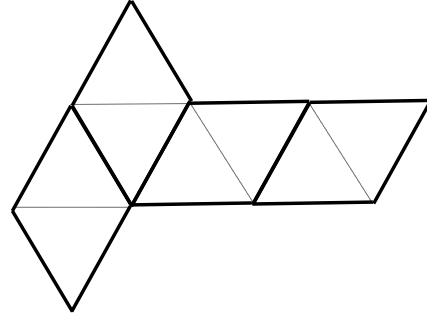
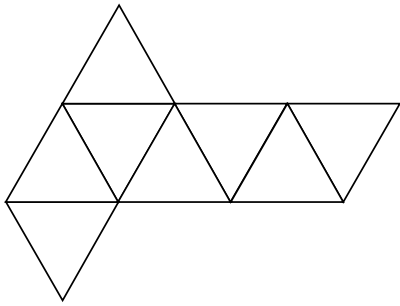


図 2.5: 正八面体の辺展開図をひし形に

図 2.4: 定理 5 の証明で用いる辺展開図 分割

P と Q に対しても同様の操作を行うことで, $\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{a}\hat{b} = (\sqrt{kl})^2 = kl^2$ ($\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}, \hat{a} > 0, \hat{b} \geq 0$) を得る. したがって, 次数 k の Regular rep-octahedron が存在するためには, 1 以上の整数 a と l , 0 以上の整数 b が存在して, $\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{a}\hat{b} = kl^2$ の形となる必要がある. $\square$

2.3 Regular rep-octahedron が存在する十分条件

ここでは非同型な Regular rep-octahedron が無限に存在することを示す.

定理 7. i を任意の正整数とする. $k = 64i^2$ を満たすとき次数 k の Regular rep-octahedron が存在する.

Proof. 正八面体の辺展開図は 8 つの正三角形から構成されるが, うまく二つずつ接着することで, 4 つのひし形で構成できるものがある. 具体的に図 2.4 の辺展開図を図 2.5 のようにひし形 4 つで構成することができる. ひし形の分割は図 2.6 のように, 任意の自然数 i に対して i^2 枚の小さいひし形に分割できる.

ひし形を正八面体の辺展開図で構成した特定の多角形に置き換える. ここでは図 2.7 のパターンを利用する. 図 2.7 を以下 pp とする. 図 2.5 の 4 つのひし形を pp で置き換えたものを図 2.8 に示す. このとき凹凸が矛盾なく一致するように設計されているため, 正八面体の展開図である. つまり, 図 2.8 の多角形は次数 64 の Regular rep-octahedron である. 同様に i^2 枚の小さいひし形に分割しても, 同様に小さいひし形を pp で置き換えるとより細かな Regular rep-octahedron を得ることができる. したがって定理が成立する. $\square$

$i = 2$ のときに得られた次数 256 の Regular rep-octahedron を図 2.9 に示す.

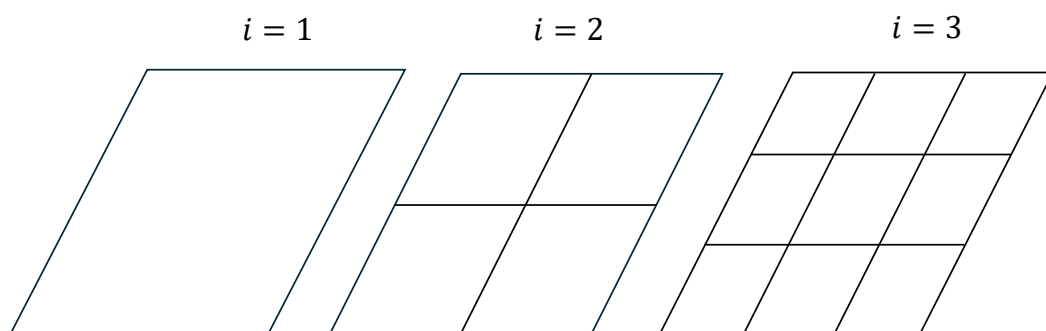


図 2.6: ひし形を分割

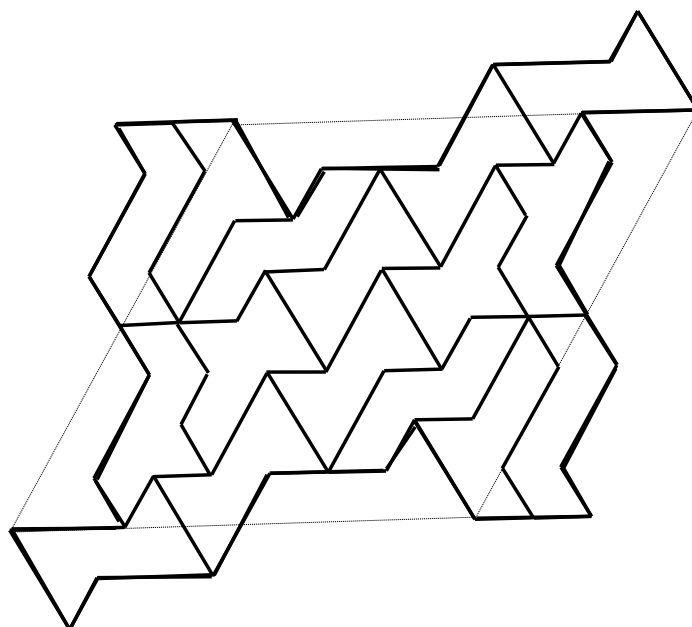


図 2.7: 次数 $64i^2$ の Regular rep-octahedron を作るためのパターン

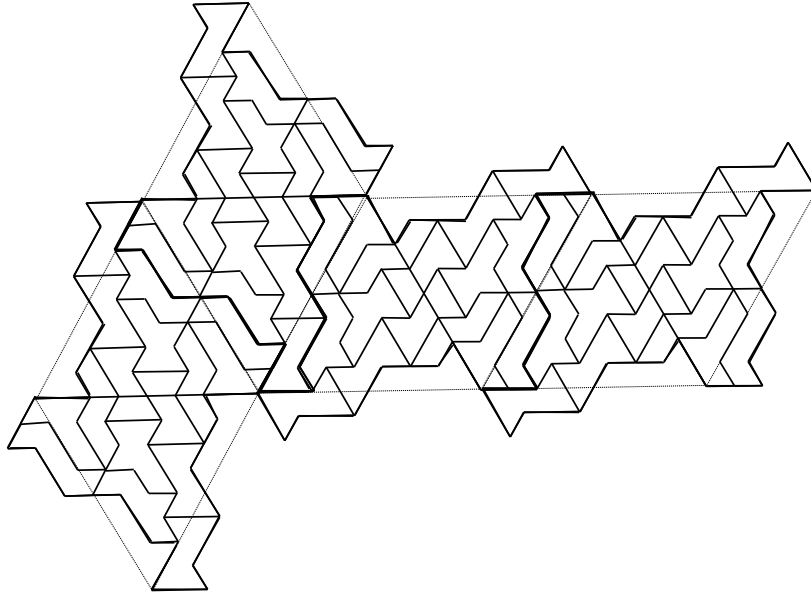


図 2.8: pp を埋め込んで得られる, 次数 $64i^2(i = 1)$ の Regular rep-octahedron.

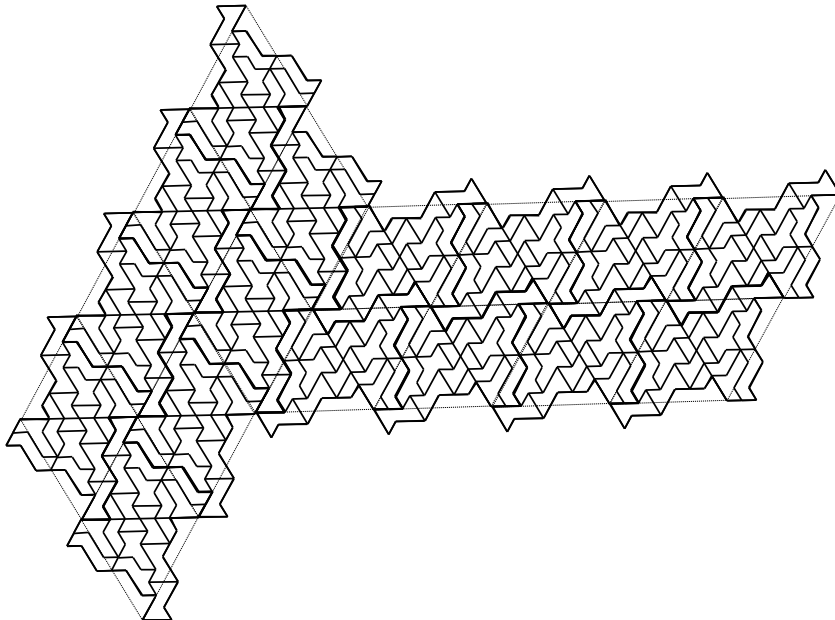


図 2.9: pp を埋め込んで得られる, 次数 $64i^2(i = 2)$ の Regular rep-octahedron.

第3章 Uniform rep-octahedron

この章では Uniform rep-octahedron の存在性について扱う。はじめに計算機実験の手順を述べる。その後、小さな次数に対して Uniform rep-octahedron の存在の有無を示す。最後に Uniform rep-octahedron が存在しない場合を示す。

3.1 準備

11 種類の正八面体には辺展開図それぞれに対して、それをもとにして Uniform rep-octahedron を構成できるか否かを調べる方法を示す。実験には整数計画ソルバーの SCIP version 8.0.3 を使用した [11]。

ここでは、立体の表面上でのタイル張り問題として定式化を行った。タイル張り問題とは特定の形状の多角形を用いて、隙間と重なりなく与えられた平面を敷き詰める問題である。本研究では、先行研究 [12] の手法を採用した。対象とする正八面体の辺展開図を1つ選ぶ。これを p とする。 p の1辺の長さを1とする。このとき p の面積は $2\sqrt{3}$ である。 p を k 枚使用して、面積が $2\sqrt{3}k$ 倍の Rep-octahedron の形状に敷き詰めができるとき、次数 k の Uniform rep-octahedron が存在する。敷き詰めは1辺の長さが $\sqrt{k}$ の正八面体の表面上で行う。

実験は、集合 S の中から比較的小さな次数 $k = 3, 4, 7, 9, 16$ の場合を選んで対象とした。次数 k の Uniform rep-octahedron の存在を判定するための具体的な手順を以下に示す。ここでは、例として $k = 3$ の場合を用いる。

1. Q を1辺の長さが $\sqrt{k}$ の正八面体とする。 q の1辺の長さは1とする。 Q の表面を $8k$ 個の単位三角形に分割する。単位三角形に0から $8k - 1$ まで適当に番号をつける。図 3.1 に番号を配置した Q を示す。
2. p のコピーを Q の単位三角形上に敷き詰める処理をモデル化する。具体的には p の配置を単位正三角形の番号を用いた変数 $A(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ で表現する。各 a_i がその p で覆われている単位正三角形の番号を表す。表現を一意的にするため $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$ とする。例として、図 3.2 に $A(0, 1, 2, 3, 8, 12, 16, 23) = 1$ のときの Q を示す。 $A(0, 1, 2, 3, 8, 12, 16, 23) = 1$ とは Q の単位正三角形 $0, 1, 2, 3, 8, 12, 16, 23$ を覆うように p を配置したことを示す。

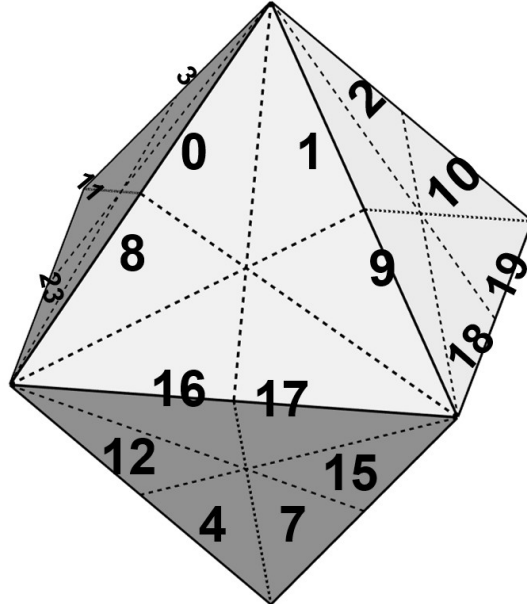


図 3.1: 番号を配置した Q

p の配置について、裏返しや回転を含む全ての可能な配置に対して、それを表現した変数を用意する． $A(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = 1$ のときは p を $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ に敷き詰めた場合で、 $A(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = 0$ のときは p をそこに配置しない場合を表す．

3. 単位三角形 i ごとに制約式を導入する．制約式はその場所を覆う p の個数を表す．全ての i は 1 枚の p で覆われる必要があるため、制約式の解を 1 に設定する．

場所 i の制約式は、前段階の変数 $A(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ の和として表現する．つまり $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ のいずれかに i が含まれる場合に限り場所 i の制約式に含める．正確には単位三角形 i に関する制約式は以下で記述できる：

$$\sum_{i \in \{a_0, a_1, \dots, a_7\}} A(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = 1$$

4. 全ての単位三角形での制約式を満たす解が存在するか判定する．すべての制約式を満たす解が存在する場合は、展開図 p に関して次数 k の Uniform rep-octahedron が存在し、解が存在しないとき Uniform rep-octahedron は存在しない．

SCIP の実験環境を表 3.1 に示す．

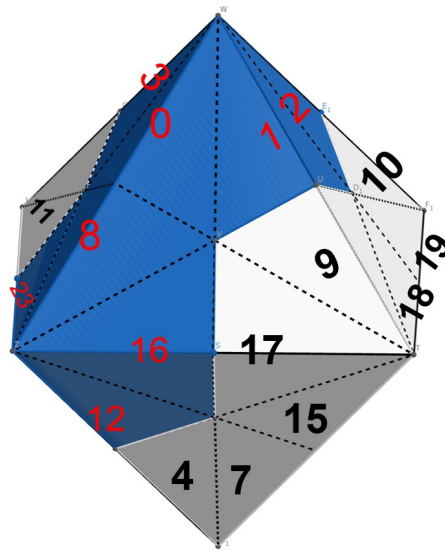


図 3.2: p を Q 上の $0,1,2,3,8,12,16,23$ を覆うように置いたとき

使用ツール	SCIP version 8.0.3
CPU	11th Gen Intel(R) Core(TM) i5-1135G7 @ 2.40GHz 2.42 GHz
RAM	8.00GB
OS	Windows 11 Education

表 3.1: SCIP の実行環境

3.2 次数 k の Uniform rep-octahedron の存在性

定理 8. 11 種類の正八面体の辺展開図それぞれに対して, それをもとにして次数 $k \leq 9$ と次数 16 の Uniform rep-octahedron を構成できるか否かまとめたものは, 表 3.2 に示す通りである.

3	○(図 2.1)	×	○	×	×	×
4	×	○	○	○	×	○
7	×	×	×	×	×	×
9	×	×	×	×	×	○(図 2.2)
12						○(図 2.1)
13						
16	×	×	×	×	×	○(図 2.2)

3	×	○	○	○	○
4	○(図 2.1)	○	○	○	○
7	×	×	×	×	×
9	×	×	○	○	×
12					
13					
16	×	×	×	○	×

表 3.2: Uniform rep-octahedron を構成できる辺展開図

観察 1. 次数 7 の Uniform rep-octahedron は存在しない.

図 3.3 を z 型の辺展開図とする. 表 3.2 から, $k \leq 9$ と $k = 16$ のとき, z 型 を使ってできる次数 k の Uniform rep-octahedron は存在しないと言える.

予想 1. z 型の辺展開図をもとにしてできる Uniform rep-octahedron は存在しない.

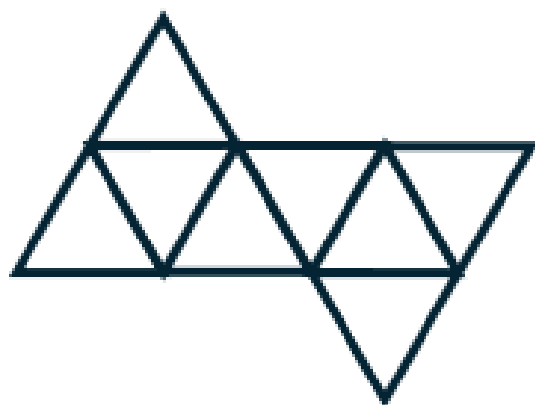


図 3.3: z 型の辺展開図

第4章 おわりに

本研究では、Rep-octahedron の概念を提唱して次の2点に焦点を当てた。1点目に、Rep-cube のもつ性質がどの程度 Rep-octahedron に拡張可能であるかを検証した。2点目に、立方体と正八面体の間にある双対関係が、Rep-cube と Rep-octahedron の性質にどのような影響を与えているかを探求した。結果として、次数 $k = 3, 4, 7, 9, 12, 16, 64$ の Regular Rep-octahedron の存在が確認できた。次に、Rep-octahedron について以下の性質が明らかになった。

- k が集合 $\{x \mid \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0, x = a^2 + b^2 + ab\} = \{1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, \dots\}$ に含まれないとき、辺展開図による次数 k の Regular rep-octahedron は存在しない。
- 非同型な Regular Rep-octahedron は無限に存在する。
 - 任意の正整数 i に対して、 $k = 64i^2$ のとき次数 k の Regular rep-octahedron が存在する。
- 次数7の Uniform rep-octahedron は存在しない。

上記に対応する Rep-cube の既知の結果は次の通り。

- 次数 k の Regular rep-cube が存在する必要条件是、 k が集合 $\{x \mid \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0, x = a^2 + b^2\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, \dots\}$ に含まれることである。
- 非同型な Regular(Uniform) rep-octahedron は無限に存在する。
 - 任意の正整数 i に対して、 $k = 18i^2$ のとき次数 k の Regular(Uniform) rep-cube が存在する。
- 次数8の Uniform rep-cube は11種類の立方体の辺展開図すべての場合で構成できる。

非同型な Regular rep-octahedron と、Regular rep-cube はどちらも無限に存在するが、Uniform rep-octahedron が無限に存在するかは未解決である。正八面体と立方体の間には双対関係があるが、Replicative net として着目すると本研究の範囲内では相互の関連性が見られなかった。

今後の課題は次のとおりである。

- Regular rep-octahedron が存在しない必要条件を，辺展開図に限定しないより一般的な場合を示す.
- z 型の辺展開図をもとにしてできる，Uniform rep-octahedron が存在しないことを示す.
- Uniform rep-octahedron が無限に存在するかどうかは未解決である.

また，一般の Replicative net についてもさらなる研究の課題が残っている．正十二面体および正二十面体に対してはどのような結果になるか未解明である．

第5章 謝辞

本研究は北陸先端科学技術大学院大学上原研究室で行われたものである。本研究を遂行する上で、上原隆平教授には様々なご指導、ご助言を頂きました。また、鎌田斗南助教、九州工業大学の塩田拓海氏には研究テーマの決定段階から論文作成まで様々なご助言を頂きました。谷口智子研究補助員をはじめとする、上原研究室の方々にはゼミでのご助言を頂きました。御礼を申し上げます。最後に、大学院進学に理解を示し、支援をしてくださった両親にこの場を借りて感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] Zachary Abel, Brad Ballinger, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Jeff Erickson, Adam Hesterberg, Hiro Ito, Irina Kostitsyna, Jayson Lynch and Ryuhei Uehara. “Unfolding and Dissection of Multiple Cubes, Tetrahedra, and Doubly Covered Squares” , Journal of Information Processing. Vol.25, pp 610-615, 2017
- [2] 上原隆平. “計算折り紙入門 – あたらしい計算幾何学の世界”, 近代科学社, 2018
- [3] Martin Gardner. “Hexaflexagons, Probability Paradoxes, and the Tower of Hanoi: Martin Gardner’s First Bool of Mathematical Puzzles and Games.” Cambridge, 2008
(邦訳) 岩沢宏和, 上原隆平. “ガードナーの数学パズル・ゲーム”, 日本評論社, 2017
- [4] マーティン・ガードナー, (邦訳) 岩沢宏和, 上原隆平. “ガードナーの予期せぬ絞首刑”, 日本評論社, 2017
- [5] Dawei Xu, Jinfeng Huang, Yuta Nakane, Tomoo Yokoyama, Takashi Horiyama and Ryuhei Uehara, “Rep-Cubes: Dissection of a Cube into Nets” IEICE TRANS. FUNDAMENTALS, VOL.E101–A, NO.9, pp 1420-1430, September 2018.
- [6] Tamami Okada and Ryuhei Uehara, “Research on Dissections of a Net of a Cube into Nets of Cubes” IEICE TRANS. INF. & SYST, VOL.E105–D, NO.3, pp 459-465, March 2022.
- [7] Liu Xiaoting, minor research at Uehara lab, December 2021.
- [8] 高村侑樹. “正四面体の展開図の分解について”, 第 24 回折り紙の科学・数学・教育, 2018 (<https://origami.jp/archives/OSME/1806.html>)
- [9] Burrtools (<https://burrtools.sourceforge.net/>)
- [10] Jin Akiyama, “Tile-makers and semi-tile-makers”, American Mathematical Monthly, Vol.114:7, pp 602-609, 2007.

- [11] SCIP (<https://www.scipopt.org/>)
- [12] Mutsunori Banbara, Kenji Hashimoto, Takashi Horiyama, Shin-ichi Minato, Kakeru Nakamura, Masaaki Nishino, Masahiko Sakai, Ryuhei Uehara ,Yushi Uno and Norihito Yasuda. “Solving Rep-tile by Computers: Performances of Solvers and Analyses of Solutions”, 第 119 回 人工知能基本問題研究会, pp 2-7, 2022