

Title	量子通信プロトコルの調査研究 [課題研究報告書]
Author(s)	中村, 太陽
Citation	
Issue Date	2026-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	<a href="https://hdl.handle.net/10119/20379">https://hdl.handle.net/10119/20379</a>
Rights	
Description	Supervisor:高木 翼, 先端科学技術研究科, 修士(情報科学)

課題研究報告書

量子通信プロトコルの調査研究

中村 太陽

主指導教員 高木 翼

北陸先端科学技術大学院大学  
先端科学技術研究科  
(情報科学)

令和8年3月

## 概要

本研究では、量子暗号や量子ネットワークを背景として発展してきた量子通信技術の中でも、特に多様な設計要素をもつ量子テレポーテーションおよびその拡張プロトコルに着目し、既存プロトコルを体系的に整理・比較することを目的とした調査研究を行った。既存の量子通信分野におけるサーベイ論文の多くは量子通信技術全体の概要や応用可能性に焦点を当てたものであり、具体的な通信プロトコルの構造や特徴に踏み込んだ議論は不十分である。特に量子テレポーテーション系に関しては、使用される量子ビット数や量子チャンネルの構造、測定基底の種類、さらには関与するエージェント数など、多様な構成要素をもつ数多くのプロトコルが提唱されている。しかし、これらの違いを体系的に整理・比較したサーベイ論文は未だ存在しない。このような状況は、研究者が既存の知見を俯瞰的に理解することや、新しいプロトコルを設計する際の参考情報を得ることを困難にしている。

そこで本研究では、既存の量子テレポーテーションおよびその拡張プロトコルを対象に、既存研究の体系的な収集と整理を行った。具体的には、量子テレポーテーションをはじめ、制御付き量子テレポーテーション、双方向量子テレポーテーション、非対称双方向量子テレポーテーション、循環型量子テレポーテーションなどのプロトコルを調査対象とし、通信形態、エージェント数、量子チャンネルの種類、量子チャンネルを構成する量子ビット数、測定基底の種類といった構成要素を抽出した。これらの情報を統一的な基準に基づいて整理することで、102件の量子テレポーテーションおよび量子テレポーテーション系のプロトコルからなるデータテーブルを構築した。

また、構築したデータテーブルを用いて、プロトコルの提唱年代ごとの推移や、エージェント数とプロトコル種類の関係、制御型プロトコルにおける制御者数の傾向、プロトコル種類と量子チャンネル構造の関係について分析を行った。さらに、循環型プロトコルに着目し、量子チャンネルとして用いられるクラスター状態の適用可能性や、リソース効率の観点からの検討を行った。

その結果、量子テレポーテーション研究においては、特定の通信形態や量子チャンネル構造に研究が集中している一方で、理論的には構成可能であるにもかかわらず、未だ詳細な検討が行われていない設計領域が存在することを明らかにした。本研究で構築したデータテーブルは、既存プロトコルを俯瞰的に理解するための基盤を提供するとともに、今後の量子テレポーテーションプロトコルの設計や理論的検討を進めるための指針として位置づける。

# 目次

<b>第1章</b>	<b>はじめに</b>	<b>3</b>
1.1	背景	3
1.2	目的	3
1.3	本論文の構成	3
<b>第2章</b>	<b>量子通信と量子テレポーテーションの基礎</b>	<b>4</b>
2.1	量子通信の基礎	4
2.1.1	量子ビット	4
2.1.2	状態ベクトル	4
2.1.3	測定	6
2.1.4	量子もつれ	7
2.1.5	量子回路	7
2.1.6	量子ゲート	8
2.2	量子テレポーテーション	10
2.2.1	量子テレポーテーションとは	10
2.2.2	量子テレポーテーションの通信手順	10
2.2.3	量子回路と簡易的な図を用いたプロトコルの流れ	12
2.2.4	プロトコルの説明	12
<b>第3章</b>	<b>量子通信サーベイ論文の動向</b>	<b>55</b>
3.1	既存の量子通信サーベイ論文の紹介	55
3.2	既存サーベイ論文の問題点	56
<b>第4章</b>	<b>データテーブル構築</b>	<b>57</b>
4.1	収集方法	57
4.2	選択項目	57
4.2.1	量子チャンネルの種類の説明	57
4.3	収集結果の分析	60
4.3.1	プロトコル種類の年代別提唱推移	60
4.3.2	エージェント数とプロトコル種類の関係	61
4.3.3	制御型プロトコルにおける制御者数の関係	62
4.3.4	プロトコル種類と量子チャンネルの関係	63
4.3.5	循環型プロトコルにおけるクラスター状態の適用可能性とリソース効率の 検討	64

---

第5章  まとめ	67
5.1  結論 . . . . .	67
5.2  展望 . . . . .	67
謝辞	68
参考文献	69

# 第1章 はじめに

## 1.1 背景

現在、量子通信は量子暗号や量子ネットワークといった分野を背景に活発に研究されており、量子通信全般の動向を整理したサーベイ論文も複数発表されている [1, 2, 3]. しかし、既存のサーベイ論文の多くは量子通信技術全体の概要や応用可能性に焦点を当てたものであり、具体的な通信プロトコルの構造や特徴に踏み込んだ議論は不十分である.

特に量子テレポーテーションに関しては、使用される量子ビット数や量子チャンネルの構造、測定基底の種類、さらには関与するエージェント数など、多様な構成要素をもつ数多くのプロトコルが提唱されている. しかし、これらの違いを体系的に整理・比較したサーベイ論文は未だ存在しない. このような状況は、研究者が既存の知見を俯瞰的に理解することや、新しいプロトコルを設計する際の参考情報を得ることを困難にしている.

したがって、量子テレポーテーションに特化して既存のプロトコルを収集・整理し、体系的に比較可能な形で全体像を明示することは、学術的にも実用的にも大きな意義をもつ.

## 1.2 目的

本研究の目的は、既存の量子テレポーテーションおよびその拡張プロトコルを対象に、構成要素の観点から体系的な整理を行い、統一的な分類基準に基づくデータテーブルを構築することによって、現時点におけるプロトコル設計の全体像を把握することにある. 具体的には、各プロトコルの通信形態と採用されている量子チャンネルの種類、およびそれらのリソース効率の関係性を定量的に分析する. この分析を通じて、特定の条件下で実装の可能性が示唆されながらも、未だ詳細な検討が行われていない未開拓領域を特定することを目指す.

## 1.3 本論文の構成

本論文の構成は以下のとおりである. 第2章では、量子ビット、量子もつれ、量子ゲート等の量子通信の基礎概念を整理し、標準的な量子テレポーテーションの通信手順と代表的な拡張プロトコルについて解説する. 第3章では、量子通信および量子テレポーテーションに関するサーベイ論文の動向を整理し、量子テレポーテーション系プロトコルを構造や設計要素の観点から整理・比較する枠組みが十分に示されていない点を明らかにする. 第4章では、102件のプロトコルを体系的に収集したデータテーブルの作成プロセスを述べる. 続く分析では、時系列的な変遷やリソース効率といった多角的な観点から、既存のプロトコル設計における動向を把握し、理論的には定義可能であるものの、詳細な検討がなされていない未開拓領域を特定する.

## 第2章 量子通信と量子テレポーテーションの基礎

本章では、本研究の基礎となる量子通信および量子テレポーテーションの基本概念について述べる。なお、2.1.1 節から 2.2.1 節までの内容は、主に参考文献 [4, 5, 6] を参考にして構成している。

### 2.1 量子通信の基礎

#### 2.1.1 量子ビット

ビット (bit) は古典計算機と古典情報の基本概念であり、本研究ではこれを古典ビットとよぶ。一方、量子計算および量子情報理論は、これに対応する概念である量子ビット (quantum bit, qubit) を基盤として構築される。

古典情報の最小単位である古典ビットが 0 と 1 のいずれか一方の状態のみを表現できるのに対し、量子情報の最小単位である量子ビットは、0 と 1 が同時に存在する重ね合わせ状態 (superposition state) をとることができる。しかし、量子状態に対して測定を行うことで古典的な情報に崩壊してしまい、1 量子ビットからは 1 古典ビットの情報しか取り出すことができず、その際に量子状態は破壊されてしまう。また、量子状態には、古典情報と異なり、任意の状態の複製を作ることができないという性質がある。

#### 2.1.2 状態ベクトル

##### ケットベクトル

量子状態はベクトルで表現でき、その記法として 1939 年に Paul Dirac が発明した Dirac 記法 (Dirac notation) が使用される。Dirac 記法では、ケット (ket) を用いて、 $|\psi\rangle$  と表すことができる。このベクトルをケットベクトル (ket vector) とよぶ。 $n+1$  次元の複素ベクトル空間を  $\mathbb{C}^{n+1}$  と表すとき、 $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^{n+1}$  は  $z_i \in \mathbb{C}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) を成分とする列ベクトルとして以下のように記述される。ただし、 $\mathbb{C}$  は複素数全体を表す。

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

##### ブラベクトル

ベクトル  $|\psi\rangle$  に対して、共役転置を行ったベクトルをブラ (bra) を用いて、 $\langle\psi|$  と表す。このベクトルをブラベクトル (bra vector) とよぶ。複素数  $z = x + iy$  の複素共役を  $z^* = x - iy$  とする。

つまり,

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

のとき,

$$\langle\psi| = (z_0^*, \dots, z_n^*) \text{ とする.}$$

例えば,  $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 2 \end{pmatrix}$  の場合,  $\langle\psi| = (1-2i, 2)$  となる.

### 内積

ベクトル  $|\psi\rangle$  と  $|\phi\rangle$  の次元が同じであるとき, 行列の積  $\langle\phi| |\psi\rangle$  を  $|\psi\rangle$  と  $|\phi\rangle$  の内積とよぶ. なお, 以降では  $\langle\phi| |\psi\rangle$  は  $\langle\phi|\psi\rangle$  と表記する.

例えば,  $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 2-i \end{pmatrix}$  の場合,

$$\begin{aligned} \langle\phi|\psi\rangle &= (3, 2+i) \begin{pmatrix} 1+2i \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 3(1+2i) + (2+i) \cdot 2 \\ &= 7+8i \end{aligned}$$

となる.

量子ビットの状態は  $\mathbb{C}^2$  の単位ベクトルによって表現される. 特に, 古典ビット「0」, 「1」に対応する  $|0\rangle$  と  $|1\rangle$  をそれぞれ以下の単位ベクトルとする.

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

量子情報科学では, 量子ビットの状態は状態ベクトルとよばれる次のような線形結合で表記される.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

ここで,  $\alpha, \beta$  はそれぞれ  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  を満たす複素数とする.

### Bloch ベクトル

量子状態の幾何学的な表現として Bloch ベクトルがある. この幾何学的構造を表した Bloch 球を図 2.1 に示す.

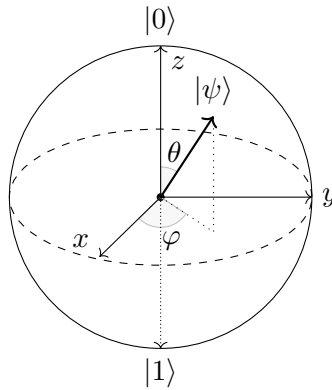


図 2.1: ブロッホ球

図 2.1 に示すように、3次元単位球における  $z$  軸との角度を  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ )、 $x$ - $y$  平面において  $x$  軸から測った角度を  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) とする。これらの実数パラメータを用いると、量子状態  $|\psi\rangle$  は以下の式のように表せる。

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle.$$

したがって、任意の量子状態  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$  と 3次元単位球面上の実ベクトル  $(\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$  は一対一に対応する。

### 合成系

複数の量子ビットからなる系の記述方法としてテンソル積を用いる。例として 2 量子ビット系の場合、2つの量子ビット系の状態が以下の状態を考える。

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad |\phi\rangle = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

このとき、合成系の状態は次式のように表せる。

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \begin{pmatrix} a_0 b_0 \\ a_0 b_1 \\ a_1 b_0 \\ a_1 b_1 \end{pmatrix}.$$

なお、 $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$  は  $|\psi\rangle |\phi\rangle$ ,  $|\psi\phi\rangle$  と表記することもある。

### 2.1.3 測定

量子状態から古典的な情報を得るためには測定を行う必要がある。代表的な手法として基底測定 (basis measurement) がある。基底測定は、 $\mathbb{C}^2$  の正規直交基底によって定義され、各基底に対応する測定値が確率的に得られる。以下に量子計算において一般的に用いられる Z 基底と X 基底を示す。

Z 基底:  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ .

X 基底:  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , ただし  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  かつ  $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$  とする.

任意の量子状態  $|\psi\rangle$  に対して, 正規直交基底  $(|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle)$  による基底測定を行った際, 測定値  $(i = 0, 1)$  を得る確率  $\text{Pr}(i)$  は次式で与えられる.

$$\text{Pr}(i) = |\langle\phi_i|\psi\rangle|^2.$$

例として, 量子状態  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  を Z 基底で測定する場合を考える. このとき,  $|\langle 0|\psi\rangle|^2 = |\alpha|^2$  の確率で  $|0\rangle$  が,  $|\langle 1|\psi\rangle|^2 = |\beta|^2$  の確率で  $|1\rangle$  が得られる.

#### 2.1.4 量子もつれ

量子もつれは, 2 つ以上の量子系が距離に関係なく, 古典物理学では考えられない強い相関をもつことで知られている [7]. 例えば, 以下のような  $A$  と  $B$  の量子ビットの量子もつれ状態を考える.

$$|\psi\rangle_{A,B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)_{A,B}.$$

この状態に対し,  $A$  と  $B$  それぞれの量子ビットに対し,  $|0\rangle$  か  $|1\rangle$  を決定する測定を行う. もし  $A$  の測定結果が  $|0\rangle$  であった場合, 量子状態  $|\psi\rangle_{A,B}$  は即座に  $|00\rangle_{A,B}$  へ崩壊するため,  $B$  の測定結果も必ず  $|0\rangle$  になる. この相関関係は量子ビット  $A$  と  $B$  の距離がどれだけ離れていても成立する. このような 2 量子ビット間における強い相関をもつ以下の 4 種類の状態は, Bell 状態とよび, この 4 種類  $\{|\phi^\pm\rangle, |\psi^\pm\rangle\}$  をまとめて Bell 基底とよぶ.

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

また, 3 個以上の量子が相関を持っている状態の代表例として, GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger) 状態がある.  $n$  個 (ただし,  $n \geq 3$ ) の量子ビットからなる GHZ 状態は, 以下のように記述される.

$$|n\text{GHZ}^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1 0_2 \dots 0_n\rangle \pm |1_1 1_2 \dots 1_n\rangle).$$

#### 2.1.5 量子回路

量子計算における演算プロセスは, 量子回路 (quantum circuit) とよばれるモデルを用いて記述される. 量子回路における各線 (ワイヤ) は, 個々の量子状態の推移を表している. 図 2.2 に示すように, 図の左端は初期状態を示し, 右側へ向かうにつれて回路による計算が進んでいく.

量子回路の構成には古典的な論理回路と異なるいくつかの制約が存在する．まず，量子回路はフィードバックを許容しない非巡回的な構造である必要がある．また，古典回路では一つのワイヤの信号を分岐させて二つのワイヤに送るファンアウト (FANOUT) 操作が行われるが，量子回路は量子力学における未知の量子状態は複製できない複製不能定理 [8] により禁止されている．量子回路における演算の全体像は，ワイヤに沿って時間発展する量子状態に対し，任意のタイミングで量子ゲートを適用し，最終的な状態を測定によって取り出す流れとして表現される．ここで，ワイヤ上の量子状態に特定の操作を加える役割を担うのが量子ゲートである．

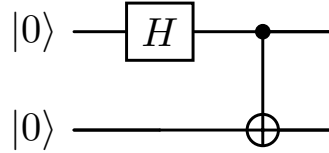


図 2.2: 量子回路の例

### 2.1.6 量子ゲート

古典コンピュータがビットに対して古典ゲート (AND ゲート, NOT ゲート等) を適用して演算を行うのと同様に，量子コンピュータでは量子ビットに対して量子ゲートを適用することで演算を行う．なお，量子状態  $|\psi\rangle$  に量子ゲート  $U$  を適用した変換後の状態  $U|\psi\rangle$  において，

$$|\langle\psi|\psi\rangle|^2 = 1 = |\langle\psi|U^\dagger U|\psi\rangle|^2.$$

が成り立つ必要がある．これは量子ゲート  $U$  が  $U^\dagger U = I$  を満たすユニタリ行列であることを意味する (ここで， $U^\dagger$  は  $U$  の随伴行列， $I$  は単位行列である)．

ユニタリ行列は常に可逆であり，ユニタリ変換は任意の初期状態  $|\psi\rangle$  に対して変換後の状態  $U|\psi\rangle$  を一意に決定するため，操作自体は決定的である．

次に，1 量子ビットに対する量子ゲートについて説明する．よく使われる 1 量子ゲートとして，Pauli ゲート ( $X, Y, Z$ )，Hadamard ゲート  $H$  があり，以下のように表される．

$$I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$H = |+\rangle\langle 0| + |-\rangle\langle 1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ここで，

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

である.

Pauli ゲート  $X$  は  $|0\rangle, |1\rangle$  に適用すると,

$$X|0\rangle = |1\rangle\langle 0|0\rangle + |0\rangle\langle 1|0\rangle = |1\rangle,$$

$$X|1\rangle = |1\rangle\langle 0|1\rangle + |0\rangle\langle 1|1\rangle = |0\rangle.$$

となるので, ビット反転 (bit flip) の操作を行っていることがわかる.

Pauli ゲート  $Z$  は  $|0\rangle, |1\rangle$  に適用すると,

$$Z|0\rangle = |0\rangle\langle 0|0\rangle - |1\rangle\langle 1|0\rangle = |0\rangle,$$

$$Z|1\rangle = |0\rangle\langle 0|1\rangle - |1\rangle\langle 1|1\rangle = -|1\rangle.$$

となるので, 位相反転 (phase flip) の操作を行っていることがわかる.

Hadamard ゲート  $H$  は  $|0\rangle, |1\rangle$  に適用すると,

$$H|0\rangle = (|+\rangle\langle 0| + |-\rangle\langle 1|)|0\rangle = |+\rangle\langle 0|0\rangle + |-\rangle\langle 1|0\rangle = |+\rangle,$$

$$H|1\rangle = (|+\rangle\langle 0| + |-\rangle\langle 1|)|1\rangle = |+\rangle\langle 0|1\rangle + |-\rangle\langle 1|1\rangle = |-\rangle.$$

となるので, 1 量子ビットを重ね合わせ状態に変える操作を行っていることがわかる.

また, 量子ゲートを連続して 2 度適用させると元に戻る.

$$X^2 = Z^2 = H^2 = I.$$

次に, 2 量子ビットに対する量子ゲートについて説明する. よく使われる 2 量子ゲートとして, 制御 NOT ゲート (CNOT ゲート) と制御位相ゲート (CZ ゲート) がある. CNOT ゲートと CZ ゲートでは, 2 個の量子ビットを用意し, 一方を制御量子ビット, もう一方を標的量子ビットとする.

**CNOT ゲート** CNOT ゲートでは, 制御量子ビットが  $|1\rangle$  の場合のみ, 標的量子ビットを反転させる 2 入力 2 出力ゲートであり, 次式のように定義できる.

$$\text{CNOT} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X.$$

各計算基底に対する作用は以下の通りである.

$$\text{CNOT}|00\rangle = |00\rangle, \quad \text{CNOT}|01\rangle = |01\rangle,$$

$$\text{CNOT}|10\rangle = |11\rangle, \quad \text{CNOT}|11\rangle = |10\rangle.$$

CNOT ゲートの量子回路は図 2.3 のように描ける.

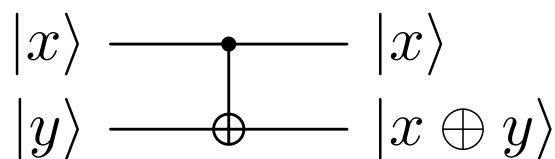


図 2.3: CNOT ゲートの量子回路

**CZ ゲート** CZゲートは制御量子ビットが  $|1\rangle$  の場合のみ、標的量子ビットに  $Z$  を適用させる 2 入力 2 出力ゲートであり、次式のように定義できる。

$$CZ = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes Z.$$

各計算基底に対する作用は以下の通りである。

$$\begin{aligned} CZ |00\rangle &= |00\rangle, & CZ |01\rangle &= |01\rangle, \\ CZ |10\rangle &= |10\rangle, & CZ |11\rangle &= -|11\rangle. \end{aligned}$$

CZ ゲートの量子回路は図 2.4 のように描ける。

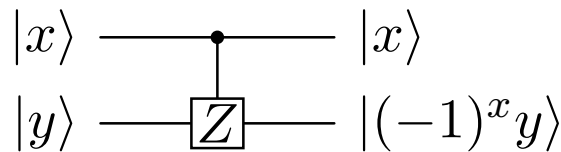


図 2.4: CZ ゲートの量子回路

## 2.2 量子テレポーテーション

### 2.2.1 量子テレポーテーションとは

量子テレポーテーション (quantum teleportation) は 1993 年に Bennett らによって初めて提唱され [9], 未知の量子状態を, 古典通信と量子もつれを組み合わせる, ある場所から別の場所へ転送可能であることを示した。以降, この概念は多様な形で拡張され, 数多くのプロトコルが提唱されているが, 量子テレポーテーションの基本的な手順は共通している。

量子状態は観測の瞬間に崩壊し, 元の状態が失われてしまうため, 量子状態を直接転送することはできない。そこで, 量子テレポーテーションでは以下のような手順によって状態の転送が実現される。まず, 転送対象となる量子ビットと, 事前に共有された量子もつれ状態の一方との間で測定を行う。この測定により, 2つの量子状態は破壊されるが, 量子もつれ状態のもう一方の量子ビットには, 転送対象の量子状態に対応する情報が間接的に移される。その後, 測定結果に基づいてユニタリ変換操作を施すことで, 受信側の量子ビットは元の量子状態と等価な状態に変換される。

この一連の過程により, 送信側の量子状態は破壊される一方で, 受信側に完全に同一の量子状態が再現される。この操作が, 量子テレポーテーションである。

### 2.2.2 量子テレポーテーションの通信手順

本節では, Bennett ら [9] によって提唱された量子テレポーテーションの通信手順について述べる。このプロトコルは, 送信者 Alice と受信者 Bob の 2 者間で, 1 量子ビットの未知の量子状態を転送する手法である。両者は事前に Bell 状態の量子もつれを共有しており, Alice の測定と古典通信, Bob の補正操作によって, 未知の量子状態を Bob による再現が可能である。この手法は, あらゆる量子テレポーテーションの基礎となるものであり, 後に示す多者型・制御型プロトコルの基となる。以下にプロトコルの詳細手順を示す。

## ステップ 1: 前準備

送信者 Alice は未知の量子状態  $|\psi_a\rangle_A$  を所有する。このとき、転送対象となる未知の量子状態を次式で表す。

$$|\psi_a\rangle_A = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle.$$

ただし、 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  かつ  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  とする。

Alice と Bob は次式で与えられる 2 量子ビットの量子もつれ状態 (Bell 状態) を量子チャンネルとして共有する。

$$|\phi^+\rangle_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)_{1,2}.$$

ここで、量子ビット  $A$  は Alice が所有する未知状態、量子ビット 1 は Alice 側の Bell 状態、量子ビット 2 は Bob 側の Bell 状態を表す。したがって、3 量子ビット全体の初期状態は次のように書ける。

$$|\psi\rangle_{A,1,2} = |\psi_a\rangle_A |\phi^+\rangle_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |000\rangle + \alpha |011\rangle + \beta |100\rangle + \beta |111\rangle)_{A,1,2}.$$

## ステップ 2: 送信者による操作

Alice は量子ビット  $A, 1$  に対して操作を行う。まず、量子ビット  $A$  に Hadamard ゲート  $H$  を、量子ビット 1 を制御量子ビット、量子ビット 2 を標的量子ビットとして CNOT ゲートを適用する。これにより、状態は以下のように変換される。

$$|\psi\rangle_{A,1,2} = \frac{1}{2} \left[ |00\rangle_{A,1} (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)_3 + |01\rangle_{A,1} (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)_3 \right. \\ \left. + |10\rangle_{A,1} (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)_3 + |11\rangle_{A,1} (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)_3 \right].$$

## ステップ 3: 送信者による測定

Alice は量子ビット  $A, 1$  を Bell 基底で測定する。測定結果は 4 通り  $\{|\phi^\pm\rangle, |\psi^\pm\rangle\}$  のいずれかであり、その結果に応じて Bob の手元に残る量子ビット 3 の状態が変化する。

## ステップ 4: 古典通信と受信者の補正操作

Alice は測定結果に対応する 2 量子ビットの古典情報  $(i, j)$  を Bob に送信する。Bob は受信した情報に基づき、対応する量子ゲート  $U_{ij}$  を自身の量子ビットに適用する。この補正操作は  $i, j \in \{0, 1\}$  に対して、 $U_{ij} = X^i Z^j$  として定義される。

この操作を施すことで、Bob の量子ビットは未知状態  $|\psi_a\rangle_A$  と完全に一致する。したがって、量子状態の物理的移動を伴わずに、情報としての量子状態が Alice から Bob へ転送されることになる。

### 2.2.3 量子回路と簡易的な図を用いたプロトコルの流れ

Alice は未知状態を含む 2 量子ビットに対して CNOT および Hadamard ゲートを適用し、その後測定を行う。測定結果は古典通信路を介して Bob に送られ、Bob は対応する補正操作を行うことで、最終的に  $|\psi_a\rangle_A$  を再現する。図 2.5 に標準的な量子テレポーテーションの量子回路を示し、図 2.6 に量子テレポーテーションの概念図を示す。

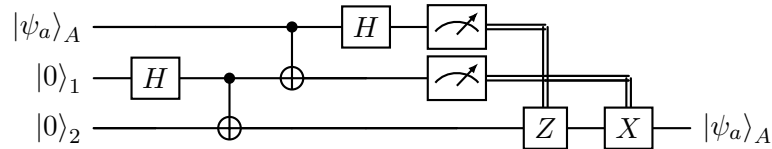


図 2.5: 標準的な量子テレポーテーションの量子回路

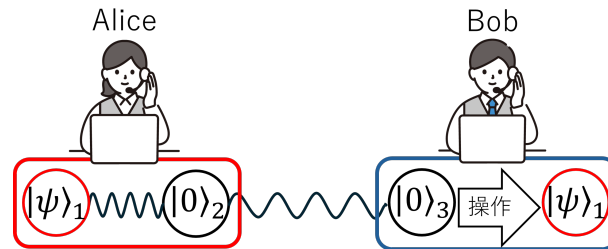


図 2.6: 標準的な量子テレポーテーションの概念図

### 2.2.4 プロトコルの説明

#### Controlled Quantum Teleportation (CQT)

制御付き量子テレポーテーション (Controlled Quantum Teleportation, CQT) は、1998 年、Karlsson と Bourennane [10] によって提唱されたものである。本プロトコルは、送信者と受信者に加えて、転送過程を制御する第 3 者（制御者）を導入する点に特徴がある。受信者が量子状態を完全に復元するためには制御者の協力、すなわち制御者による測定結果の共有が必要になる。以下に、CQT の例として 3 量子ビットの GHZ 状態を用いた通信手順を示す。

#### ステップ 1: 前準備

通信の参加者として、Alice を送信者、Bob を受信者、Charlie を制御者とする。Alice は転送対象となる未知の量子状態  $|\psi_a\rangle_A$  を所有する。このとき、転送対象となる未知の量子状態を次式で表す。

$$|\psi_a\rangle_A = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle.$$

ただし、 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  かつ  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  とする。

通信の参加者である 3 者 (Alice, Bob, Charlie) はあらかじめ 3 量子ビットのもつれ状態 (GHZ 状態) を量子チャンネルとして共有する。ここで、量子ビット 1 は Alice が、量子ビット 2 は Bob

が、量子ビット 3 は Charlie が所有している。

$$|3\text{GHZ}_1^+\rangle_{1,2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)_{1,2,3}.$$

システム全体 (4 量子ビット) の初期状態は次式で表される。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{A,1,2,3} &= |\psi\rangle_A |3\text{GHZ}_1^+\rangle_{1,2,3} \\ &= \frac{1}{2} \left[ |\phi^+\rangle_{A,1} (\alpha |00\rangle + \beta |11\rangle)_{2,3} + |\phi^-\rangle_{A,1} (\alpha |00\rangle - \beta |11\rangle)_{2,3} \right. \\ &\quad \left. + |\psi^+\rangle_{A,1} (\alpha |11\rangle + \beta |00\rangle)_{2,3} + |\psi^-\rangle_{A,1} (\alpha |11\rangle - \beta |00\rangle)_{2,3} \right]. \end{aligned}$$

### ステップ 2 : 送信者と制御者による測定

Alice は自身が所有する量子ビット  $A, 1$  に対して Bell 基底測定を行う。Alice は得られた測定結果を古典通信を介して Bob に送信する。この測定により、Alice は Bell 状態  $\{|\phi^\pm\rangle, |\psi^\pm\rangle\}$  のうちいずれか一つの結果を等確率で得る。

Alice が測定を行い結果を得ると、Bob と Charlie の持つ量子ビット 2, 3 はそれに対応する状態へ崩壊する。例として、Alice が  $|\phi^+\rangle$  の測定結果を得た場合、量子ビット 2, 3 の状態は次のように崩壊する。

$$|\psi\rangle_{2,3} = {}_{A,1}\langle\phi^+|\psi\rangle_{A,1,2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)_2 |+\rangle_3 (\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle)_2 |-\rangle_3].$$

ただし、

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$$

とする。

### ステップ 3 : 制御者による測定

制御者 Charlie は、自身が所有する量子ビット 3 に対して  $X$  基底で測定を行う。例として Alice の測定結果が  $|\phi^+\rangle$  であり、Charlie が  $|+\rangle$  の測定結果を得た場合、量子ビット 2 の状態は次のように崩壊する。

$$|\psi\rangle_2 = {}_3\langle+|_{A,1}\langle\phi^+|\psi\rangle_{A,1,2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)_2.$$

Charlie は得られた測定結果を古典情報として受信者 Bob に送信する。

### ステップ 4 : 古典通信と補正操作

受信者 Bob は、Alice と Charlie から送信された測定結果をもとに自身の量子ビット 2 に対して適切なユニタリ操作を行う。測定結果に対応するユニタリ操作を以下の表 2.1 に示す。これにより Bob の量子ビット 2 は Alice が所有していた未知の量子状態  $|\psi_a\rangle_A$  と一致し、量子状態のテレポーテーションが完了する。

表 2.1: Alice と Bob の測定結果に対するユニタリ操作

Alice の結果	Charlie の結果	ユニタリ操作
$ \phi^+\rangle$	$ +\rangle$	$I^2$
$ \phi^+\rangle$	$ -\rangle$	$Z^2$
$ \phi^-\rangle$	$ +\rangle$	$Z^2$
$ \phi^-\rangle$	$ -\rangle$	$I^2$
$ \psi^+\rangle$	$ +\rangle$	$X^2$
$ \psi^+\rangle$	$ -\rangle$	$X^2 Z^2$
$ \psi^-\rangle$	$ +\rangle$	$X^2 Z^2$
$ \psi^-\rangle$	$ -\rangle$	$X^2$

## CQT 量子回路

先ほどの CQT プロトコルの例を量子回路で表すと以下のような図 2.7 になる。

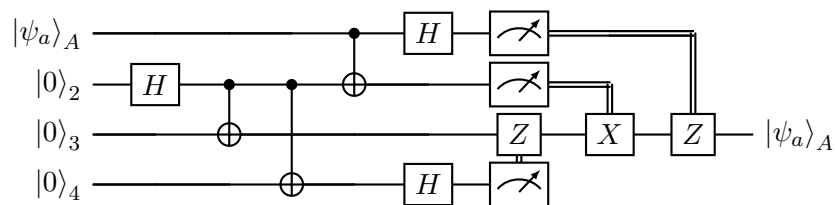


図 2.7: CQT の量子回路

## Bidirectional Quantum Teleportation (BQT)

双方向量子テレポーテーション (Bidirectional Quantum Teleportation, BQT) は、送信者 Alice と受信者 Bob が同時に互いの未知の量子状態を転送することを可能にするプロトコルである。本節では、Fu ら [11] によって提唱された 4 量子ビット量子もつれ状態を量子チャンネルとして用いた BQT の通信手順を示す。

### ステップ 1 : 前準備

通信の参加者として、Alice と Bob をおく。Alice は未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_a\rangle_A$  を所有し、Bob は未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_b\rangle_B$  を所有している。このとき、転送対象となる未知の量子状態を次式で表す。

$$|\psi_a\rangle_A = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle, \quad |\psi_b\rangle_B = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle.$$

ただし、 $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{C}$  かつ  $|a_0|^2 + |a_1|^2 = |b_0|^2 + |b_1|^2 = 1$  とする。

通信の参加者である両者 (Alice, Bob) はあらかじめ 4 量子ビットの量子もつれ状態を量子チャンネルとして共有する。ここで、量子ビット 1, 4 は Alice が、量子ビット 2, 3 は Bob が所有する。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{1,2,3,4} &= \frac{1}{4}(|0000\rangle + |0100\rangle + |1000\rangle + |1100\rangle + |0001\rangle - |0101\rangle + |1001\rangle - |1101\rangle \\ &\quad + |0010\rangle + |0110\rangle - |1010\rangle - |1110\rangle + |0011\rangle - |0111\rangle - |1011\rangle + |1111\rangle)_{1,2,3,4}. \end{aligned}$$

システム全体 (6 量子ビット) の初期状態は次式で表される。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{A,B,1,2,3,4} &= |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B |\psi\rangle_{1,2,3,4} \\ &= \frac{1}{4}(a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle)_A (b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle)_B \\ &\quad \otimes (|0000\rangle + |0100\rangle + |1000\rangle + |1100\rangle + |0001\rangle - |0101\rangle + |1001\rangle - |1101\rangle \\ &\quad + |0010\rangle + |0110\rangle - |1010\rangle - |1110\rangle + |0011\rangle - |0111\rangle - |1011\rangle + |1111\rangle)_{1,2,3,4}. \end{aligned}$$

### ステップ 2 : 送信者と受信者による測定

Alice と Bob は自身が保有する量子ビット  $A, 1$  および量子ビット  $B, 2$  に対して Bell 基底測定を行う。この測定により、Alice と Bob は Bell 状態  $\{|\phi^\pm\rangle, |\psi^\pm\rangle\}$  のうちいずれか一つの結果を等確率で得る。

Alice と Bob が測定を行い結果を得ると、残りの量子ビット 3, 4 はそれに対応する状態へ崩壊する。例として、Alice の測定結果が  $|\phi^+\rangle$ 、Bob の測定結果が  $|\phi^+\rangle$  であった場合、量子ビット 3, 4 は次のように崩壊する。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{3,4} &= {}_{A,1}\langle\phi^+| {}_{B,2}\langle\phi^+|\psi\rangle_{A,B,1,2,3,4} \\ &= \frac{1}{4}(a_0 b_0 |00\rangle + a_1 b_0 |01\rangle + a_0 b_1 |10\rangle + a_1 b_1 |11\rangle)_{3,4} \\ &= \frac{1}{4}(a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle)_3 (b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle)_4. \end{aligned}$$

ステップ 3: 古典通信と補正操作

Alice と Bob はそれぞれの測定結果を，古典通信を介して互いに送信する．Alice と Bob は互いから送信された測定結果に基づき，自身が所有する量子ビット 3, 4 に対して適切なユニタリ操作を行う．測定結果に対応するユニタリ操作を以下の表 2.2 に示す．これにより，Alice と Bob の手元には相手が所有していた未知の量子状態がそれぞれ再現され，双方向量子テレポーテーションが完了する．

表 2.2: Alice と Bob の測定結果に対するユニタリ操作

Alice の結果	Bob の結果	ユニタリ操作
$ \phi^+\rangle$	$ \phi^+\rangle$	$I^3 \otimes I^4$
$ \phi^+\rangle$	$ \phi^-\rangle$	$I^3 \otimes Z^4$
$ \phi^+\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$I^3 \otimes X^4$
$ \phi^+\rangle$	$ \psi^-\rangle$	$I^3 \otimes iY^4$
$ \phi^-\rangle$	$ \phi^+\rangle$	$Z^3 \otimes I^4$
$ \phi^-\rangle$	$ \phi^-\rangle$	$Z^3 \otimes Z^4$
$ \phi^-\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$Z^3 \otimes X^4$
$ \phi^-\rangle$	$ \psi^-\rangle$	$Z^3 \otimes iY^4$
$ \psi^+\rangle$	$ \phi^+\rangle$	$X^3 \otimes I^4$
$ \psi^+\rangle$	$ \phi^-\rangle$	$X^3 \otimes Z^4$
$ \psi^+\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$X^3 \otimes X^4$
$ \psi^+\rangle$	$ \psi^-\rangle$	$X^3 \otimes iY^4$
$ \psi^-\rangle$	$ \phi^+\rangle$	$iY^3 \otimes I^4$
$ \psi^-\rangle$	$ \phi^-\rangle$	$iY^3 \otimes Z^4$
$ \psi^-\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$iY^3 \otimes X^4$
$ \psi^-\rangle$	$ \psi^-\rangle$	$iY^3 \otimes iY^4$

BQT 量子回路

先ほどの BQT プロトコルの例を量子回路で表すと以下のような図 2.8 になる．

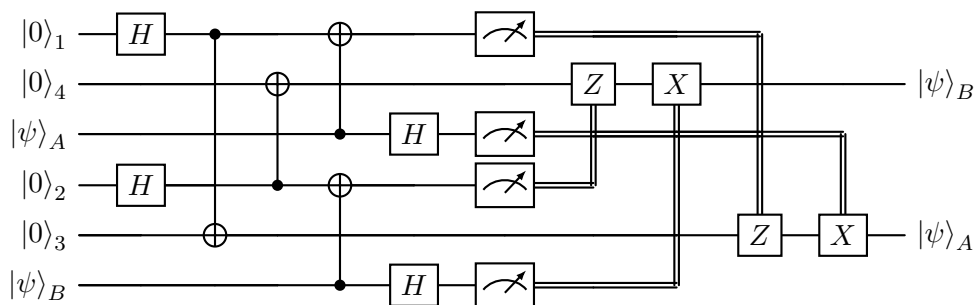


図 2.8: BQT の量子回路

## Asymmetric Bidirectional Quantum Teleportation (ABQT)

非対称双方向量子テレポーテーション (Asymmetric Bidirectional Quantum Teleportation, ABQT) は送信者 Alice と受信者 Bob が互いに異なる量子ビット数の未知状態を同時に転送することを可能にするプロトコルである。本節では, Wang と Li [12] によって提唱された 5 量子ビットクラスター状態を量子チャンネルとして用いた ABQT の通信手順を示す。

### ステップ 1: 前準備

通信の参加者として, Alice と Bob をおく。Alice は未知の 2 量子ビット状態  $|\psi_a\rangle_{AB}$  を所有し, Bob は未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_b\rangle_C$  を所有している。このとき, 転送対象となる未知の量子状態を次式で表す。

$$|\psi_a\rangle_{AB} = a_0 |00\rangle + a_1 |11\rangle, \quad |\psi_b\rangle_C = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle.$$

ただし,  $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{C}$  かつ  $|a_0|^2 + |a_1|^2 = |b_0|^2 + |b_1|^2 = 1$  とする。

通信の参加者である両者 (Alice, Bob) はあらかじめ 5 量子ビットクラスター状態を量子チャンネルとして共有する。ここで, 量子ビット 1, 5 は Alice が, 量子ビット 2, 3, 4 は Bob が所有する。

$$|\psi\rangle_{1,2,3,4,5} = \frac{1}{2}(|00000\rangle + |00111\rangle + |11101\rangle + |11010\rangle)_{1,2,3,4,5}.$$

システム全体 (8 量子ビット) の初期状態は次式で表される。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{A,B,C,1,2,3,4,5} &= |\psi_a\rangle_{A,B} |\psi_b\rangle_C |\psi\rangle_{1,2,3,4,5} \\ &= (a_0 |00\rangle + a_1 |11\rangle)_{AB} (b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle)_C \\ &\quad \otimes \frac{1}{2}(|00000\rangle + |00111\rangle + |11101\rangle + |11010\rangle)_{1,2,3,4,5}. \end{aligned}$$

### ステップ 2: 送信者と受信者による測定

Alice は自身が所有する量子ビット  $A, B, 1$  に対して GHZ 基底で測定を行い, Bob は自身が所有する量子ビット  $C, 4$  に対して Bell 基底  $\{|\phi^\pm\rangle, |\psi^\pm\rangle\}$  で測定を行う。測定に用いられる GHZ 基底は次式で与えられる。

GHZ 基底:

$$|3\text{GHZ}_1^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle \pm |111\rangle), \quad |3\text{GHZ}_2^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|001\rangle \pm |110\rangle).$$

Alice と Bob が測定を行い結果を得ると, 残りの量子ビット 2, 3, 5 はそれに対応する状態へ崩壊する。例として, Alice の測定結果が  $|3\text{GHZ}_1^+\rangle$ , Bob の測定結果が  $|\phi^+\rangle$  であった場合, 量子ビット 2, 3, 5 の状態は次のように崩壊する。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{2,3,5} &= {}_{A,B,1}\langle 3\text{GHZ}_1^+ |_{C,4} \langle \phi^+ | \psi \rangle_{A,B,1,2,3,4} \\ &= (a_0 b_0 |000\rangle + a_0 b_1 |001\rangle + a_1 b_0 |110\rangle + a_1 b_1 |111\rangle)_{2,3,5} \\ &= (a_0 |00\rangle + a_1 |11\rangle)_{23} (b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle)_5. \end{aligned}$$

ステップ 3: 古典通信と補正操作

Alice と Bob はそれぞれの測定結果を, 古典通信を介して互いに送信する. Bob は受け取った情報に基づき, 自身が所有する量子ビット 2, 3 に対して, Alice は自身が所有する量子ビット 5 に対して適切なユニタリ補正操作を行う. 測定結果に対応するユニタリ操作を表 2.3 に示す. これにより, Bob の量子ビット 2, 3 は Alice が所有していた未知の 2 量子ビット状態  $|\psi_a\rangle_{A,B}$  と一致し, Alice の量子ビット 5 は Bob が所有していた 1 量子ビット状態  $|\psi_b\rangle_C$  と一致する. したがって, ABQT が完了する.

表 2.3: Alice および Bob の測定結果に対するユニタリ操作

Alice の結果	Bob の結果	ユニタリ操作
$ 3GHZ_1^+\rangle$	$ \phi^+\rangle$	$I^2 \otimes I^3 \otimes I^5$
$ 3GHZ_1^+\rangle$	$ \phi^-\rangle$	$I^2 \otimes I^3 \otimes Z^5$
$ 3GHZ_1^+\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$I^2 \otimes I^3 \otimes X^5$
$ 3GHZ_1^+\rangle$	$ \psi^-\rangle$	$I^2 \otimes I^3 \otimes iY^5$
$ 3GHZ_1^-\rangle$	$ \phi^+\rangle$	$Z^2 \otimes Z^3 \otimes I^5$
$ 3GHZ_1^-\rangle$	$ \phi^-\rangle$	$Z^2 \otimes Z^3 \otimes Z^5$
$ 3GHZ_1^-\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$Z^2 \otimes Z^3 \otimes X^5$
$ 3GHZ_1^-\rangle$	$ \psi^-\rangle$	$Z^2 \otimes Z^3 \otimes iY^5$
$ 3GHZ_2^+\rangle$	$ \phi^+\rangle$	$X^2 \otimes X^3 \otimes I^5$
$ 3GHZ_2^+\rangle$	$ \phi^-\rangle$	$X^2 \otimes X^3 \otimes Z^5$
$ 3GHZ_2^+\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$X^2 \otimes X^3 \otimes X^5$
$ 3GHZ_2^+\rangle$	$ \psi^-\rangle$	$X^2 \otimes X^3 \otimes iY^5$
$ 3GHZ_2^-\rangle$	$ \phi^+\rangle$	$iY^2 \otimes iY^3 \otimes I^5$
$ 3GHZ_2^-\rangle$	$ \phi^-\rangle$	$iY^2 \otimes iY^3 \otimes Z^5$
$ 3GHZ_2^-\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$iY^2 \otimes iY^3 \otimes X^5$
$ 3GHZ_2^-\rangle$	$ \psi^-\rangle$	$iY^2 \otimes iY^3 \otimes iY^5$

ABQT 量子回路

先ほどの AQT プロトコルの例を量子回路で表すと以下のような図 2.9 になる.

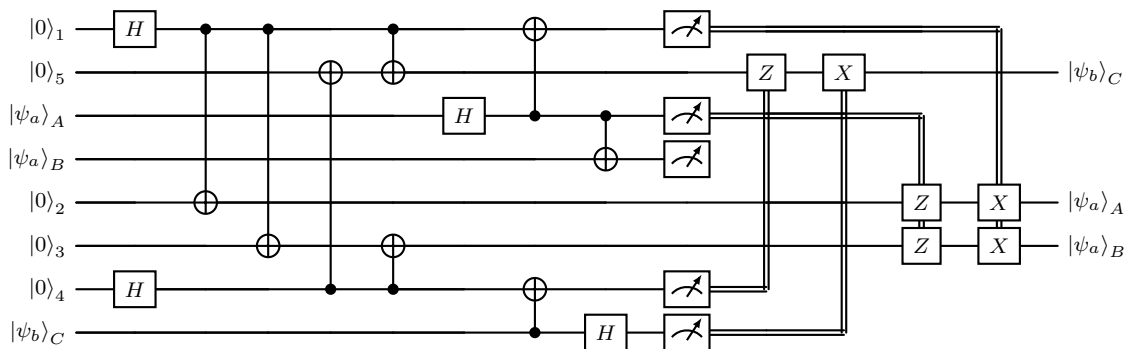


図 2.9: ABQT の量子回路

## Cyclic Quantum Teleportation (CyclicQT)

循環量子テレポーテーション (Cyclic Quantum Teleportation, CyclicQT) は 3 人以上の参加者が互いに未知の量子ビット状態を循環的に転送するプロトコルである。本節では, Chen ら [13] によって提唱された 6 量子ビットの量子もつれ状態を量子チャンネルとして用いた 3 者間 (Alice, Bob, Charlie) の CyclicQT の通信手順を示す。

### ステップ 1 : 前準備

通信の参加者として, Alice, Bob, Charlie をおく。Alice は未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_a\rangle_A$  を所有し, Bob は未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_b\rangle_B$  を所有し, Charlie は未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_c\rangle_C$  を所有する。このとき, 転送対象となる未知の量子状態を次式で表す。

$$|\psi_a\rangle_A = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle, \quad |\psi_b\rangle_B = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle, \quad |\psi_c\rangle_C = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle.$$

ただし,  $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 \in \mathbb{C}$  かつ  $|a_0|^2 + |a_1|^2 = |b_0|^2 + |b_1|^2 = |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$  とする。

通信の参加者である 3 者 (Alice, Bob, Charlie) はあらかじめ 6 量子ビットの量子もつれ状態を量子チャンネルとして共有する。ここで, 量子ビット 1, 2 は Alice が, 量子ビット 3, 4 は Bob が, 量子ビット 5, 6 は Charlie が所有する。

$$|\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (|000111\rangle + |001110\rangle + |010101\rangle + |011100\rangle \\ + |111000\rangle + |110001\rangle + |101010\rangle + |100011\rangle)_{1,2,3,4,5,6}.$$

システム全体 (9 量子ビット) の初期状態は次式で表される。

$$|\psi\rangle_{A,B,C,1,2,3,4,5,6} = |\psi_a\rangle_A |\psi_b\rangle_B |\psi_c\rangle_C |\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6} \\ = (a_0 b_0 c_0 |000\rangle + a_0 b_0 c_1 |001\rangle + a_0 b_1 c_0 |010\rangle + a_0 b_1 c_1 |011\rangle \\ + a_1 b_0 c_0 |100\rangle + a_1 b_0 c_1 |101\rangle + a_1 b_1 c_0 |110\rangle + a_1 b_1 c_1 |111\rangle)_{A,B,C} |\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6}.$$

### ステップ 2 : 送信者と受信者による測定

Alice が所有する量子ビット  $A, 1$ , Bob が所有する量子ビット  $B, 3$ , Charlie が所有する量子ビット  $C, 5$  に対して Bell 基底  $\{|\phi^\pm\rangle, |\psi^\pm\rangle\}$  を用いて測定を行う。3 者 (Alice, Bob, Charlie) が測定を行い測定結果を得ると, 残りの量子ビット 2, 4, 6 はそれに対応する状態へ崩壊する。例として, 3 者 (Alice, Bob, Charlie) の測定結果が  $\{|\phi^+\rangle_{A,1}, |\phi^+\rangle_{B,3}, |\phi^+\rangle_{C,5}\}$  であった場合, 量子ビット 2, 4, 6 の状態は次のように崩壊する。

$$|\psi\rangle_{2,4,6} = {}_{A,1}\langle\phi^+| {}_{B,3}\langle\phi^+| {}_{C,5}\langle\phi^+| \psi\rangle_{A,B,C,1,2,3,4,5,6} \\ = \frac{1}{8} [(b_0 |1\rangle + b_1 |0\rangle)_2 (c_0 |1\rangle + c_1 |0\rangle)_4 (a_0 |1\rangle + a_1 |0\rangle)_6].$$

### ステップ 3 : 古典通信と補正操作

3 者 (Alice, Bob, Charlie) はそれぞれの測定結果を古典通信を介して互いに送信する。各参加者は受け取った情報に基づき, 自身が保有する量子ビット (Alice は量子ビット 2, Bob は量子ビット 4, Charlie は量子ビット 6) に対して対応するユニタリ補正操作を行う。測定結果に対応するユニタリ操作を表 2.4 に示す。これにより, Alice の状態  $|\psi_a\rangle_A$  は Bob へ, Bob の状態  $|\psi_b\rangle_B$  は Charlie へ, Charlie の状態  $|\psi_c\rangle_C$  は Alice へと循環的に転送され CyclicQT が完了する。

表 2.4: Alice, Bob, Charlie の測定結果に対するユニタリ操作

Alice の結果	Bob の結果	Charlie の結果	ユニタリ操作
$ \phi^+\rangle_{A,1}$	$ \phi^+\rangle_{B,3}$	$ \phi^+\rangle_{C,5}$	$X^2 \otimes X^4 \otimes X^6$
$ \phi^+\rangle_{A,1}$	$ \phi^+\rangle_{B,3}$	$ \phi^-\rangle_{C,5}$	$Z^2 \otimes X^4 \otimes X^6$
$ \phi^+\rangle_{A,1}$	$ \phi^+\rangle_{B,3}$	$ \phi^+\rangle_{C,5}$	$I^2 \otimes X^4 \otimes X^6$
$ \phi^+\rangle_{A,1}$	$ \phi^+\rangle_{B,3}$	$ \phi^-\rangle_{C,5}$	$Z^2 \otimes X^4 \otimes X^6$
$ \phi^+\rangle_{A,1}$	$ \psi^+\rangle_{B,3}$	$ \phi^+\rangle_{C,5}$	$X^2 \otimes X^4 \otimes I^6$
$ \phi^+\rangle_{A,1}$	$ \psi^+\rangle_{B,3}$	$ \phi^-\rangle_{C,5}$	$Z^2 \otimes X^4 \otimes I^6$
$ \phi^+\rangle_{A,1}$	$ \psi^+\rangle_{B,3}$	$ \psi^+\rangle_{C,5}$	$I^2 \otimes X^4 \otimes I^6$
$ \phi^+\rangle_{A,1}$	$ \psi^+\rangle_{B,3}$	$ \psi^-\rangle_{C,5}$	$Z^2 \otimes X^4 \otimes I^6$

CyclicQT 量子回路

先ほどの CyclicQT プロトコルの例を量子回路で表すと以下のような図 2.10 になる。

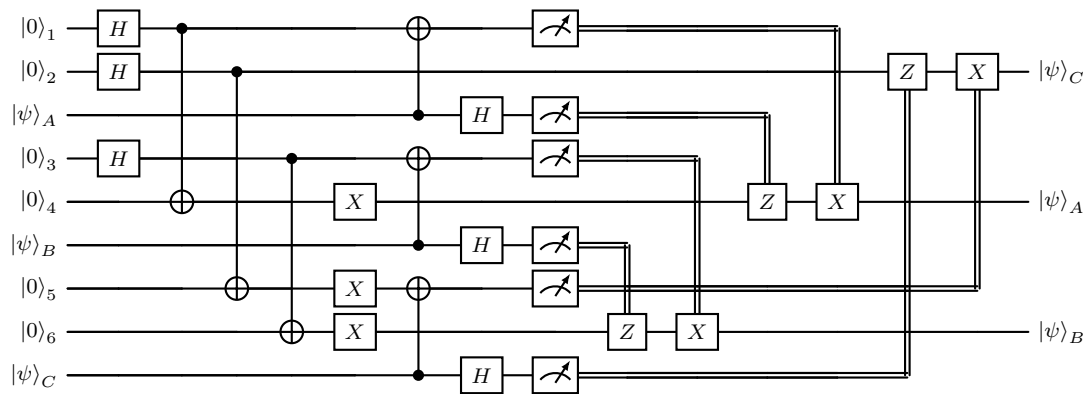


図 2.10: CyclicQT の量子回路

### Tripartite Controlled Quantum Teleportation (TCQT)

3 者間制御量子テレポーテーション (Tripartite Controlled Quantum Teleportation, TCQT) は三組の送信者と受信者の間で未知の量子状態を同時に転送し、さらに制御者の協力を必要とするプロトコルである。本節では、Li ら [14] によって提唱された 7 量子ビットクラスター状態を量子チャンネルとして用いた TQCT の通信手順を示す。

#### ステップ 1 : 前準備

通信の参加者として、送信者 (Alice, Charlie, Edison), 受信者 (Bob, David, Ford) 制御者 Tom をおく。Alice は未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_a\rangle_A$  を所有し, Charlie は未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_c\rangle_B$  を所有し, Edison は未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_e\rangle_C$  を所有する。このとき、転送対象となる未知の量子状態を次式で表す。

$$|\psi_a\rangle_A = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle, \quad |\psi_c\rangle_B = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle, \quad |\psi_e\rangle_C = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle.$$

ただし、 $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 \in \mathbb{C}$  かつ  $|a_0|^2 + |a_1|^2 = |b_0|^2 + |b_1|^2 = |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$  とする。

通信の参加者である 6 者 (Alice, Charlie, Edison, Bob, David, Ford, Tom) はあらかじめ 7 量子ビットクラスター状態を量子チャンネルとして共有する。ここで、量子ビット  $A, 2$  は Alice が所有し、量子ビット  $B, 4$  は Charlie が所有し、量子ビット  $C, 6$  は Edison が所有し、量子ビット  $3$  は Bob が所有し、量子ビット  $5$  は David が所有し、量子ビット  $7$  は Ford が所有し、量子ビット  $1$  は Tom が所有する。

$$|\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6,7} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (|0000000\rangle + |1110000\rangle + |1001100\rangle + |0111100\rangle \\ + |1000011\rangle + |0110011\rangle + |0001111\rangle + |1111111\rangle)_{1,2,3,4,5,6,7}.$$

システム全体 (10 量子ビット) の初期状態は次式で表される。

$$|\psi\rangle_{A,B,C,1,2,3,4,5,6,7} = |\psi_a\rangle_A |\psi_b\rangle_B |\psi_c\rangle_C |\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6,7} \\ = (a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle)_A (b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle)_B (c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle)_C \\ \otimes (|0000000\rangle + |1110000\rangle + |1001100\rangle + |0111100\rangle \\ + |1000011\rangle + |0110011\rangle + |0001111\rangle + |1111111\rangle)_{1,2,3,4,5,6,7}.$$

#### ステップ 2 : 送信者による測定

Alice は自身が所有する量子ビット  $A, 2$  に、Charlie は自身が所有する量子ビット  $B, 4$  に、Edison は自身が所有する量子ビット  $C, 6$  に対して Bell 基底  $\{|\phi^\pm\rangle, |\psi^\pm\rangle\}$  で測定を行う。3 者 (Alice, Charlie, Edison) が測定を行い測定結果を得ると、残りの量子ビット  $1, 3, 5, 7$  はそれに対応する状態へ崩壊する。例として、Alice の測定結果が  $|\phi^+\rangle_{A,2}$ 、Charlie の測定結果が  $|\phi^+\rangle_{B,4}$ 、Edison の測定結果が  $|\phi^+\rangle_{C,6}$  であった場合、量子ビット  $1, 3, 5, 7$  の状態は次のように崩壊する。

$$|\psi\rangle_{1,3,5,7} = A_{2,4,6} \langle\phi^+|_{B,4} \langle\phi^+|_{C,6} \langle\phi^+|\psi\rangle_{A,B,C,1,2,3,4,5,6,7} \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}} (a_0 b_0 c_0 |0000\rangle + a_0 b_0 c_1 |1001\rangle + a_0 b_1 c_0 |1010\rangle + a_0 b_1 c_1 |0011\rangle \\ + a_1 b_0 c_0 |1100\rangle + a_1 b_0 c_1 |0101\rangle + a_1 b_1 c_0 |0110\rangle + a_1 b_1 c_1 |1111\rangle)_{1,3,5,7}.$$

## ステップ 3: 制御者による測定

制御者 Tom は、自身の量子ビット 1 に対して X 基底で測定を行う。

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle).$$

例として、各送信者 (Alice, Charlie, Edison) の測定結果が  $|\phi^+\rangle_{A,2}$ ,  $|\phi^+\rangle_{B,4}$ ,  $|\phi^+\rangle_{C,6}$  であり, Tom の測定結果が  $|+\rangle_1$  であった場合, 量子ビット 3, 5, 7 の状態は次のように崩壊する。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{3,5,7} &= {}_1\langle + |_{A,2} \langle \phi^+ |_{B,4} \langle \phi^+ |_{C,6} \langle \phi^+ | \psi \rangle_{A,B,C,1,2,3,4,5,6,7} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (a_0 b_0 c_0 |000\rangle + a_0 b_0 c_1 |001\rangle + a_0 b_1 c_0 |010\rangle + a_0 b_1 c_1 |011\rangle \\ &\quad + a_1 b_0 c_0 |100\rangle + a_1 b_0 c_1 |101\rangle + a_1 b_1 c_0 |110\rangle + a_1 b_1 c_1 |111\rangle)_{3,5,7}. \end{aligned}$$

## ステップ 4: 古典通信と補正操作

送信者 (Alice, Charlie, Edison), 制御者 Tom はそれぞれの測定結果を古典通信を介して受信者 (Bob, David, Ford) に送信する。各受信者 (Bob, David, Ford) は各送信者から送信された測定結果に基づき, 自身が保有する量子ビット 3, 5, 7 に対して適切なユニタリ操作を行う。測定結果に対応するユニタリ操作を表 2.5 に示す。これにより, Bob の量子ビット 3 は Alice が所有していた未知の量子状態  $|\psi_a\rangle_A$ , David の量子ビット 5 は Charlie が所有していた未知の量子状態  $|\psi_c\rangle_b$ , Ford の量子ビット 7 は Edison が所有していた未知の量子状態  $|\psi_e\rangle_C$  と一致する。したがって, TCQT は完了する。

表 2.5: 各測定結果に対する受信者側のユニタリ操作

Alice の結果	Charlie の結果	Edison の結果	Tom の結果	ユニタリ操作
$ \phi^+\rangle$	$ \phi^+\rangle$	$ \phi^+\rangle$	$ +\rangle$	$I^3 \otimes I^5 \otimes I^7$
$ \phi^+\rangle$	$ \phi^+\rangle$	$ \phi^+\rangle$	$ -\rangle$	$I^3 \otimes I^5 \otimes Z^7$
$ \phi^+\rangle$	$ \phi^+\rangle$	$ \phi^-\rangle$	$ +\rangle$	$I^3 \otimes I^5 \otimes Z^7$
$ \phi^+\rangle$	$ \phi^+\rangle$	$ \phi^-\rangle$	$ -\rangle$	$I \otimes I \otimes I$
$ \phi^+\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$ +\rangle$	$I^3 \otimes X^5 \otimes X^7$
$ \phi^+\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$ -\rangle$	$I^3 \otimes X^5 \otimes iY^7$
$ \psi^+\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$ +\rangle$	$X^3 \otimes X^5 \otimes X^7$
$ \psi^+\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$ \psi^+\rangle$	$ -\rangle$	$X \otimes X \otimes iY$
$ \psi^-\rangle$	$ \psi^-\rangle$	$ \psi^-\rangle$	$ +\rangle$	$iY^3 \otimes iY^5 \otimes iY^7$
$ \psi^-\rangle$	$ \psi^-\rangle$	$ \psi^-\rangle$	$ -\rangle$	$iY^3 \otimes iY^5 \otimes Z^7$



## Bidirectional Controlled Quantum Teleportation (BCQT)

双方向制御量子テレポーテーション (Bidirectional Controlled Quantum Teleportation, BCQT) のスキームは、送信者 Alice と受信者 Bob が互いに未知の量子状態を同時に転送し、制御者 Charlie の許可に基づいてのみ状態再構築が可能となるプロトコルである。本節では、Li ら [15] によって提唱された 5 量子ビットの複合 GHZ–Bell 状態を量子チャンネルとして用いた BCQT の通信手順を示す。

### ステップ 1 : 前準備

通信の参加者として、Alice, Bob, Charlie をおく。Alice は未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_a\rangle_A$  を所有し、Bob は未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_b\rangle_B$  を所有している。このとき、転送対象となる未知の量子状態を次式で表す。

$$|\psi_a\rangle_A = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle, \quad |\psi_b\rangle_B = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle.$$

ただし、 $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{C}$  かつ  $|a_0|^2 + |a_1|^2 = |b_0|^2 + |b_1|^2 = 1$  とする。

通信の参加者である 3 者 (Alice, Bob, Charlie) はあらかじめ 5 量子ビットの複合 GHZ–Bell 状態を量子チャンネルとして共有する。ここで、量子ビット 3, 5 は Alice が、量子ビット 1, 4 は Bob が、量子ビット 2 は Charlie が所有する。

$$|\psi\rangle_{1,2,3,4,5} = \frac{\sqrt{2}}{2}(|000\rangle + |111\rangle)_{1,2,3} \frac{\sqrt{2}}{2}(|00\rangle + |11\rangle)_{4,5}.$$

システム全体 (7 量子ビット) の初期状態は次式で表される。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{1,2,3,4,5,A,B} &= |\psi\rangle_{1,2,3,4,5} |\psi_a\rangle_A |\psi_b\rangle_B \\ &= \frac{1}{2} \left[ (|00000\rangle + |00011\rangle + |11100\rangle + |11111\rangle)_{1,2,3,4,5} a_0 b_0 |00\rangle_{A,B} \right. \\ &\quad + (|00010\rangle + |00001\rangle + |11110\rangle + |11101\rangle)_{1,2,3,4,5} a_0 b_1 |01\rangle_{A,B} \\ &\quad + (|00100\rangle + |00111\rangle + |11000\rangle + |11011\rangle)_{1,2,3,4,5} a_1 b_0 |10\rangle_{A,B} \\ &\quad \left. + (|00110\rangle + |00101\rangle + |11010\rangle + |11001\rangle)_{1,2,3,4,5} a_1 b_1 |11\rangle_{A,B} \right]. \end{aligned}$$

### ステップ 2 : 送信者と受信者による測定

Alice は自身が所有する量子ビット 5 を Z 基底  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  で、量子ビット A を X 基底  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  で測定を行い、Bob は自身が所有する量子ビット 1 を Z 基底  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  で、量子ビット B を X 基底  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  で測定を行う。Alice と Bob が測定を行い結果を得ると、残りの量子ビット 2, 3, 4 はそれに対応する状態へ崩壊する。例として、Alice の測定結果が  $|0\rangle_5 |+\rangle_A$ 、Bob の測定結果が  $|0\rangle_1 |+\rangle_B$  であった場合、量子ビット 2, 3, 4 の状態は次のように崩壊する。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{2,3,4} &= {}_A \langle + | {}_5 \langle 0 | {}_B \langle + | {}_1 \langle 0 | \psi \rangle_{1,2,3,4,5,A,B} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |+\rangle_2 (a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle)_3 (b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle)_4 \right. \\ &\quad \left. + |-\rangle_2 (a_0 |0\rangle - a_1 |1\rangle)_3 (b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle)_4 \right]. \end{aligned}$$

## ステップ 3: 制御者による測定と古典通信

制御者 Charlie は, 自身の量子ビット 2 に対して X 基底で測定を行う.

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle).$$

例として, Alice の測定結果が  $|0\rangle_5 |+\rangle_A$ , Bob の測定結果が  $|0\rangle_1 |+\rangle_B$ , Charlie の測定結果が  $|+\rangle_2$  であった場合, 量子ビット 3, 4 の状態は次のように崩壊する.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{3,4} &= 2 \langle +|_A \langle +|_5 \langle 0|_B \langle +|_1 \langle 0|\psi\rangle_{1,2,3,4,5,A,B} \\ &= (a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle)_3 (b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle)_4. \end{aligned}$$

## ステップ 4: 受信者による再構築

Alice, Bob はそれぞれの測定結果を古典通信を介して互いに, Charlie は測定結果を受信者 (Alice, Bob) に送信する. 各受信者 (Alice, Bob) は送信された測定結果に基づき, 量子ビット 3, 4 にユニタリ操作を行う. 測定結果に対応するユニタリ操作を表 2.6 に示す. これにより Bob の量子ビット 4 は Alice が所有していた未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_a\rangle_A$  と一致し, Alice の量子ビット 3 は Bob が所有していた未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_b\rangle_B$  と一致する. したがって, BCQT が完了する.

表 2.6: Alice, Bob, Charlie の測定結果に対するユニタリ操作

Alice の結果	Bob の結果	Charlie の結果	ユニタリ操作
$ 0\rangle_5  +\rangle_A$	$ 0\rangle_1  +\rangle_B$	$ +\rangle_2$	$I^3 \otimes I^4$
$ 0\rangle_5  +\rangle_A$	$ 0\rangle_1  +\rangle_B$	$ -\rangle_2$	$I^3 \otimes I^4$
$ 0\rangle_5  +\rangle_A$	$ 0\rangle_1  -\rangle_B$	$ +\rangle_2$	$I^3 \otimes Z^4$
$ 0\rangle_5  +\rangle_A$	$ 0\rangle_1  -\rangle_B$	$ -\rangle_2$	$I^3 \otimes Z^4$
$ 0\rangle_5  +\rangle_A$	$ 1\rangle_1  +\rangle_B$	$ +\rangle_2$	$X^3 \otimes I^4$
$ 0\rangle_5  +\rangle_A$	$ 1\rangle_1  +\rangle_B$	$ -\rangle_2$	$-iY^3 Z^3 \otimes I^4$
$ 0\rangle_5  +\rangle_A$	$ 1\rangle_1  -\rangle_B$	$ +\rangle_2$	$X^3 \otimes Z^4$
$ 0\rangle_5  +\rangle_A$	$ 1\rangle_1  -\rangle_B$	$ -\rangle_2$	$-iY^3 Z^3 \otimes Z^4$
$ 0\rangle_5  -\rangle_A$	$ 0\rangle_1  +\rangle_B$	$ +\rangle_2$	$Z^3 \otimes I^4$
$ 0\rangle_5  -\rangle_A$	$ 0\rangle_1  +\rangle_B$	$ -\rangle_2$	$Z^3 \otimes I^4$
$ 0\rangle_5  -\rangle_A$	$ 0\rangle_1  -\rangle_B$	$ +\rangle_2$	$Z^3 \otimes Z^4$
$ 0\rangle_5  -\rangle_A$	$ 0\rangle_1  -\rangle_B$	$ -\rangle_2$	$Z^3 \otimes Z^4$
$ 0\rangle_5  -\rangle_A$	$ 1\rangle_1  +\rangle_B$	$ +\rangle_2$	$-iY^3 \otimes I^4$
$ 0\rangle_5  -\rangle_A$	$ 1\rangle_1  +\rangle_B$	$ -\rangle_2$	$X^3 Z^3 \otimes I^4$
$ 0\rangle_5  -\rangle_A$	$ 1\rangle_1  -\rangle_B$	$ +\rangle_2$	$-iY^3 \otimes Z^4$
$ 0\rangle_5  -\rangle_A$	$ 1\rangle_1  -\rangle_B$	$ -\rangle_2$	$X^3 Z^3 \otimes Z^4$
$ 1\rangle_5  +\rangle_A$	$ 0\rangle_1  +\rangle_B$	$ +\rangle_2$	$I^3 \otimes X^4$
$ 1\rangle_5  +\rangle_A$	$ 0\rangle_1  +\rangle_B$	$ -\rangle_2$	$I^3 \otimes X^4$
$ 1\rangle_5  +\rangle_A$	$ 0\rangle_1  -\rangle_B$	$ +\rangle_2$	$I^3 \otimes (-iY)^4$
$ 1\rangle_5  +\rangle_A$	$ 0\rangle_1  -\rangle_B$	$ -\rangle_2$	$I^3 \otimes (-iY)^4$
$ 1\rangle_5  +\rangle_A$	$ 1\rangle_1  +\rangle_B$	$ +\rangle_2$	$X^3 \otimes X^4$
$ 1\rangle_5  +\rangle_A$	$ 1\rangle_1  +\rangle_B$	$ -\rangle_2$	$-iY^3 Z^3 \otimes X^4$
$ 1\rangle_5  +\rangle_A$	$ 1\rangle_1  -\rangle_B$	$ +\rangle_2$	$X^3 \otimes (-iY)^4$
$ 1\rangle_5  +\rangle_A$	$ 1\rangle_1  -\rangle_B$	$ -\rangle_2$	$-iY^3 Z^3 \otimes (-iY)^4$
$ 1\rangle_5  -\rangle_A$	$ 0\rangle_1  +\rangle_B$	$ +\rangle_2$	$Z^3 \otimes X^4$
$ 1\rangle_5  -\rangle_A$	$ 0\rangle_1  +\rangle_B$	$ -\rangle_2$	$Z^3 \otimes X^4$
$ 1\rangle_5  -\rangle_A$	$ 0\rangle_1  -\rangle_B$	$ +\rangle_2$	$Z^3 \otimes (-iY)^4$
$ 1\rangle_5  -\rangle_A$	$ 0\rangle_1  -\rangle_B$	$ -\rangle_2$	$Z^3 \otimes (-iY)^4$
$ 1\rangle_5  -\rangle_A$	$ 1\rangle_1  +\rangle_B$	$ +\rangle_2$	$-iY^3 \otimes X^4$
$ 1\rangle_5  -\rangle_A$	$ 1\rangle_1  +\rangle_B$	$ -\rangle_2$	$X^3 Z^3 \otimes X^4$
$ 1\rangle_5  -\rangle_A$	$ 1\rangle_1  -\rangle_B$	$ +\rangle_2$	$-iY^3 \otimes (-iY)^4$
$ 1\rangle_5  -\rangle_A$	$ 1\rangle_1  -\rangle_B$	$ -\rangle_2$	$X^3 Z^3 \otimes (-iY)^4$

## BCQT 量子回路

先ほどの BCQT プロトコルの例を量子回路で表すと以下のような図 2.12 になる。

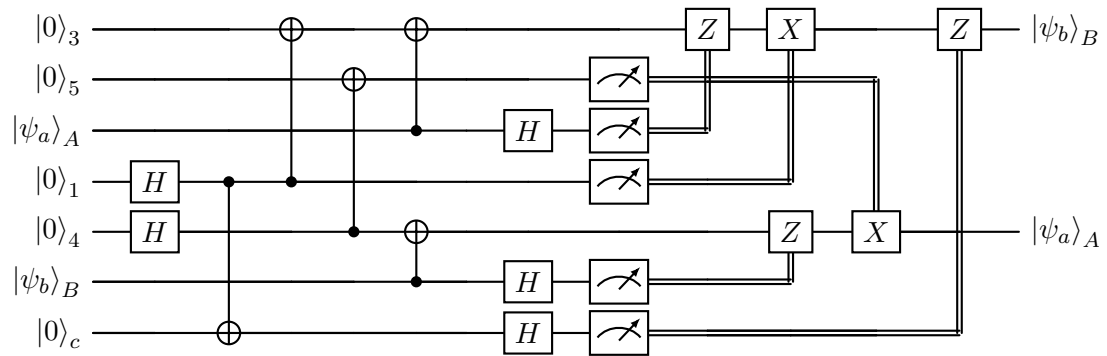


図 2.12: BCQT の量子回路

### Asymmetric Bidirectional Controlled Quantum Teleportation (ABCQT)

非対称双方向制御量子テレポーテーション (Asymmetric Bidirectional Controlled Quantum Teleportation, ABCQT) は、送信者 Alice と受信者 Bob が互いに異なる量子ビット数の未知状態を同時に転送し、制御者 Charlie の許可に基づいてのみ状態再構築が可能となるプロトコルである。本節では、Li ら [16] によって提唱された 6 量子ビットのクラスター状態を量子チャンネルとして用いた ABCQT の通信手順を示す。

#### ステップ 1 : 前準備

通信の参加者として、Alice, Bob, Charlie とおく。Alice は未知の 2 量子ビット状態  $|\psi_a\rangle_{A,B}$  を所有し、Bob は未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_b\rangle_C$  を所有している。このとき、転送対象となる未知の量子状態を次式で表す。

$$|\psi_a\rangle_{A,B} = a_0 |00\rangle + a_1 |11\rangle, \quad |\psi_b\rangle_C = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle.$$

ただし、 $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{C}$  かつ  $|a_0|^2 + |a_1|^2 = |b_0|^2 + |b_1|^2 = 1$  とする。

通信の参加者である 3 者 (Alice, Bob, Charlie) はあらかじめ 6 量子ビットのクラスター状態を量子チャンネルとして共有する。ここで、量子ビット  $A, B, 1, 4$  は Alice が、量子ビット  $C, 2, 3, 6$  は Bob が、量子ビット 5 は Charlie が所有する。

$$|\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6} = \frac{1}{2} (|000000\rangle + |000111\rangle + |111000\rangle - |111111\rangle)_{1,2,3,4,5,6}.$$

システム全体（9 量子ビット）の初期状態は次式で表される。

$$\begin{aligned}
& |\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6,A,B,C} \\
&= |\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6} |\psi_a\rangle_{A,B} |\psi_b\rangle_C \\
&= \frac{1}{4} \left[ |\phi^+\rangle_{A,1} |\phi^+\rangle_{C,6} (a_0 b_0 |00000\rangle + a_1 b_0 |11100\rangle + a_0 b_1 |00011\rangle - a_1 b_1 |11111\rangle)_{B,2,3,4,5} \right. \\
&\quad + |\phi^-\rangle_{A,1} |\phi^+\rangle_{C,6} (a_0 b_0 |00000\rangle - a_1 b_0 |11100\rangle + a_0 b_1 |00011\rangle + a_1 b_1 |11111\rangle)_{B,2,3,4,5} \\
&\quad + |\phi^+\rangle_{A,1} |\phi^-\rangle_{C,6} (a_0 b_0 |00000\rangle + a_1 b_0 |11100\rangle - a_0 b_1 |00011\rangle + a_1 b_1 |11111\rangle)_{B,2,3,4,5} \\
&\quad + |\phi^-\rangle_{A,1} |\phi^-\rangle_{C,6} (a_0 b_0 |00000\rangle - a_1 b_0 |11100\rangle - a_0 b_1 |00011\rangle - a_1 b_1 |11111\rangle)_{B,2,3,4,5} \\
&\quad + |\phi^+\rangle_{A,1} |\psi^+\rangle_{C,6} (a_0 b_0 |00011\rangle - a_1 b_0 |11111\rangle + a_0 b_1 |00000\rangle + a_1 b_1 |11100\rangle)_{B,2,3,4,5} \\
&\quad + |\phi^-\rangle_{A,1} |\psi^+\rangle_{C,6} (a_0 b_0 |00011\rangle + a_1 b_0 |11111\rangle + a_0 b_1 |00000\rangle - a_1 b_1 |11100\rangle)_{B,2,3,4,5} \\
&\quad + |\phi^+\rangle_{A,1} |\psi^-\rangle_{C,6} (a_0 b_0 |00011\rangle - a_1 b_0 |11111\rangle - a_0 b_1 |00000\rangle - a_1 b_1 |11100\rangle)_{B,2,3,4,5} \\
&\quad + |\phi^-\rangle_{A,1} |\psi^-\rangle_{C,6} (a_0 b_0 |00011\rangle + a_1 b_0 |11111\rangle - a_0 b_1 |00000\rangle + a_1 b_1 |11100\rangle)_{B,2,3,4,5} \\
&\quad + |\psi^+\rangle_{A,1} |\phi^+\rangle_{C,6} (a_0 b_0 |11100\rangle + a_1 b_0 |00000\rangle - a_0 b_1 |11111\rangle + a_1 b_1 |00011\rangle)_{B,2,3,4,5} \\
&\quad + |\psi^-\rangle_{A,1} |\phi^+\rangle_{C,6} (a_0 b_0 |11100\rangle - a_1 b_0 |00000\rangle - a_0 b_1 |11111\rangle - a_1 b_1 |00011\rangle)_{B,2,3,4,5} \\
&\quad + |\psi^+\rangle_{A,1} |\phi^-\rangle_{C,6} (a_0 b_0 |11100\rangle + a_1 b_0 |00000\rangle + a_0 b_1 |11111\rangle - a_1 b_1 |00011\rangle)_{B,2,3,4,5} \\
&\quad + |\psi^-\rangle_{A,1} |\phi^-\rangle_{C,6} (a_0 b_0 |11100\rangle - a_1 b_0 |00000\rangle + a_0 b_1 |11111\rangle + a_1 b_1 |00011\rangle)_{B,2,3,4,5} \\
&\quad + |\psi^+\rangle_{A,1} |\psi^+\rangle_{C,6} (-a_0 b_0 |11111\rangle + a_1 b_0 |00011\rangle + a_0 b_1 |11100\rangle + a_1 b_1 |00000\rangle)_{B,2,3,4,5} \\
&\quad + |\psi^-\rangle_{A,1} |\psi^+\rangle_{C,6} (-a_0 b_0 |11111\rangle - a_1 b_0 |00011\rangle + a_0 b_1 |11100\rangle - a_1 b_1 |00000\rangle)_{B,2,3,4,5} \\
&\quad + |\psi^+\rangle_{A,1} |\psi^-\rangle_{C,6} (-a_0 b_0 |11111\rangle + a_1 b_0 |00011\rangle - a_0 b_1 |11100\rangle - a_1 b_1 |00000\rangle)_{B,2,3,4,5} \\
&\quad \left. + |\psi^-\rangle_{A,1} |\psi^-\rangle_{C,6} (-a_0 b_0 |11111\rangle - a_1 b_0 |00011\rangle - a_0 b_1 |11100\rangle + a_1 b_1 |00000\rangle)_{B,2,3,4,5} \right].
\end{aligned}$$

### ステップ 2 : 送信者と受信者による測定

Alice は自身が所有する量子ビット  $A, 1$  を Bell 基底  $\{|\phi^\pm\rangle, |\psi^\pm\rangle\}$  で、量子ビット  $B$  を  $X$  基底  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  でそれぞれ測定を行い、Bob は自身が所有する量子ビット  $C, 6$  を Bell 基底  $\{|\phi^\pm\rangle, |\psi^\pm\rangle\}$  で測定する。Alice と Bob が測定を行い結果を得ると、残りの量子ビット  $2, 3, 4, 5$  はそれに対応する状態へ崩壊する。例として、Alice の測定結果が  $|\phi^+\rangle_{A,1}$ ,  $|+\rangle_B$ , Bob の測定結果が  $|\phi^+\rangle_{C,6}$  であった場合、残りの状態は次のように崩壊する。

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_{2,3,4,5} &= {}_{C,6} \langle \phi^+ | {}_B \langle + | {}_{A,1} \langle \phi^+ | \psi \rangle_{1,2,3,4,5,6,A,B,C} \\
&= (a_0 b_0 |0000\rangle + a_0 b_1 |0011\rangle + a_1 b_0 |1100\rangle - a_1 b_1 |1111\rangle)_{2,3,4,5}.
\end{aligned}$$

## ステップ 3: 制御者による測定と古典通信

制御者 Charlie は、自身の量子ビット 5 に対して X 基底で測定を行う。

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle).$$

例として、Alice の測定結果が  $|\phi^+\rangle_{A,1}$ ,  $|+\rangle_B$ , Bob の測定結果が  $|\phi^+\rangle_{C,6}$ , Charlie の測定結果が  $|+\rangle_5$  であった場合、量子ビット 2, 3, 4 の状態は次のように崩壊する。

$$\begin{aligned} |\psi_{2,3,4}\rangle &= {}_5\langle +|_{C,6}\langle \phi^+|_B\langle +|_{A,1}\langle \phi^+|\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6,A,B,C} \\ &= (a_0b_0|000\rangle + a_0b_1|001\rangle + a_1b_0|110\rangle + a_1b_1|111\rangle)_{2,3,4} \\ &= (a_0|00\rangle + a_1|11\rangle)_{2,3} + (b_0|0\rangle + b_1|1\rangle)_4. \end{aligned}$$

## ステップ 4: 受信者による再構築

Alice, Bob はそれぞれの測定結果を古典通信を介して互いに、Charlie は測定結果を受信者 (Alice, Bob) に送信する。各受信者 (Alice, Bob) は送信された測定結果に基づき、量子ビット 2, 3, 4 に局所ユニタリ操作を行う。測定結果に対応するユニタリ操作を表 2.7 に示す。これにより Bob の量子ビット 2, 3 は Alice が所有していた未知の 2 量子ビット状態  $|\psi_a\rangle_{A,B}$  と一致し、Alice の量子ビット 4 は Bob が所有していた未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_b\rangle_C$  と一致する。したがって、ABCQT が完了する。



ABCQT 量子回路

先ほどの ABCQT プロトコルの例を量子回路で表すと以下のような図 2.13 になる。

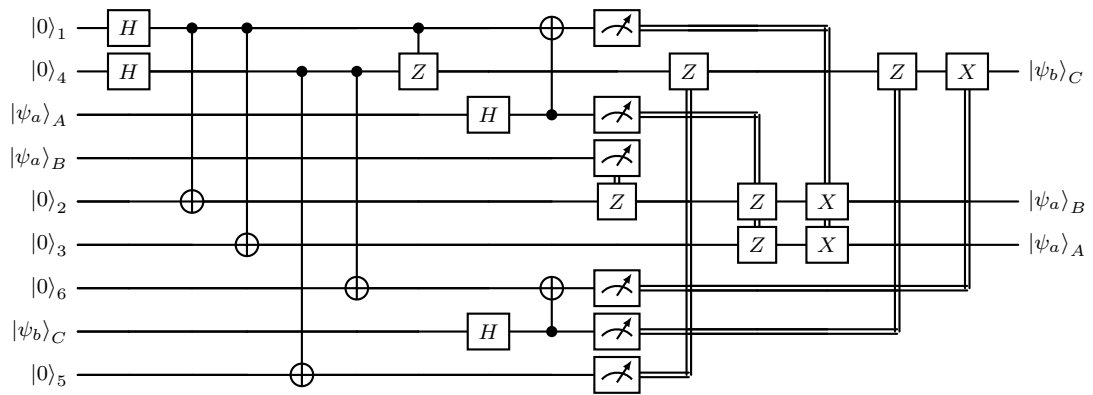


図 2.13: ABCQT の量子回路

### Cyclic Controlled Quantum Teleportation (CyclicCQT)

循環制御量子テレポーテーション (Cyclic Controlled Quantum Teleportation, CyclicCQT) は 3 人以上の参加者が互いに未知の量子ビット状態を循環的に転送し、さらに制御者の協力を必要とするプロトコルである。本節では、Verma ら [17] によって提唱された、7 量子ビットの量子もつれ状態を量子チャンネルとして用いた 4 者間 (Alice, Bob, Charlie, David) の CyclicCQT の詳細手順を示す。

#### ステップ 1 : 前準備

通信の参加者として、Alice, Bob, Charlie, David とおく。Alice は未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_a\rangle_A$  を所有し、Bob は未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_b\rangle_B$  を所有し、Charlie は未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_c\rangle_C$  を所有する。このとき、転送対象となる未知の量子状態を次式で表す。

$$|\psi_a\rangle_A = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle, \quad |\psi_b\rangle_B = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle, \quad |\psi_c\rangle_C = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle.$$

ただし、 $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 \in \mathbb{C}$  かつ  $|a_0|^2 + |a_1|^2 = |b_0|^2 + |b_1|^2 = |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$  とする。

通信の参加者である 4 者 (Alice, Bob, Charlie, David) はあらかじめ 7 量子ビットの量子もつれ状態を量子チャンネルとして共有する。ここで、量子ビット 1, 6 は Alice が、量子ビット 2, 3 は Bob が、量子ビット 4, 5 は Charlie が、量子ビット 7 は David が所有する。

$$|\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6,7} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\phi^+\rangle_{1,2} |\phi^+\rangle_{3,4} |\phi^+\rangle_{5,6} |0\rangle_7 + |\psi^+\rangle_{1,2} |\psi^+\rangle_{3,4} |\psi^+\rangle_{5,6} |1\rangle_7 \right).$$

ここで、 $|\phi^+\rangle, |\psi^+\rangle$  は次式で表される。

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad |\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle).$$

システム全体 (10 量子ビット) の初期状態は次式で表される。

$$\begin{aligned} & |\psi\rangle_{A,B,C,1,2,3,4,5,6,7} \\ &= |\psi_a\rangle_A |\psi_b\rangle_B |\psi_c\rangle_C |\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6,7} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle)_A |\phi^+\rangle_{1,2} (b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle)_B |\phi^+\rangle_{3,4} (c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle)_C |\phi^+\rangle_{5,6} |0\rangle_7 \right. \\ & \quad \left. + (a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle)_A |\psi^+\rangle_{1,2} (b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle)_B |\psi^+\rangle_{3,4} \otimes (c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle)_C |\psi^+\rangle_{5,6} |1\rangle_7 \right]. \end{aligned}$$

続いて、3 者は (Alice, Bob, Charlie) CNOT 操作 ( $a \rightarrow 1, b \rightarrow 3, c \rightarrow 5$ ) と量子ビット 1, 3, 5 に Hadamard ゲート  $H$  を適用する。その結果システム全体の状態は次式で表される。

$$\begin{aligned} & |\psi\rangle_{A,B,C,1,2,3,4,5,6,7} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \sum_{i,j,k=0}^3 |\tilde{i}\rangle_{A,1} |\tilde{j}\rangle_{B,3} |\tilde{k}\rangle_{C,5} \left( U_2^{(i)} U_4^{(j)} U_6^{(k)} |\psi_a\rangle_2 |\psi_b\rangle_4 |\psi_c\rangle_6 |0\rangle_7 \right. \\ & \quad \left. + V_2^{(i)} V_4^{(j)} V_6^{(k)} |\psi_a\rangle_2 |\psi_b\rangle_4 |\psi_c\rangle_6 |1\rangle_7 \right). \end{aligned}$$

ここで、 $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$  は、それぞれ Alice, Bob, Charlie が行う 2 量子ビット測定の測定結果を表す。各測定は計算基底  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  に基づいて行われ、対応する測定結果を  $i = 0, 1, 2, 3$  と番号付けして表している。これらの測定結果  $i, j, k$  は、受信側量子ビット 2, 4, 6 に

対して適用すべき補正ユニタリ演算  $U^{(i)}, U^{(j)}, U^{(k)}$  および  $V^{(i)}, V^{(j)}, V^{(k)}$  を決定するための情報として用いられる。ここで、2量子ビット状態  $|\tilde{i}\rangle$  およびユニタリ演算  $U, V$  は次のように定義される。

$$\begin{aligned} |\tilde{0}\rangle &= |00\rangle, \quad |\tilde{1}\rangle = |01\rangle, \quad |\tilde{2}\rangle = |10\rangle, \quad |\tilde{3}\rangle = |11\rangle, \\ U^{(0)} &= I, \quad U^{(1)} = Z, \quad U^{(2)} = X, \quad U^{(3)} = ZX, \\ V^{(0)} &= X, \quad V^{(1)} = XZ, \quad V^{(2)} = I, \quad V^{(3)} = -Z. \end{aligned}$$

### ステップ 2: 送信者による測定

Alice は自身が所有する量子ビット  $A, 1$  に, Bob は自身が所有する量子ビット  $B, 3$  に, Charlie は自身が所有する量子ビット  $C, 5$  に対しての 2 量子ビットを計算基底 ( $|\tilde{0}\rangle, |\tilde{1}\rangle, |\tilde{2}\rangle, |\tilde{3}\rangle$ ) で測定を行う。3者 (Alice, Bob, Charlie) が測定を行い測定結果を得ると, 残りの量子ビット 2, 4, 6, 7 はそれに対応する状態へ崩壊する。

$$|\psi\rangle_{2,4,6,7} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \left( U_2^{(i)} U_4^{(j)} U_6^{(k)} |\psi_a\rangle_2 |\psi_b\rangle_4 |\psi_c\rangle_6 |0\rangle_7 + V_2^{(i)} V_4^{(j)} V_6^{(k)} |\psi_a\rangle_2 |\psi_b\rangle_4 |\psi_c\rangle_6 |1\rangle_7 \right).$$

### ステップ 3: 制御者による測定と古典通信

David は量子ビット 7 を  $Z$  基底  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  で測定を行い, その結果を 3者 (Alice, Bob, Charlie) に送信する。

### ステップ 4: 受信者による再構築

送信者 (Alice, Bob, Charlie), 制御者 David はそれぞれの測定結果を古典通信を介して受信者 (Bob, Charlie, Alice) に送信する。受信者 (Bob, Charlie, Alice) は送信者から送信された測定結果に基づき, 自身が保有する量子ビット 2, 4, 6 に対して適切なユニタリ操作を行う。測定結果に対応するユニタリ操作を表 2.8 に示す。これにより, Alice の状態  $|\psi_a\rangle_A$  は Bob へ, Bob の状態  $|\psi_b\rangle_B$  は Charlie へ, Charlie の状態  $|\psi_c\rangle_C$  は Alice へと循環的に転送され CyclicCQT が完了する。

表 2.8: Alice, Bob, Charlie, David の測定結果に対するユニタリ操作

Alice の結果	Bob の測定結果	Charlie の結果	David の測定結果	ユニタリ操作 ( $B \otimes C \otimes A$ )
$ \tilde{i}\rangle_{A,1}$	$ \tilde{j}\rangle_{B,3}$	$ \tilde{k}\rangle_{C,5}$	$ 0\rangle_7$	$U^{(i)} \otimes U^{(j)} \otimes U^{(k)}$
$ \tilde{i}\rangle_{A,1}$	$ \tilde{j}\rangle_{B,3}$	$ \tilde{k}\rangle_{C,5}$	$ 1\rangle_7$	$V^{(i)} \otimes V^{(j)} \otimes V^{(k)}$

CyclicCQT 量子回路

先ほどの CyclicCQT プロトコルの例を量子回路で表すと以下のような図 2.14 になる。

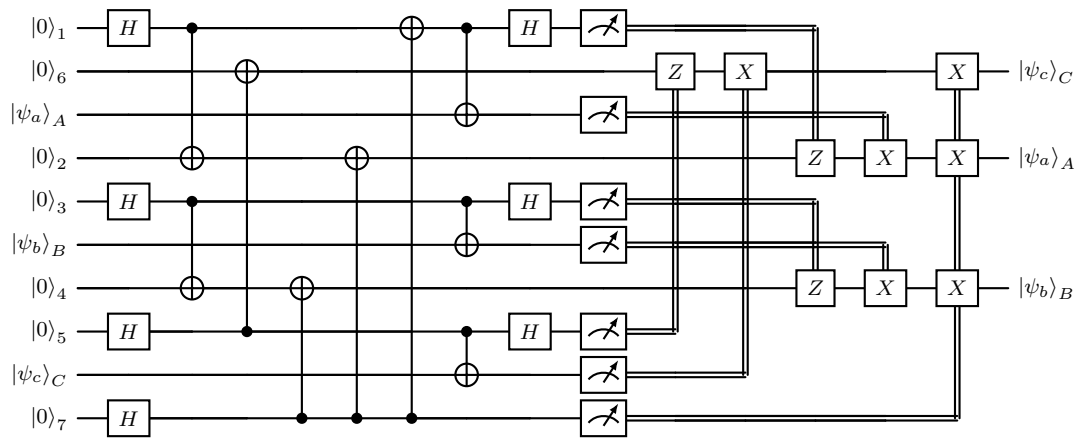


図 2.14: CyclicCQT の量子回路

### Cyclic Asymmetric Controlled Quantum Teleportation (CyclicACQT)

循環非対称制御量子テレポーテーション (Cyclic Asymmetric Controlled Quantum Teleportation, CyclicACQT) は、3人以上の参加者が互いに異なる量子ビット数の未知状態を循環的に転送し、さらに制御者の協力を必要とするプロトコルである。本節では、Zhou ら [18] によって提唱された、9量子ビットの量子もつれ状態を量子チャンネルとして用いた4者 (Alice, Bob, Charlie, David) CyclicACQT の詳細手順を示す。

#### ステップ 1 : 前準備

通信の参加者として、Alice, Bob, Charlie, David をおく。Alice は未知の 2 量子ビット状態  $|\psi_a\rangle_{A,B}$  を所有し、Bob は未知の 2 量子ビット状態  $|\psi_b\rangle_{C,D}$  を所有し、Charlie は未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_c\rangle_E$  を所有している。このとき、転送対象となる未知の量子状態を次式で表す。

$$|\psi_a\rangle_{A,B} = a_0 |00\rangle + a_1 |11\rangle,$$

$$|\psi_b\rangle_{C,D} = b_0 |00\rangle + b_1 |11\rangle,$$

$$|\psi_c\rangle_E = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle.$$

ただし、 $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 \in \mathbb{C}$  かつ  $|a_0|^2 + |a_1|^2 = |b_0|^2 + |b_1|^2 = |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$  とする。

通信の参加者である4者 (Alice, Bob, Charlie, David) はあらかじめ9量子ビットの量子もつれ状態を量子チャンネルを共有する。ここで、量子ビット 1, 8 は Alice が、量子ビット 2, 4, 5 は Bob が、量子ビット 3, 6, 7 は Charlie が、量子ビット 9 は David が所有する。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6,7,8,9} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|000001100\rangle + |100111100\rangle + |010000000\rangle + |110110000\rangle \\ &\quad + |001001111\rangle + |101111111\rangle + |011000011\rangle + |111110011\rangle). \end{aligned}$$

システム全体 (14 量子ビット) の初期状態は次式で表される。

$$\begin{aligned} &|\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E} \\ &= |\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6,7,8,9} |\psi_a\rangle_{A,B} |\psi_b\rangle_{C,D} |\psi_c\rangle_E \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} [ (|000001100\rangle + |100111100\rangle + |010000000\rangle + |110110000\rangle \\ &\quad + |001001111\rangle + |101111111\rangle + |011000011\rangle + |111110011\rangle)_{1,2,3,4,5,6,7,8,9} \\ &\quad \otimes (a_0 |00\rangle + a_1 |11\rangle)_{A,B} (b_0 |00\rangle + b_1 |11\rangle)_{C,D} (c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle)_E ]. \end{aligned}$$

#### ステップ 2 : 送信者による測定

Charlie は自身が所有する量子ビット  $E$  と 3 に対して Bell 基底  $\{|\phi^\pm\rangle, |\psi^\pm\rangle\}$  で測定を行う。続いて、Alice は量子ビット  $A, B, 1$  に対して、Bob は量子ビット  $C, D, 2$  に対して次式のような 3 量子ビットの GHZ 基底  $\{|3\text{GHZ}_1^\pm\rangle, |3\text{GHZ}_2^\pm\rangle\}$  での測定を行う。3 量子ビットの GHZ 基底は次式で与えられる。

$$|3\text{GHZ}_1^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle \pm |111\rangle), \quad |3\text{GHZ}_2^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|001\rangle \pm |110\rangle).$$

3者 (Alice, Bob, Charlie) が測定を行い測定結果を得ると、残りの量子ビット 4, 5, 6, 7, 8, 9 はそれに対応する状態へ崩壊する。例として、Charlie の結果が  $|\phi^-\rangle_{E,3}$ , Alice の測定結果が  $|3\text{GHZ}_1^+\rangle_{A,B,1}$ , Bob の測定結果が  $|3\text{GHZ}_2^+\rangle_{C,D,2}$  であった場合、残りの量子ビット 4, 5, 6, 7, 8, 9 の状態は次のように崩壊する。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{4,5,6,7,8,9} &= {}_{C,D,2}\langle 3\text{GHZ}_2^+| {}_{A,B,1}\langle 3\text{GHZ}_1^+| {}_{E,3}\langle \phi^-|\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E} \\ &= (a_0b_0c_0|000000\rangle - a_0b_0c_1|000011\rangle - a_1b_0c_0|110000\rangle + a_1b_0c_1|110011\rangle \\ &\quad + a_0b_1c_0|001100\rangle - a_0b_1c_1|001111\rangle - a_1b_1c_0|111100\rangle + a_1b_1c_1|111111\rangle)_{4,5,6,7,8,9}. \end{aligned}$$

### ステップ 3: 制御者による測定

制御者 David は、自身の量子ビット 9 に対して X 基底で測定を行う。

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle).$$

例として、Charlie の結果が  $|\phi^-\rangle_{E,3}$ , Alice の測定結果が  $|3\text{GHZ}_1^+\rangle_{A,B,1}$ , Bob の測定結果が  $|3\text{GHZ}_2^+\rangle_{C,D,2}$ , David の測定結果が  $|+\rangle_9$  であった場合、量子ビット 4, 5, 6, 7, 8 の状態は次のように崩壊する。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{4,5,6,7,8} &= {}_9\langle +| {}_{C,D,2}\langle 3\text{GHZ}_2^+| {}_{A,B,1}\langle 3\text{GHZ}_1^+| {}_{E,3}\langle \phi^-|\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E} \\ &= (a_0b_0c_0|00000\rangle + a_1b_0c_0|11000\rangle + a_0b_1c_0|00110\rangle + a_1b_1c_0|11110\rangle \\ &\quad - a_0b_0c_1|00001\rangle - a_1b_0c_1|11001\rangle - a_0b_1c_1|00111\rangle - a_1b_1c_1|11111\rangle)_{4,5,6,7,8} \\ &= (c_0|0\rangle - c_1|1\rangle)_8 \otimes (a_0|00\rangle + a_1|11\rangle)_{4,5} \otimes (b_0|00\rangle + b_1|11\rangle)_{6,7}. \end{aligned}$$

### ステップ 4: 受信者による再構築

送信者 (Alice, Bob, Charlie), 制御者 David はそれぞれの測定結果を古典通信を介して受信者 (Bob, Charlie, Alice) に送信する。受信者 (Bob, Charlie, Alice) は送信者から送信された測定結果に基づき、自身が保有する量子ビット 4, 5, 6, 7, 8 に対して適切なユニタリ操作を行う。測定結果に対応するユニタリ操作を表 2.9 に示す。これにより、Alice の状態  $|\psi_a\rangle_{A,B}$  は Bob へ、Bob の状態  $|\psi_b\rangle_{C,D}$  は Charlie へ、Charlie の状態  $|\psi_c\rangle_E$  は Alice へと循環的に転送され CyclicACQT が完了する。

表 2.9: 各測定結果に対する受信者側のユニタリ操作

Charlie の結果	Alice の結果	Bob の結果	David の結果	ユニタリ操作
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_1^+\rangle$	$3GHZ_1^+\rangle$	$ +\rangle$	$I^8 \otimes I^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_1^+\rangle$	$3GHZ_1^+\rangle$	$ -\rangle$	$Z^8 \otimes I^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_1^+\rangle$	$3GHZ_1^-\rangle$	$ +\rangle$	$I^8 \otimes I^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_1^+\rangle$	$3GHZ_1^-\rangle$	$ -\rangle$	$Z^8 \otimes I^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_1^+\rangle$	$3GHZ_2^+\rangle$	$ +\rangle$	$I^8 \otimes I^{45} \otimes I^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_1^+\rangle$	$3GHZ_2^+\rangle$	$ -\rangle$	$Z^8 \otimes I^{45} \otimes I^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_1^+\rangle$	$3GHZ_2^-\rangle$	$ +\rangle$	$I^8 \otimes I^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_1^+\rangle$	$3GHZ_2^-\rangle$	$ -\rangle$	$Z^8 \otimes I^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_1^-\rangle$	$3GHZ_1^+\rangle$	$ +\rangle$	$I^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_1^-\rangle$	$3GHZ_1^+\rangle$	$ -\rangle$	$Z^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_1^-\rangle$	$3GHZ_1^-\rangle$	$ +\rangle$	$I^8 \otimes (-Z \otimes I)^{45} \otimes (XZ \otimes X)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_1^-\rangle$	$3GHZ_1^-\rangle$	$ -\rangle$	$Z^8 \otimes (-Z \otimes I)^{45} \otimes (XZ \otimes X)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_1^-\rangle$	$3GHZ_2^+\rangle$	$ +\rangle$	$I^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes I^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_1^-\rangle$	$3GHZ_2^+\rangle$	$ -\rangle$	$Z^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes I^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_1^-\rangle$	$3GHZ_2^-\rangle$	$ +\rangle$	$I^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_1^-\rangle$	$3GHZ_2^-\rangle$	$ -\rangle$	$Z^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_2^+\rangle$	$3GHZ_1^+\rangle$	$ +\rangle$	$I^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_2^+\rangle$	$3GHZ_1^+\rangle$	$ -\rangle$	$Z^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_2^+\rangle$	$3GHZ_1^-\rangle$	$ +\rangle$	$I^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_2^+\rangle$	$3GHZ_1^-\rangle$	$ -\rangle$	$Z^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_2^+\rangle$	$3GHZ_2^+\rangle$	$ +\rangle$	$I^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes I^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_2^+\rangle$	$3GHZ_2^+\rangle$	$ -\rangle$	$Z^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes I^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_2^+\rangle$	$3GHZ_2^-\rangle$	$ +\rangle$	$I^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_2^+\rangle$	$3GHZ_2^-\rangle$	$ -\rangle$	$Z^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_2^-\rangle$	$3GHZ_1^+\rangle$	$ +\rangle$	$I^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_2^-\rangle$	$3GHZ_1^+\rangle$	$ -\rangle$	$Z^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_2^-\rangle$	$3GHZ_1^-\rangle$	$ +\rangle$	$I^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_2^-\rangle$	$3GHZ_1^-\rangle$	$ -\rangle$	$Z^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_2^-\rangle$	$3GHZ_2^+\rangle$	$ +\rangle$	$I^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes I^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_2^-\rangle$	$3GHZ_2^+\rangle$	$ -\rangle$	$Z^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes I^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_2^-\rangle$	$3GHZ_2^-\rangle$	$ +\rangle$	$I^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \phi^+\rangle$	$3GHZ_2^-\rangle$	$3GHZ_2^-\rangle$	$ -\rangle$	$Z^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$

Charlie の結果	Alice の結果	Bob の結果	David の結果	ユニタリ操作
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_1^+$	$ +\rangle$	$Z^8 \otimes I^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_1^+$	$ -\rangle$	$I^8 \otimes I^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_1^-$	$ +\rangle$	$Z^8 \otimes I^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_1^-$	$ -\rangle$	$I^8 \otimes I^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_2^+$	$ +\rangle$	$Z^8 \otimes I^{45} \otimes I^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_2^+$	$ -\rangle$	$I^8 \otimes I^{45} \otimes I^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_2^-$	$ +\rangle$	$Z^8 \otimes I^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_2^-$	$ -\rangle$	$I^8 \otimes I^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_1^+$	$ +\rangle$	$Z^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_1^+$	$ -\rangle$	$I^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_1^-$	$ +\rangle$	$Z^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_1^-$	$ -\rangle$	$I^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_2^+$	$ +\rangle$	$Z^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes I^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_2^+$	$ -\rangle$	$I^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes I^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_2^-$	$ +\rangle$	$Z^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_2^-$	$ -\rangle$	$I^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_1^+$	$ +\rangle$	$Z^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_1^+$	$ -\rangle$	$I^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_1^-$	$ +\rangle$	$Z^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_1^-$	$ -\rangle$	$I^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_2^+$	$ +\rangle$	$Z^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes I^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_2^+$	$ -\rangle$	$I^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes I^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_2^-$	$ +\rangle$	$Z^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_2^-$	$ -\rangle$	$I^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_1^+$	$ +\rangle$	$Z^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_1^+$	$ -\rangle$	$I^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_1^-$	$ +\rangle$	$Z^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_1^-$	$ -\rangle$	$I^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_2^+$	$ +\rangle$	$Z^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes I^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_2^+$	$ -\rangle$	$I^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes I^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_2^-$	$ +\rangle$	$Z^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \phi^-\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_2^-$	$ -\rangle$	$I^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$

Charlie の結果	Alice の結果	Bob の結果	David の結果	ユニタリ操作
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_1^+$	$ +\rangle$	$X^8 \otimes I^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_1^+$	$ -\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes I^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_1^-$	$ +\rangle$	$X^8 \otimes I^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_1^-$	$ -\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes I^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_2^+$	$ +\rangle$	$X^8 \otimes I^{45} \otimes I^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_2^+$	$ -\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes I^{45} \otimes I^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_2^-$	$ +\rangle$	$X^8 \otimes I^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_2^-$	$ -\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes I^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_1^+$	$ +\rangle$	$X^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_1^+$	$ -\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_1^-$	$ +\rangle$	$X^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_1^-$	$ -\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_2^+$	$ +\rangle$	$X^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes I^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_2^+$	$ -\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes I^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_2^-$	$ +\rangle$	$X^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_2^-$	$ -\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_1^+$	$ +\rangle$	$X^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_1^+$	$ -\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_1^-$	$ +\rangle$	$X^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_1^-$	$ -\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_2^+$	$ +\rangle$	$X^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes I^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_2^+$	$ -\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes I^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_2^-$	$ +\rangle$	$X^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_2^-$	$ -\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (X \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_1^+$	$ +\rangle$	$X^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_1^+$	$ -\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_1^-$	$ +\rangle$	$X^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_1^-$	$ -\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_2^+$	$ +\rangle$	$X^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes I^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_2^+$	$ -\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes I^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_2^-$	$ +\rangle$	$X^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \psi^+\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_2^-$	$ -\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$

Charlie の結果	Alice の結果	Bob の結果	David の結果	ユニタリ操作
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_1^+$	$ +\rangle$	$(ZX)^8 \otimes I^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_1^+$	$ -\rangle$	$-(X)^8 \otimes I^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_1^-$	$ +\rangle$	$(ZX)^8 \otimes I^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_1^-$	$ -\rangle$	$-(X)^8 \otimes I^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_2^+$	$ +\rangle$	$(ZX)^8 \otimes I^{45} \otimes I^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_2^+$	$ -\rangle$	$-(X)^8 \otimes I^{45} \otimes I^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_2^-$	$ +\rangle$	$(ZX)^8 \otimes I^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_1^+$	$3GHZ_2^-$	$ -\rangle$	$-(X)^8 \otimes I^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_1^+$	$ +\rangle$	$(ZX)^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_1^+$	$ -\rangle$	$-(X)^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_1^-$	$ +\rangle$	$(ZX)^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_1^-$	$ -\rangle$	$-(X)^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (X \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_2^+$	$ +\rangle$	$(ZX)^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes I^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_2^+$	$ -\rangle$	$-(X)^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes I^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_2^-$	$ +\rangle$	$(ZX)^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_1^-$	$3GHZ_2^-$	$ -\rangle$	$-(X)^8 \otimes (Z \otimes I)^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_1^+$	$ +\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (-(Z \otimes I))^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_1^+$	$ -\rangle$	$(X)^8 \otimes (-(Z \otimes I))^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_1^-$	$ +\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (-(Z \otimes I))^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_1^-$	$ -\rangle$	$(X)^8 \otimes (-(Z \otimes I))^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_2^+$	$ +\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (-(Z \otimes I))^{45} \otimes I^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_2^+$	$ -\rangle$	$(X)^8 \otimes (-(Z \otimes I))^{45} \otimes I^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_2^-$	$ +\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (-(Z \otimes I))^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_2^+$	$3GHZ_2^-$	$ -\rangle$	$(X)^8 \otimes (-(Z \otimes I))^{45} \otimes (Z \otimes I)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_1^+$	$ +\rangle$	$(ZX)^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_1^+$	$ -\rangle$	$-(X)^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_1^-$	$ +\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_1^-$	$ -\rangle$	$(X)^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (ZX \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_2^+$	$ +\rangle$	$(ZX)^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes I^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_2^+$	$ -\rangle$	$-(X)^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes I^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_2^-$	$ +\rangle$	$-(ZX)^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$
$ \psi^-\rangle$	$3GHZ_2^-$	$3GHZ_2^-$	$ -\rangle$	$(X)^8 \otimes (ZX \otimes X)^{45} \otimes (Z \otimes X)^{67}$

CyclicACQT 量子回路

先ほどの CyclicACQT プロトコルの例を量子回路で表すと以下のような図 2.15 になる。

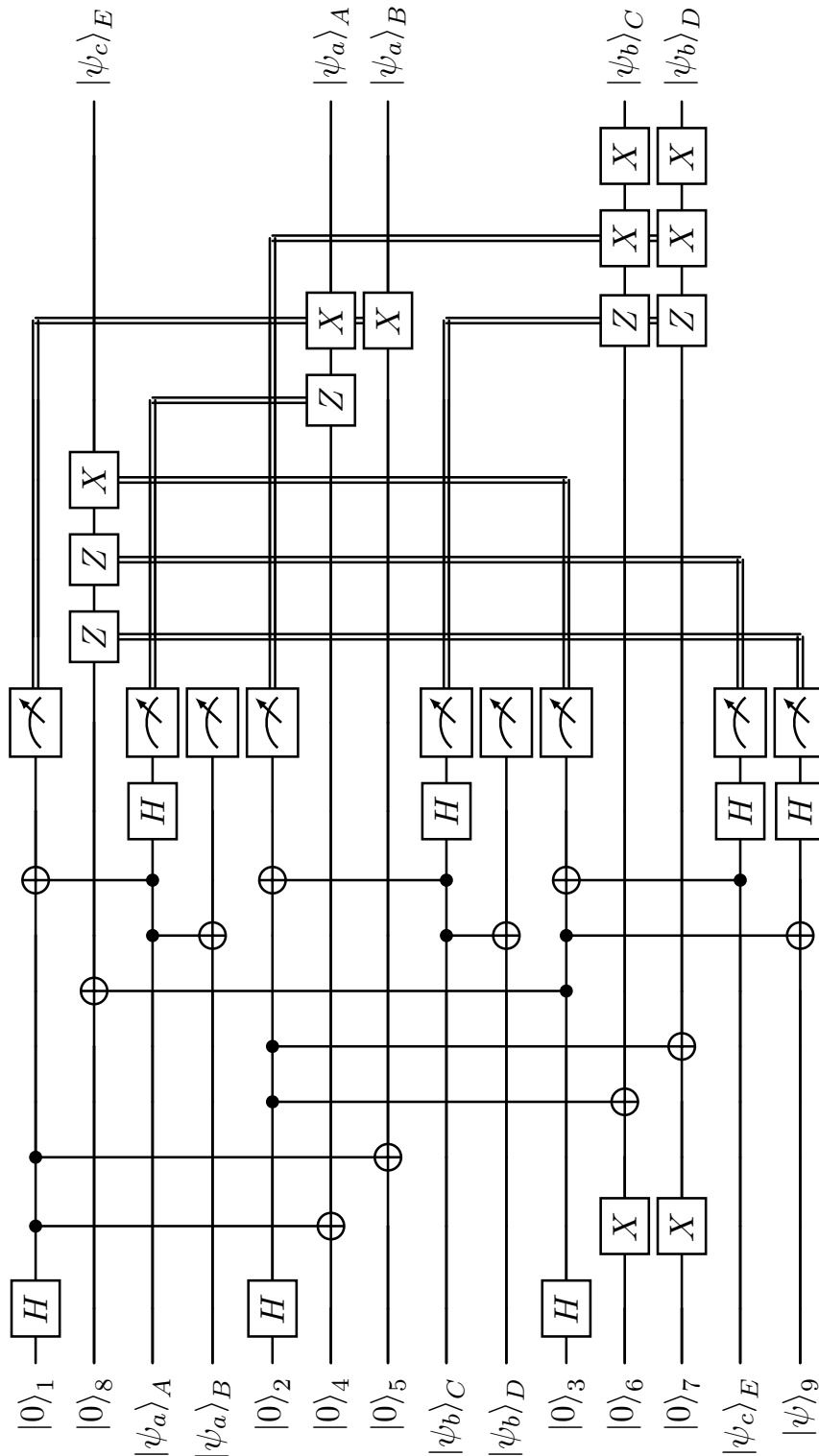


図 2.15: CyclicACQT の量子回路

## Quantum Gate Teleportation (QGT)

量子ゲートテレポーテーション (Quantum Gate Teleportation, QGT) とは、量子状態の転送に加えて、測定結果に依存した補正操作を施すことで、物理的に離れた量子ビット間に量子ゲート  $U$  を適用するプロトコルである。本節では、Huang ら [19] によって提唱された、測定に基づく補正操作を行うことで、遠隔地の 2 量子ビット間で CNOT ゲートを適用する QGT の通信手順を示す。

### ステップ 1: 前準備

通信の参加者として、Alice と Bob をおく。Alice と Bob は転送対象となる 2 量子ビットの未知状態  $|\psi\rangle_{1,4}$  と、量子チャンネルとして Bell 状態  $|\phi^+\rangle_{2,3}$  を用意する。Alice は量子ビット 1, 2 を、Bob は量子ビット 3, 4 を所有する。このとき、転送対象となる未知の量子状態を次式で表す。

$$|\psi\rangle_{1,4} = a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle + a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle.$$

$$|\phi^+\rangle_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)_{23}.$$

システム全体の初期状態は次のように表される。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{1,2,3,4} &= |\psi\rangle_{1,4} |\phi^+\rangle_{2,3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle + a_2 |10\rangle + a_3 |11\rangle)_{1,4} (|00\rangle + |11\rangle)_{23} \end{aligned}$$

次に、Alice が所有する量子ビット 1, 2 に、Bob が所有する量子ビット 3, 4 に対して CNOT ゲートを適用する。その際、制御ビットを量子ビット 1, 3 に、ターゲットビットを量子ビット 2, 4 とする  $\{C_{1,2}, C_{3,4}\}$ 。ここで、 $C_{i,j}$  は量子ビット  $i$  を制御ビット、 $j$  をターゲットビットとする CNOT ゲートを表す。この操作により、全体の状態は次のように展開される。

$$\begin{aligned} C_{3,4} C_{1,2} |\psi\rangle_{1,2,3,4} &= |0\rangle_2 |+\rangle_3 C_{1,4} |\psi\rangle_{1,4} + |0\rangle_2 |-\rangle_3 Z_1 C_{1,4} |\psi\rangle_{1,4} \\ &\quad + |1\rangle_2 |+\rangle_3 X_4 C_{1,4} |\psi\rangle_{1,4} + |1\rangle_2 |-\rangle_3 Z_1 X_4 C_{1,4} |\psi\rangle_{1,4}. \end{aligned}$$

### ステップ 2: 量子測定

Alice は自身で所有する量子ビット 2 を Z 基底  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  で、Bob は自身で所有する量子ビット 3 を X 基底  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  で測定を行う。Alice と Bob が測定を行い結果を得ると、残りの量子ビット 1, 4 は測定結果に対応する状態へ崩壊する。例として、Alice の測定結果が  $|0\rangle$ 、Bob の測定結果が  $|-\rangle$  であった場合、量子ビット 1, 4 の状態は次のように崩壊する。

$$C_{3,4} C_{1,2} |\psi\rangle_{1,2,3,4} = |0\rangle_2 |-\rangle_3 Z_1 C_{1,4} |\psi\rangle_{1,4}.$$

### ステップ 3: 古典通信と補正操作

Alice と Bob は互いの測定結果を古典通信路を介して共有する。得られた 2 量子ビットの古典情報に基づき、目標とする CNOT ゲートの適用結果を得るために必要な補正操作を行う。測定結果に対応するユニタリ操作を表 2.10 に示す。これにより、遠隔地の 2 者間で CNOT ゲート  $C_{1,4}$  が実現され、QGT プロトコルが完了する。

表 2.10: Alice, Bob の測定結果に対するユニタリ操作

Alice の結果	Bob の測定結果	ユニタリ操作
$ 0\rangle_2$	$ +\rangle_3$	$I_1 \otimes I_4$
$ 0\rangle_2$	$ -\rangle_3$	$Z^1 \otimes I_4$
$ 1\rangle_2$	$ +\rangle_3$	$I_1 \otimes X^4$
$ 1\rangle_2$	$ -\rangle_3$	$Z^1 \otimes X^4$

## QGT 量子回路

先ほどの QGT プロトコルの例を量子回路で表すと以下のような図 2.16 になる。

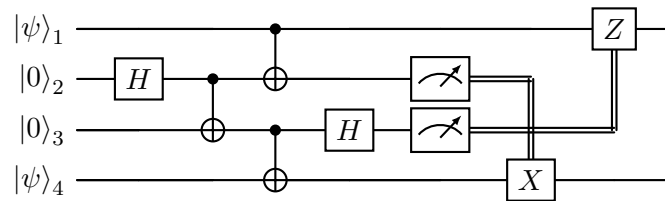


図 2.16: QGT 量子回路

## Cyclic Asymmetric Bidirectional Controlled Quantum Teleportation (CyclicABCQT)

循環非対称双方向制御量子テレポーテーション (Cyclic Asymmetric Bidirectional Controlled Quantum Teleportation, CyclicABCQT) は, 3 人以上の参加者が互いに異なる量子ビット数の未知状態を循環的に転送し, さらに制御者の協力を必要とするプロトコルである. 本節では, Xu ら [20] によって提唱された 17 量子ビットの量子もつれ状態を量子チャンネルとして用いた 4 者間 (Alice, Bob, Charlie, David) の CyclicABCQT の通信手順を示す.

### ステップ 1 : 前準備

通信の参加者として, Alice, Bob, Charlie, David をおく. Alice は未知の 1 量子ビット状態と 2 量子ビット状態  $|\psi_a\rangle_A$ ,  $|\psi_a\rangle_{B,C}$  を所有し, Bob は未知の 1 量子ビット状態と 3 量子ビット状態  $|\psi_b\rangle_D$ ,  $|\psi_b\rangle_{E,F,G}$  を所有し, Charlie は未知の 1 量子ビット状態と 2 量子ビット状態  $|\psi_c\rangle_H$ ,  $|\psi_c\rangle_{I,J}$  を所有している. このとき, 転送対象となる未知の量子状態を次式で表す.

$$\begin{aligned} |\psi_a\rangle_A &= a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle, & |\psi_a\rangle_{B,C} &= a_2 |00\rangle + a_3 |11\rangle, \\ |\psi_b\rangle_D &= b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle, & |\psi_b\rangle_{E,F,G} &= b_2 |000\rangle + b_3 |111\rangle, \\ |\psi_c\rangle_H &= c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle, & |\psi_c\rangle_{I,J} &= c_2 |00\rangle + c_3 |11\rangle. \end{aligned}$$

ただし,  $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$  かつ

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 = |a_2|^2 + |a_3|^2 = |b_0|^2 + |b_1|^2 = |b_2|^2 + |b_3|^2 = |c_0|^2 + |c_1|^2 = |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1 \text{ とする.}$$

通信の参加者である 4 者 (Alice, Bob, Charlie, David) はあらかじめ 17 量子ビットの量子もつれ状態を量子チャンネルとして共有する. ここで, Alice は量子ビット 1, 3, 9, 10, 11, 13 を, Bob は量子ビット 2, 6, 8, 15, 16 を, Charlie は量子ビット 4, 5, 7, 12, 14 を, David は量子ビット 17 を所有する.

$$\begin{aligned} &|\psi\rangle_{1,2,\dots,16,17} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\phi^+\rangle_{1,2} |3\text{GHZ}_1^+\rangle_{3,4,5} |\phi^+\rangle_{6,7} |4\text{GHZ}_1^+\rangle_{8,9,10,11} |\phi^+\rangle_{12,13} |3\text{GHZ}_1^+\rangle_{14,15,16} |0\rangle_{17} \right. \\ &\quad \left. + |\phi^-\rangle_{1,2} |3\text{GHZ}_2^+\rangle_{3,4,5} |\phi^-\rangle_{6,7} |4\text{GHZ}_2^+\rangle_{8,9,10,11} |\phi^-\rangle_{12,13} |3\text{GHZ}_2^+\rangle_{14,15,16} |1\rangle_{17} \right). \end{aligned}$$

ここで,  $|\phi^\pm\rangle, |3\text{GHZ}_1^+\rangle, |3\text{GHZ}_2^+\rangle, |4\text{GHZ}_1^+\rangle, |4\text{GHZ}_2^+\rangle$  は次のように表される.

$$\begin{aligned} |\phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \\ |3\text{GHZ}_1^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle), & |3\text{GHZ}_2^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|001\rangle + |110\rangle), \\ |4\text{GHZ}_1^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1111\rangle), & |4\text{GHZ}_2^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0001\rangle + |1110\rangle). \end{aligned}$$

システム全体 (27 量子ビット) の初期状態は次式で表される.

$$\begin{aligned}
& |\psi\rangle_{A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,1,2,\dots,17} \\
&= |\psi\rangle_A |\psi\rangle_{B,C} |\psi\rangle_D |\psi\rangle_{E,F,G} |\psi\rangle_H |\psi\rangle_{I,J} |\psi\rangle_{1,2,\dots,17} \\
&= (a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle)_A (b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle)_D (c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle)_H \\
&\quad \otimes (a_2 |00\rangle + a_3 |11\rangle)_{B,C} (b_2 |000\rangle + b_3 |111\rangle)_{E,F,G} (c_2 |00\rangle + c_3 |11\rangle)_{I,J} \\
&\quad \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi^+\rangle_{1,2} |3GHZ_1^+\rangle_{3,4,5} |\phi^+\rangle_{6,7} |4GHZ_1^+\rangle_{8,9,10,11} |\phi^+\rangle_{12,13} |3GHZ_1^+\rangle_{14,15,16} |0\rangle_{17} \\
&\quad + |\phi^-\rangle_{1,2} |3GHZ_2^+\rangle_{3,4,5} |\phi^-\rangle_{6,7} |4GHZ_2^+\rangle_{8,9,10,11} |\phi^-\rangle_{12,13} |3GHZ_2^+\rangle_{14,15,16} |1\rangle_{17}).
\end{aligned}$$

### ステップ 2 : 送信者と制御者による測定

Alice は自身が所有する量子ビット  $A, 1$  に対して, Bob は自身が所有する量子ビット  $D, 6$  に対して, Charlie は自身が所有する量子ビット  $H, 12$  に対してそれぞれ Bell 測定  $\{|\phi^\pm\rangle, |\psi^\pm\rangle\}$  を行う. 3 者 (Alice, Bob, Charlie) が測定を行い測定結果を得ると, 残りの量子ビット  $B, C, E, F, G, I, J, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17$  はそれに対応する状態へ崩壊する. 例として, Alice の測定結果が  $|\phi^+\rangle_{A,1}$ , Bob の測定結果が  $|\phi^-\rangle_{D,6}$ , Charlie の結果が  $|\psi^+\rangle_{H,4}$ , であった場合, 残りの量子ビットは次のように崩壊する.

$$\begin{aligned}
& |\psi\rangle_{B,C,E,F,G,I,J,2,3,4,5,7,8,9,10,11,13,14,15,16,17} \\
&= {}_{H,12} \langle \psi^+ | {}_{D,6} \langle \phi^- | {}_{A,1} \langle \phi^+ | \psi \rangle_{1,2,\dots,16,17} \\
&= (a_2 |00\rangle + a_3 |11\rangle)_{B,C} (b_2 |000\rangle + b_3 |111\rangle)_{E,F,G} (c_2 |00\rangle + c_3 |11\rangle)_{I,J} \\
&\quad \otimes \frac{1}{8\sqrt{2}} \left[ (a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle)_2 |3GHZ_1^+\rangle_{3,4,5} (b_0 |0\rangle - b_1 |1\rangle)_7 \right. \\
&\quad \quad \otimes |4GHZ_1^+\rangle_{8,9,10,11} (c_0 |1\rangle + c_1 |0\rangle)_{13} |3GHZ_1^+\rangle_{14,15,16} |0\rangle_{17} \\
&\quad \quad + (a_0 |1\rangle + a_1 |0\rangle)_2 |3GHZ_2^+\rangle_{3,4,5} (b_0 |1\rangle - b_1 |0\rangle)_7 \\
&\quad \quad \left. \otimes |4GHZ_1^+\rangle_{8,9,10,11} (c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle)_{13} |3GHZ_2^+\rangle_{14,15,16} |1\rangle_{17} \right].
\end{aligned}$$

続いて, Alice と Charlie はそれぞれ量子ビット  $B, C, 3$  および量子ビット  $I, J, 14$  に対して 3 量子ビット GHZ 基底  $|3GHZ_{1,2}^\pm\rangle$  で測定を行い, Bob は量子ビット  $E, F, G, 8$  に対して 4 量子ビット GHZ 基底  $|4GHZ_{1,2}^\pm\rangle$  で測定を行う. 測定結果は古典通信を用いて, Alice から Charlie へ, Charlie から Bob へ, Bob から Alice へ送信する. 3 量子ビットおよび 4 量子ビットの GHZ 基底は式で与えられる.

$$\begin{aligned}
|3GHZ_1^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle \pm |111\rangle), & |3GHZ_2^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|001\rangle \pm |110\rangle), \\
|4GHZ_1^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle \pm |1111\rangle), & |4GHZ_2^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0001\rangle \pm |1110\rangle).
\end{aligned}$$

3 者 (Alice, Bob, Charlie) が測定を行い測定結果を得ると, 残りの量子ビット 2, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17 はそれに対応する状態へ崩壊する. 例として, Alice の測定結果が  $|3GHZ_1^-\rangle$ , Bob の測定結果が  $|4GHZ_2^+\rangle$ , Charlie の結果が  $|3GHZ_2^-\rangle$ , であった場合, 残りの量子ビット 2,

4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17 の状態は次のように崩壊する.

$$\begin{aligned}
& |\psi\rangle_{2,4,5,7,9,10,11,13,15,16,17} \\
&= {}_{I,J,14} \langle 3GHZ^4 |_{E,F,G,8} \langle 4GHZ_2^+ |_{B,C,3} \langle 3GHZ^2 |_{H,12} \langle \psi^+ |_{D,6} \langle \phi^- |_{A,1} \langle \phi^+ | \psi \rangle_{1,2,\dots,16,17} \\
&= \frac{1}{64\sqrt{2}} \left[ (a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle)_2 (a_2 |00\rangle - a_3 |11\rangle)_{4,5} (b_0 |0\rangle - b_1 |1\rangle)_7 \right. \\
&\quad \otimes (b_2 |111\rangle + b_3 |000\rangle)_{9,10,11} (c_0 |1\rangle + c_1 |0\rangle)_{13} (c_2 |11\rangle - c_3 |00\rangle)_{15,16} |0\rangle_{17} \\
&\quad + (a_0 |1\rangle + a_1 |0\rangle)_2 (a_2 |01\rangle - a_3 |10\rangle)_{4,5} (b_0 |1\rangle - b_1 |0\rangle)_7 \\
&\quad \left. \otimes (b_2 |110\rangle + b_3 |001\rangle)_{9,10,11} (c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle)_{13} (c_2 |10\rangle - c_3 |01\rangle)_{15,16} |1\rangle_{17} \right].
\end{aligned}$$

さらに制御者 David は量子ビット 17 を Z 基底  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  で測定し, その結果を 3 者 (Alice, Bob, Charlie) へ送信する. 例として, David の測定結果が  $|0\rangle_{17}$  のとき, 残りの量子ビット 2, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 16 の状態は次のように崩壊する.

$$\begin{aligned}
& |\psi\rangle_{2,4,5,7,9,10,11,13,15,16} \\
&= {}_{17} \langle 0 |_{I,J,14} \langle 3GHZ^4 |_{E,F,G,8} \langle 4GHZ_2^+ |_{B,C,3} \langle 3GHZ^2 |_{H,12} \langle \psi^+ |_{D,6} \langle \phi^- |_{A,1} \langle \phi^+ | \psi \rangle_{\text{total}} \\
&= \frac{1}{64\sqrt{2}} (a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle)_2 (a_2 |00\rangle - a_3 |11\rangle)_{4,5} (b_0 |0\rangle - b_1 |1\rangle)_7 \\
&\quad \otimes (b_2 |111\rangle + b_3 |000\rangle)_{9,10,11} (c_0 |1\rangle + c_1 |0\rangle)_{13} (c_2 |11\rangle - c_3 |00\rangle)_{15,16}.
\end{aligned}$$

#### ステップ 4: 受信者による再構築

3 者 (Alice, Bob, Charlie) は送信されてきた測定結果に基づき, 量子ビット 2, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 16 に局所ユニタリ操作を行うことで, 互いの未知状態

$$|\psi_a\rangle_A, |\psi_a\rangle_{B,C}, |\psi_b\rangle_D, |\psi_b\rangle_{E,F,G}, |\psi_c\rangle_H, |\psi_c\rangle_{I,J}$$

を再構築できる. Alice, Bob, Charlie の測定結果に対するユニタリ操作を表 2.11 に, Alice, Bob, David の測定結果に対するユニタリ操作を表 2.12 に, Bob, Charlie, David の測定結果に対するユニタリ操作を表 2.13 に示す. 循環的かつ非対称な量子状態の転送が完了する.

表 2.11: Alice, Bob, Charlie の測定結果に対するユニタリ操作

Charlie の結果	Alice の結果	Bob の結果	ユニタリ操作
$3\text{GHZ}_1^+ \rangle_{I,J,14}$	$ \phi^+\rangle_{A,1}$	$ 0\rangle_{17}$	$I^{15} \otimes I^{16} \otimes I^2$
$3\text{GHZ}_1^+ \rangle_{I,J,14}$	$ \phi^-\rangle_{A,1}$	$ 0\rangle_{17}$	$I^{15} \otimes I^{16} \otimes (Z)^2$
$3\text{GHZ}_1^+ \rangle_{I,J,14}$	$ \psi^+\rangle_{A,1}$	$ 0\rangle_{17}$	$I^{15} \otimes I^{16} \otimes (X)^2$
$3\text{GHZ}_1^+ \rangle_{I,J,14}$	$ \psi^-\rangle_{A,1}$	$ 0\rangle_{17}$	$I^{15} \otimes I^{16} \otimes (ZX)^2$
$3\text{GHZ}_1^- \rangle_{I,J,14}$	$ \phi^+\rangle_{A,1}$	$ 0\rangle_{17}$	$(Z)^{15} \otimes I^{16} \otimes I^2$
$3\text{GHZ}_1^- \rangle_{I,J,14}$	$ \phi^-\rangle_{A,1}$	$ 0\rangle_{17}$	$(Z)^{15} \otimes I^{16} \otimes (Z)^2$
$3\text{GHZ}_1^- \rangle_{I,J,14}$	$ \psi^+\rangle_{A,1}$	$ 0\rangle_{17}$	$(Z)^{15} \otimes I^{16} \otimes (X)^2$
$3\text{GHZ}_1^- \rangle_{I,J,14}$	$ \psi^-\rangle_{A,1}$	$ 0\rangle_{17}$	$(Z)^{15} \otimes I^{16} \otimes (ZX)^2$
$3\text{GHZ}_2^+ \rangle_{I,J,14}$	$ \phi^+\rangle_{A,1}$	$ 0\rangle_{17}$	$(X)^{15} \otimes (X)^{16} \otimes I^2$
$3\text{GHZ}_2^+ \rangle_{I,J,14}$	$ \phi^-\rangle_{A,1}$	$ 0\rangle_{17}$	$(X)^{15} \otimes (X)^{16} \otimes (Z)^2$
$3\text{GHZ}_2^+ \rangle_{I,J,14}$	$ \psi^+\rangle_{A,1}$	$ 0\rangle_{17}$	$(X)^{15} \otimes (X)^{16} \otimes (X)^2$
$3\text{GHZ}_2^+ \rangle_{I,J,14}$	$ \psi^-\rangle_{A,1}$	$ 0\rangle_{17}$	$(X)^{15} \otimes (X)^{16} \otimes (ZX)^2$
$3\text{GHZ}_2^- \rangle_{I,J,14}$	$ \phi^+\rangle_{A,1}$	$ 0\rangle_{17}$	$(ZX)^{15} \otimes (X)^{16} \otimes I^2$
$3\text{GHZ}_2^- \rangle_{I,J,14}$	$ \phi^-\rangle_{A,1}$	$ 0\rangle_{17}$	$(ZX)^{15} \otimes (X)^{16} \otimes (Z)^2$
$3\text{GHZ}_2^- \rangle_{I,J,14}$	$ \psi^+\rangle_{A,1}$	$ 0\rangle_{17}$	$(ZX)^{15} \otimes (X)^{16} \otimes (X)^2$
$3\text{GHZ}_2^- \rangle_{I,J,14}$	$ \psi^-\rangle_{A,1}$	$ 0\rangle_{17}$	$(ZX)^{15} \otimes (X)^{16} \otimes (ZX)^2$
$3\text{GHZ}_1^+ \rangle_{I,J,14}$	$ \phi^+\rangle_{A,1}$	$ 1\rangle_{17}$	$I^{15} \otimes (IX)^{16} \otimes (X)^2$
$3\text{GHZ}_1^+ \rangle_{I,J,14}$	$ \phi^-\rangle_{A,1}$	$ 1\rangle_{17}$	$I^{15} \otimes (IX)^{16} \otimes (ZX)^2$
$3\text{GHZ}_1^+ \rangle_{I,J,14}$	$ \psi^+\rangle_{A,1}$	$ 1\rangle_{17}$	$I^{15} \otimes (IX)^{16} \otimes I^2$
$3\text{GHZ}_1^+ \rangle_{I,J,14}$	$ \psi^-\rangle_{A,1}$	$ 1\rangle_{17}$	$I^{15} \otimes (IX)^{16} \otimes (Z)^2$
$3\text{GHZ}_1^- \rangle_{I,J,14}$	$ \phi^+\rangle_{A,1}$	$ 1\rangle_{17}$	$(Z)^{15} \otimes (IX)^{16} \otimes (X)^2$
$3\text{GHZ}_1^- \rangle_{I,J,14}$	$ \phi^-\rangle_{A,1}$	$ 1\rangle_{17}$	$(Z)^{15} \otimes (IX)^{16} \otimes (ZX)^2$
$3\text{GHZ}_1^- \rangle_{I,J,14}$	$ \psi^+\rangle_{A,1}$	$ 1\rangle_{17}$	$(Z)^{15} \otimes (IX)^{16} \otimes I^2$
$3\text{GHZ}_1^- \rangle_{I,J,14}$	$ \psi^-\rangle_{A,1}$	$ 1\rangle_{17}$	$(Z)^{15} \otimes (IX)^{16} \otimes (Z)^2$
$3\text{GHZ}_2^+ \rangle_{I,J,14}$	$ \phi^+\rangle_{A,1}$	$ 1\rangle_{17}$	$(X)^{15} \otimes I^{16} \otimes (X)^2$
$3\text{GHZ}_2^+ \rangle_{I,J,14}$	$ \phi^-\rangle_{A,1}$	$ 1\rangle_{17}$	$(X)^{15} \otimes I^{16} \otimes (ZX)^2$
$3\text{GHZ}_2^+ \rangle_{I,J,14}$	$ \psi^+\rangle_{A,1}$	$ 1\rangle_{17}$	$(X)^{15} \otimes I^{16} \otimes I^2$
$3\text{GHZ}_2^+ \rangle_{I,J,14}$	$ \psi^-\rangle_{A,1}$	$ 1\rangle_{17}$	$(X)^{15} \otimes I^{16} \otimes (Z)^2$
$3\text{GHZ}_2^- \rangle_{I,J,14}$	$ \phi^+\rangle_{A,1}$	$ 1\rangle_{17}$	$(ZX)^{15} \otimes I^{16} \otimes (X)^2$
$3\text{GHZ}_2^- \rangle_{I,J,14}$	$ \phi^-\rangle_{A,1}$	$ 1\rangle_{17}$	$(ZX)^{15} \otimes I^{16} \otimes (ZX)^2$
$3\text{GHZ}_2^- \rangle_{I,J,14}$	$ \psi^+\rangle_{A,1}$	$ 1\rangle_{17}$	$(ZX)^{15} \otimes I^{16} \otimes I^2$
$3\text{GHZ}_2^- \rangle_{I,J,14}$	$ \psi^-\rangle_{A,1}$	$ 1\rangle_{17}$	$(ZX)^{15} \otimes I^{16} \otimes (Z)^2$

表 2.12: Alice, Bob, David の測定結果に対するユニタリ操作

Alice の結果	Bob の結果	David の結果	ユニタリ操作
$3\text{GHZ}_1^+ \rangle_{B,C,3}$	$ \phi^+\rangle_{D,6}$	$ 0\rangle_{17}$	$I^4 \otimes I^5 \otimes I^7$
$3\text{GHZ}_1^+ \rangle_{B,C,3}$	$ \phi^-\rangle_{D,6}$	$ 0\rangle_{17}$	$I^4 \otimes I^5 \otimes (Z)^7$
$3\text{GHZ}_1^+ \rangle_{B,C,3}$	$ \psi^+\rangle_{D,6}$	$ 0\rangle_{17}$	$I^4 \otimes I^5 \otimes (X)^7$
$3\text{GHZ}_1^+ \rangle_{B,C,3}$	$ \psi^-\rangle_{D,6}$	$ 0\rangle_{17}$	$I^4 \otimes I^5 \otimes (ZX)^7$
$3\text{GHZ}_1^- \rangle_{B,C,3}$	$ \phi^+\rangle_{D,6}$	$ 0\rangle_{17}$	$(Z)^4 \otimes I^5 \otimes I^7$
$3\text{GHZ}_1^- \rangle_{B,C,3}$	$ \phi^-\rangle_{D,6}$	$ 0\rangle_{17}$	$(Z)^4 \otimes I^5 \otimes (Z)^7$
$3\text{GHZ}_1^- \rangle_{B,C,3}$	$ \psi^+\rangle_{D,6}$	$ 0\rangle_{17}$	$(Z)^4 \otimes I^5 \otimes (X)^7$
$3\text{GHZ}_1^- \rangle_{B,C,3}$	$ \psi^-\rangle_{D,6}$	$ 0\rangle_{17}$	$(Z)^4 \otimes I^5 \otimes (ZX)^7$
$3\text{GHZ}_2^+ \rangle_{B,C,3}$	$ \phi^+\rangle_{D,6}$	$ 0\rangle_{17}$	$(X)^4 \otimes (X)^5 \otimes I^7$
$3\text{GHZ}_2^+ \rangle_{B,C,3}$	$ \phi^-\rangle_{D,6}$	$ 0\rangle_{17}$	$(X)^4 \otimes (X)^5 \otimes (Z)^7$
$3\text{GHZ}_2^+ \rangle_{B,C,3}$	$ \psi^+\rangle_{D,6}$	$ 0\rangle_{17}$	$(X)^4 \otimes (X)^5 \otimes (X)^7$
$3\text{GHZ}_2^+ \rangle_{B,C,3}$	$ \psi^-\rangle_{D,6}$	$ 0\rangle_{17}$	$(X)^4 \otimes (X)^5 \otimes (ZX)^7$
$3\text{GHZ}_2^- \rangle_{B,C,3}$	$ \phi^+\rangle_{D,6}$	$ 0\rangle_{17}$	$(ZX)^4 \otimes (X)^5 \otimes I^7$
$3\text{GHZ}_2^- \rangle_{B,C,3}$	$ \phi^-\rangle_{D,6}$	$ 0\rangle_{17}$	$(ZX)^4 \otimes (X)^5 \otimes (Z)^7$
$3\text{GHZ}_2^- \rangle_{B,C,3}$	$ \psi^+\rangle_{D,6}$	$ 0\rangle_{17}$	$(ZX)^4 \otimes (X)^5 \otimes (X)^7$
$3\text{GHZ}_2^- \rangle_{B,C,3}$	$ \psi^-\rangle_{D,6}$	$ 0\rangle_{17}$	$(ZX)^4 \otimes (X)^5 \otimes (ZX)^7$
$3\text{GHZ}_1^+ \rangle_{B,C,3}$	$ \phi^+\rangle_{D,6}$	$ 1\rangle_{17}$	$I^4 \otimes (IX)^5 \otimes (X)^7$
$3\text{GHZ}_1^+ \rangle_{B,C,3}$	$ \phi^-\rangle_{D,6}$	$ 1\rangle_{17}$	$I^4 \otimes (IX)^5 \otimes (ZX)^7$
$3\text{GHZ}_1^+ \rangle_{B,C,3}$	$ \psi^+\rangle_{D,6}$	$ 1\rangle_{17}$	$I^4 \otimes (IX)^5 \otimes I^7$
$3\text{GHZ}_1^+ \rangle_{B,C,3}$	$ \psi^-\rangle_{D,6}$	$ 1\rangle_{17}$	$I^4 \otimes (IX)^5 \otimes (Z)^7$
$3\text{GHZ}_1^- \rangle_{B,C,3}$	$ \phi^+\rangle_{D,6}$	$ 1\rangle_{17}$	$(Z)^4 \otimes (IX)^5 \otimes (X)^7$
$3\text{GHZ}_1^- \rangle_{B,C,3}$	$ \phi^-\rangle_{D,6}$	$ 1\rangle_{17}$	$(Z)^4 \otimes (IX)^5 \otimes (ZX)^7$
$3\text{GHZ}_1^- \rangle_{B,C,3}$	$ \psi^+\rangle_{D,6}$	$ 1\rangle_{17}$	$(Z)^4 \otimes (IX)^5 \otimes I^7$
$3\text{GHZ}_1^- \rangle_{B,C,3}$	$ \psi^-\rangle_{D,6}$	$ 1\rangle_{17}$	$(Z)^4 \otimes (IX)^5 \otimes (Z)^7$
$3\text{GHZ}_2^+ \rangle_{B,C,3}$	$ \phi^+\rangle_{D,6}$	$ 1\rangle_{17}$	$(X)^4 \otimes I^5 \otimes (X)^7$
$3\text{GHZ}_2^+ \rangle_{B,C,3}$	$ \phi^-\rangle_{D,6}$	$ 1\rangle_{17}$	$(X)^4 \otimes I^5 \otimes (ZX)^7$
$3\text{GHZ}_2^+ \rangle_{B,C,3}$	$ \psi^+\rangle_{D,6}$	$ 1\rangle_{17}$	$(X)^4 \otimes I^5 \otimes I^7$
$3\text{GHZ}_2^+ \rangle_{B,C,3}$	$ \psi^-\rangle_{D,6}$	$ 1\rangle_{17}$	$(X)^4 \otimes I^5 \otimes (Z)^7$
$3\text{GHZ}_2^- \rangle_{B,C,3}$	$ \phi^+\rangle_{D,6}$	$ 1\rangle_{17}$	$(ZX)^4 \otimes I^5 \otimes (X)^7$
$3\text{GHZ}_2^- \rangle_{B,C,3}$	$ \phi^-\rangle_{D,6}$	$ 1\rangle_{17}$	$(ZX)^4 \otimes I^5 \otimes (ZX)^7$
$3\text{GHZ}_2^- \rangle_{B,C,3}$	$ \psi^+\rangle_{D,6}$	$ 1\rangle_{17}$	$(ZX)^4 \otimes I^5 \otimes I^7$
$3\text{GHZ}_2^- \rangle_{B,C,3}$	$ \psi^-\rangle_{D,6}$	$ 1\rangle_{17}$	$(ZX)^4 \otimes I^5 \otimes (Z)^7$

表 2.13: Bob, Charlie, David の測定結果に対するユニタリ操作

Bob の結果	Charlie の結果	David の結果	ユニタリ操作
$4\text{GHZ}_1^+ \rangle_{E,F,G,8}$	$ \phi^+\rangle_{C_{012}}$	$ 0\rangle_{17}$	$I^9 \otimes I^{10} \otimes I^{11} \otimes I^{13}$
$4\text{GHZ}_1^+ \rangle_{E,F,G,8}$	$ \phi^-\rangle_{C_{012}}$	$ 0\rangle_{17}$	$I^9 \otimes I^{10} \otimes I^{11} \otimes (Z)^{13}$
$4\text{GHZ}_1^+ \rangle_{E,F,G,8}$	$ \psi^+\rangle_{C_{012}}$	$ 0\rangle_{17}$	$I^9 \otimes I^{10} \otimes I^{11} \otimes (X)^{13}$
$4\text{GHZ}_1^+ \rangle_{E,F,G,8}$	$ \psi^-\rangle_{C_{012}}$	$ 0\rangle_{17}$	$I^9 \otimes I^{10} \otimes I^{11} \otimes (ZX)^{13}$
$4\text{GHZ}_1^- \rangle_{E,F,G,8}$	$ \phi^+\rangle_{C_{012}}$	$ 0\rangle_{17}$	$(Z)^9 \otimes I^{10} \otimes I^{11} \otimes I^{13}$
$4\text{GHZ}_1^- \rangle_{E,F,G,8}$	$ \phi^-\rangle_{C_{012}}$	$ 0\rangle_{17}$	$(Z)^9 \otimes I^{10} \otimes I^{11} \otimes (Z)^{13}$
$4\text{GHZ}_1^- \rangle_{E,F,G,8}$	$ \psi^+\rangle_{C_{012}}$	$ 0\rangle_{17}$	$(Z)^9 \otimes I^{10} \otimes I^{11} \otimes (X)^{13}$
$4\text{GHZ}_1^- \rangle_{E,F,G,8}$	$ \psi^-\rangle_{C_{012}}$	$ 0\rangle_{17}$	$(Z)^9 \otimes I^{10} \otimes I^{11} \otimes (ZX)^{13}$
$4\text{GHZ}_2^+ \rangle_{E,F,G,8}$	$ \phi^+\rangle_{C_{012}}$	$ 0\rangle_{17}$	$(X)^9 \otimes (X)^{10} \otimes (X)^{11} \otimes I^{13}$
$4\text{GHZ}_2^+ \rangle_{E,F,G,8}$	$ \phi^-\rangle_{C_{012}}$	$ 0\rangle_{17}$	$(X)^9 \otimes (X)^{10} \otimes (X)^{11} \otimes (Z)^{13}$
$4\text{GHZ}_2^+ \rangle_{E,F,G,8}$	$ \psi^+\rangle_{C_{012}}$	$ 0\rangle_{17}$	$(X)^9 \otimes (X)^{10} \otimes (X)^{11} \otimes (X)^{13}$
$4\text{GHZ}_2^+ \rangle_{E,F,G,8}$	$ \psi^-\rangle_{C_{012}}$	$ 0\rangle_{17}$	$(X)^9 \otimes (X)^{10} \otimes (X)^{11} \otimes (ZX)^{13}$
$4\text{GHZ}_2^- \rangle_{E,F,G,8}$	$ \phi^+\rangle_{C_{012}}$	$ 0\rangle_{17}$	$(ZX)^9 \otimes (X)^{10} \otimes (X)^{11} \otimes I^{13}$
$4\text{GHZ}_2^- \rangle_{E,F,G,8}$	$ \phi^-\rangle_{C_{012}}$	$ 0\rangle_{17}$	$(ZX)^9 \otimes (X)^{10} \otimes (X)^{11} \otimes (Z)^{13}$
$4\text{GHZ}_2^- \rangle_{E,F,G,8}$	$ \psi^+\rangle_{C_{012}}$	$ 0\rangle_{17}$	$(ZX)^9 \otimes (X)^{10} \otimes (X)^{11} \otimes (X)^{13}$
$4\text{GHZ}_2^- \rangle_{E,F,G,8}$	$ \psi^-\rangle_{C_{012}}$	$ 0\rangle_{17}$	$(ZX)^9 \otimes (X)^{10} \otimes (X)^{11} \otimes (ZX)^{13}$
$4\text{GHZ}_1^+ \rangle_{E,F,G,8}$	$ \phi^+\rangle_{C_{012}}$	$ 1\rangle_{17}$	$I^9 \otimes I^{10} \otimes (IX)^{11} \otimes (X)^{13}$
$4\text{GHZ}_1^+ \rangle_{E,F,G,8}$	$ \phi^-\rangle_{C_{012}}$	$ 1\rangle_{17}$	$I^9 \otimes I^{10} \otimes (IX)^{11} \otimes (ZX)^{13}$
$4\text{GHZ}_1^+ \rangle_{E,F,G,8}$	$ \psi^+\rangle_{C_{012}}$	$ 1\rangle_{17}$	$I^9 \otimes I^{10} \otimes (IX)^{11} \otimes I^{13}$
$4\text{GHZ}_1^+ \rangle_{E,F,G,8}$	$ \psi^-\rangle_{C_{012}}$	$ 1\rangle_{17}$	$I^9 \otimes I^{10} \otimes (IX)^{11} \otimes (Z)^{13}$
$4\text{GHZ}_1^- \rangle_{E,F,G,8}$	$ \phi^+\rangle_{C_{012}}$	$ 1\rangle_{17}$	$(Z)^9 \otimes I^{10} \otimes (IX)^{11} \otimes (X)^{13}$
$4\text{GHZ}_1^- \rangle_{E,F,G,8}$	$ \phi^-\rangle_{C_{012}}$	$ 1\rangle_{17}$	$(Z)^9 \otimes I^{10} \otimes (IX)^{11} \otimes (ZX)^{13}$
$4\text{GHZ}_1^- \rangle_{E,F,G,8}$	$ \psi^+\rangle_{C_{012}}$	$ 1\rangle_{17}$	$(Z)^9 \otimes I^{10} \otimes (IX)^{11} \otimes I^{13}$
$4\text{GHZ}_1^- \rangle_{E,F,G,8}$	$ \psi^-\rangle_{C_{012}}$	$ 1\rangle_{17}$	$(Z)^9 \otimes I^{10} \otimes (IX)^{11} \otimes (Z)^{13}$
$4\text{GHZ}_2^+ \rangle_{E,F,G,8}$	$ \phi^+\rangle_{C_{012}}$	$ 1\rangle_{17}$	$(X)^9 \otimes (X)^{10} \otimes I^{11} \otimes (X)^{13}$
$4\text{GHZ}_2^+ \rangle_{E,F,G,8}$	$ \phi^-\rangle_{C_{012}}$	$ 1\rangle_{17}$	$(X)^9 \otimes (X)^{10} \otimes I^{11} \otimes (ZX)^{13}$
$4\text{GHZ}_2^+ \rangle_{E,F,G,8}$	$ \psi^+\rangle_{C_{012}}$	$ 1\rangle_{17}$	$(X)^9 \otimes (X)^{10} \otimes I^{11} \otimes I^{13}$
$4\text{GHZ}_2^+ \rangle_{E,F,G,8}$	$ \psi^-\rangle_{C_{012}}$	$ 1\rangle_{17}$	$(X)^9 \otimes (X)^{10} \otimes I^{11} \otimes (Z)^{13}$
$4\text{GHZ}_2^- \rangle_{E,F,G,8}$	$ \phi^+\rangle_{C_{012}}$	$ 1\rangle_{17}$	$(ZX)^9 \otimes (X)^{10} \otimes I^{11} \otimes (X)^{13}$
$4\text{GHZ}_2^- \rangle_{E,F,G,8}$	$ \phi^-\rangle_{C_{012}}$	$ 1\rangle_{17}$	$(ZX)^9 \otimes (X)^{10} \otimes I^{11} \otimes (ZX)^{13}$
$4\text{GHZ}_2^- \rangle_{E,F,G,8}$	$ \psi^+\rangle_{C_{012}}$	$ 1\rangle_{17}$	$(ZX)^9 \otimes (X)^{10} \otimes I^{11} \otimes I^{13}$
$4\text{GHZ}_2^- \rangle_{E,F,G,8}$	$ \psi^-\rangle_{C_{012}}$	$ 1\rangle_{17}$	$(ZX)^9 \otimes (X)^{10} \otimes I^{11} \otimes (Z)^{13}$

CyclicABCQT 量子回路

先ほどの CyclicABCQT プロトコルの例を量子回路で表すと以下のような図 2.17 になる。

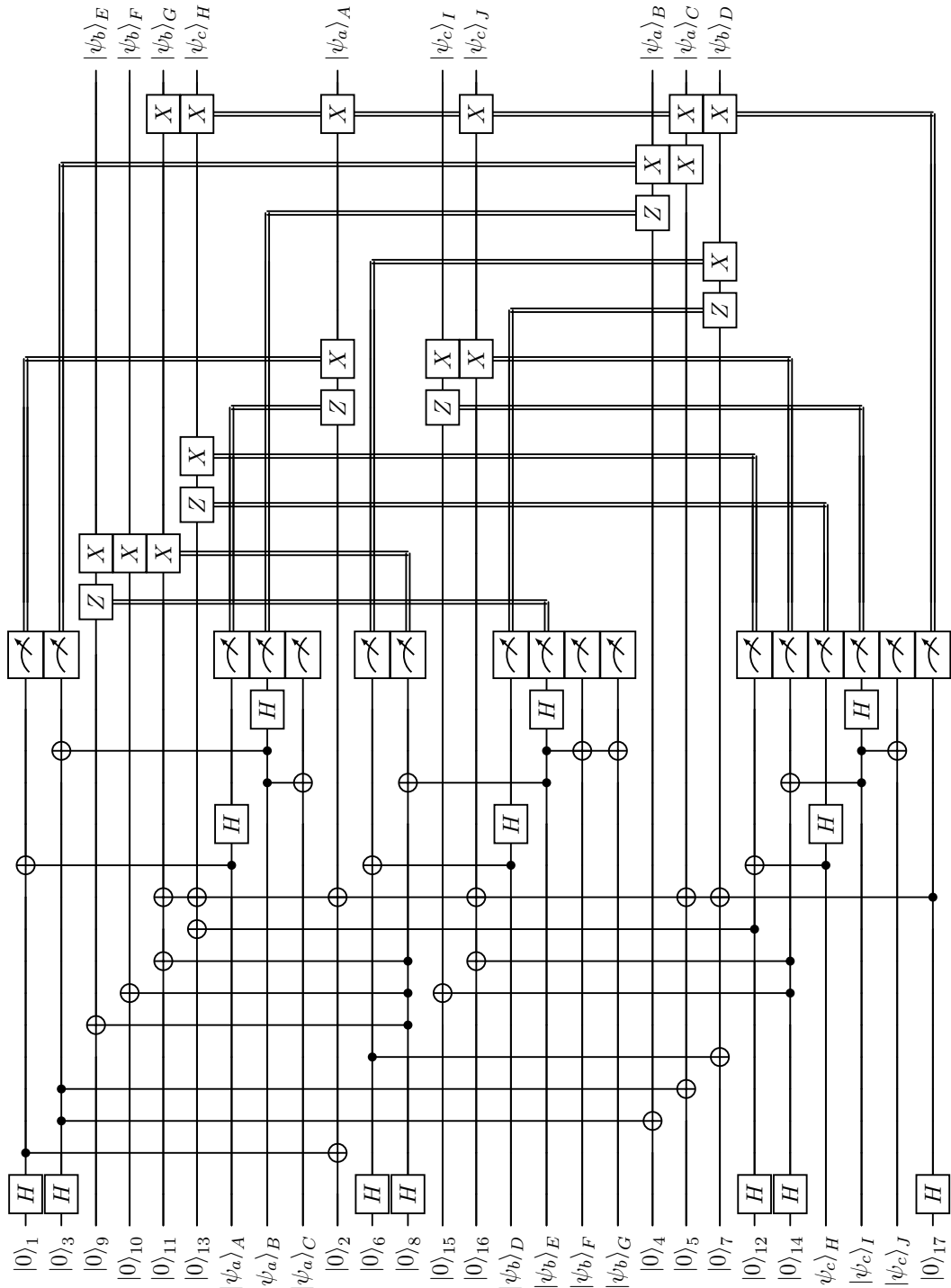


図 2.17: CyclicABCQT の量子回路

### Hierarchical controlled cyclic quantum teleportation (HCyclicCQT)

階層的循環制御量子テレポーテーション (Hierarchical controlled cyclic quantum teleportation, HCyclicCQT) は、3 人の参加者が未知の量子状態を循環的に転送する際、各タスクの重要度に応じて制御者の数 (権限レベル) を段階的に設定するプロトコルである。本節では、X-W Zha [21] によって提唱された、8 量子ビットの量子もつれ状態を量子チャンネルとして用いる 5 者 (Alice, Bob, Charlie, Denis, Ea-mi) 間の HCyclicCQT の詳細手順を示す。

#### ステップ 1 : 前準備

通信の参加者として、Alice, Bob, Charlie と、制御者である Denis, Ea-mi をおく。Alice, Bob, Charlie はそれぞれ、転送したい未知の 1 量子ビット状態  $|\psi_a\rangle_A, |\psi_b\rangle_B, |\psi_c\rangle_C$  を所有している。このとき、転送対象となる未知の量子状態を次式で表す。

$$|\psi_a\rangle_A = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle, \quad |\psi_b\rangle_B = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle, \quad |\psi_c\rangle_C = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle.$$

ただし、 $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 \in \mathbb{C}$  かつ  $|a_0|^2 + |a_1|^2 = |b_0|^2 + |b_1|^2 = |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$  とする。

通信の参加者である 5 者 (Alice, Bob, Charlie, Denis, Ea-mi) はあらかじめ 8 量子ビットの量子もつれ状態を量子チャンネルとして共有する。ここで、量子ビット 1, 7 は Alice が、量子ビット 2, 3 は Bob が、量子ビット 4, 6 は Charlie が、量子ビット 5 は Denis が、量子ビット 8 は Ea-mi が所有する。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6,7,8} = \frac{1}{4\sqrt{2}} & (|00\rangle + |11\rangle)_{1,2} \left[ (|00\rangle + |11\rangle)_{3,4} |0\rangle_5 (|000\rangle + |110\rangle + |011\rangle + |101\rangle)_{6,7,8} \right. \\ & \left. + (|01\rangle + |10\rangle)_{3,4} |1\rangle_5 (|000\rangle - |110\rangle + |011\rangle - |101\rangle)_{6,7,8} \right]. \end{aligned}$$

システム全体 (11 量子ビット) の初期状態は次式で表される。

$$\begin{aligned} & |\psi\rangle_{A,B,C,1,2,3,4,5,6,7,8} \\ & = |\psi_a\rangle_A |\psi_b\rangle_B |\psi_c\rangle_C |\psi\rangle_{1,2,3,4,5,6,7,8} \\ & = (a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle)(b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle)(c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle) \\ & \otimes \frac{1}{4\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)_{1,2} \left[ (|00\rangle + |11\rangle)_{3,4} |0\rangle_5 (|000\rangle + |110\rangle + |011\rangle + |101\rangle)_{6,7,8} \right. \\ & \quad \left. + (|01\rangle + |10\rangle)_{3,4} |1\rangle_5 (|000\rangle - |110\rangle + |011\rangle - |101\rangle)_{6,7,8} \right]. \end{aligned}$$

#### ステップ 2 : 送信者による測定

Alice は自身が所有する量子ビット A, 1 に、Bob は自身が所有する量子ビット B, 3 に、Charlie は自身が所有する量子ビット C, 6 に対して Bell 基底  $\{|\phi^\pm\rangle, |\psi^\pm\rangle\}$  で測定を行う。例として、Alice, Bob, Charlie の測定結果がいずれも  $|\phi^+\rangle$  であった場合、残りの量子ビットの状態は次のように崩壊する。

$$\begin{aligned} & |\psi\rangle_{2,4,5,7,8} \\ & = (a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle)_2 \left[ (b_0 |00\rangle + b_1 |10\rangle)_{4,5} (c_0 |00\rangle + c_1 |10\rangle + c_0 |11\rangle + c_1 |01\rangle)_{7,8} \right. \\ & \quad \left. + (b_0 |11\rangle + b_1 |01\rangle)_{4,5} (c_0 |00\rangle - c_1 |10\rangle + c_0 |11\rangle - c_1 |01\rangle)_{7,8} \right]. \end{aligned}$$

## ステップ 3: 制御者による測定

制御者 Denis と Ea-mi は, 自身の量子ビット 5, 8 に対して Z 基底で測定を行う. 例として, Alice, Bob, Charlie の測定結果がいずれも  $|\phi^+\rangle$  で, Denis と Ea-mi の測定結果がともに  $|0\rangle$  出会った場合, 残りの量子ビット 2, 4, 7 の状態は次のように崩壊する.

$$|\psi\rangle_{2,4,7} = (a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle)_2 (b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle)_4 (c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle)_7.$$

## ステップ 4: 受信者による再構築

Alice の測定結果を Bob へ, Bob と Denis の測定結果を Charlie へ, Charlie と Denis と Ea-mi の測定結果を Alice へ古典通信を介して送信する. 受信者は送信者から送信された測定結果に基づき, 自身が保有する量子ビット 2, 4, 7 に対して適切なユニタリ操作を行う. 測定結果に対応するユニタリ操作を表 2.14, 2.15, 2.16 に示す. これにより, Alice の状態  $|\psi_a\rangle_A$  は Bob へ, Bob の状態  $|\psi_b\rangle_B$  は Charlie へ, Charlie の状態  $|\psi_c\rangle_C$  は Alice へと循環的に転送され HecyclicCQT が完了する.

表 2.14: Alice の測定結果に対する Bob のユニタリ操作

Alice の結果	ユニタリ操作
$ \psi^+\rangle$	$I^2$
$ \psi^-\rangle$	$Z^2$
$ \phi^+\rangle$	$X^2$
$ \phi^-\rangle$	$Y^2$

表 2.15: Bob と Denis の測定結果に対する Charlie のユニタリ操作

Bob の結果	Denis の結果	ユニタリ操作
$ \psi^+\rangle$	0	$I^4$
$ \psi^-\rangle$	0	$Z^4$
$ \phi^+\rangle$	0	$X^4$
$ \phi^-\rangle$	0	$Y^4$
$ \psi^+\rangle$	1	$X^4$
$ \psi^-\rangle$	1	$Y^4$
$ \phi^+\rangle$	1	$I^4$
$ \phi^-\rangle$	1	$Z^4$

表 2.16: Charlie と Denis と Ea-mi の測定結果に対する Alice のユニタリ操作

Charlie の結果	Denis の結果	Ea-mi の結果	ユニタリ操作
$ \psi^+\rangle$	0	0	$I^7$
$ \psi^-\rangle$	0	0	$Z^7$
$ \phi^+\rangle$	0	0	$X^7$
$ \phi^-\rangle$	0	0	$Y^7$
$ \psi^+\rangle$	0	1	$X^7$
$ \psi^-\rangle$	0	1	$Y^7$
$ \phi^+\rangle$	0	1	$I^7$
$ \phi^-\rangle$	0	1	$Z^7$
$ \psi^+\rangle$	1	0	$Z^7$
$ \psi^-\rangle$	1	0	$I^7$
$ \phi^+\rangle$	1	0	$Y^7$
$ \phi^-\rangle$	1	0	$Z^7$
$ \psi^+\rangle$	1	1	$Y^7$
$ \psi^-\rangle$	1	1	$X^7$
$ \phi^+\rangle$	1	1	$Z^7$
$ \phi^-\rangle$	1	1	$I^7$

HcyclicCQT 量子回路

先ほどの HcyclicCQT プロトコルの例を量子回路で表すと以下のような図 2.18 になる。

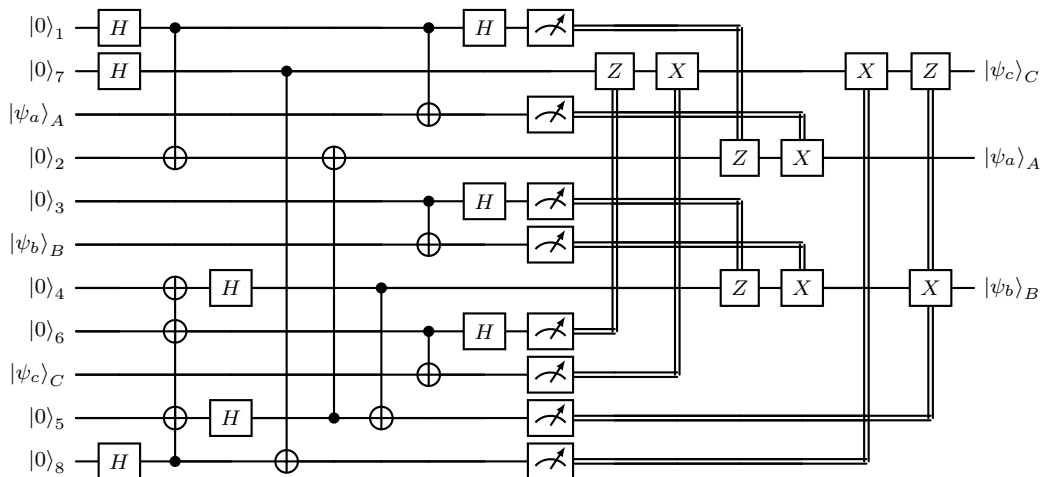


図 2.18: HcyclicCQT の量子回路

## 第3章 量子通信サーベイ論文の動向

### 3.1 既存の量子通信サーベイ論文の紹介

量子通信技術、とりわけ量子テレポーテーションは、1990年代初頭に理論的な提唱から始まり、以降多様な応用・拡張が検討されてきた。まずその過程を踏まえ、サーベイ論文の動向を整理する。

#### 1990年代

1990年代は、量子通信および量子テレポーテーション研究の基礎が確立された時期である。1993年に Bennett ら [9] によって提唱された量子テレポーテーションは、未知の量子状態を古典通信と量子もつれを組み合わせて遠隔転送できることを初めて理論的に示した研究であった。その後、1997年には Bouwmeester ら [22] によって量子テレポーテーションの実験的実証が報告され、理論で示されたプロセスが実際の光子系においても実現可能であることが確認された。この成果は、量子状態の物理的転送に関する初の実験的検証として、量子通信分野全体の発展を大きく推進した。

この時期の研究は、量子情報の基本原理の理解と実験的裏付けを両輪とし、後に発展する制御型テレポーテーションや多者通信など、さまざまな量子通信プロトコルの基盤を形成するものであった。

#### 2000年代

2000年代初期には、量子通信技術の体系化が進み、従来の理論提唱を総括するレビュー論文が複数登場した。代表的なものとして、Gisin と Thew [1] は、量子鍵配送 (Quantum Key Distribution, QKD) や量子テレポーテーション、量子中継器などを包括的に整理し、量子通信を情報科学の一領域として位置づけた。Bose [23] は、スピン鎖を用いた新しい量子通信モデルを紹介し、量子計算機間の状態転送という観点から量子通信の物理的基盤を明確化した。さらに、Long ら [24] は、量子鍵配送とは異なる通信形態として量子安全直接通信 (Quantum Secure Direct Communication, QSDC) と決定的安全通信 (Deterministic Secure Quantum Communication, DSQC) を体系的に整理し、量子通信の安全性理論を発展させた。

これらの研究は、量子通信の理論・実装・応用を横断的に整理する初期のサーベイ論文として、後の多者通信や量子ネットワーク研究の発展に重要な基盤を与えたといえる。

#### 2010年代以降

2010年代以降、量子通信技術の高度化と研究分野の細分化に伴い、量子通信全体を体系的に整理するサーベイ論文が多数登場した。特に、量子通信の物理基盤・チャンネル特性・応用領域を総合的に扱うレビューが出版され、量子通信研究の成熟期を象徴する動向となった。まず、Singh ら [25] は、将来の ICT における量子通信技術の全体像を俯瞰し、量子鍵配送、量子中継技術、量

子ネットワーク、量子メモリなどの要素技術を体系的に整理している。本レビューは、量子テレポーテーションを量子ネットワーク構築における基盤技術として位置づけ、通信インフラへの応用可能性を明確に示している点で重要である。Cozzolino ら [26] は、高次元量子状態を用いた量子通信の利点、実験的実装、および将来展望を総括した包括的レビューであり、高次元化がもたらす通信容量の向上、雑音耐性、非局所性の強化などを体系的に整理している。さらに、同時期には量子テレポーテーションの具体的なプロトコル比較や構造分析を行う研究も増加した。例えば、Wang と Li [12] は、クラスター状態を用いた双方向量子テレポーテーションの構造を解析し、既存手法と比較してリソース削減と操作効率の向上を示した。

以上のように、2010年代以降は量子通信の下位領域ごとの体系化が進み、量子テレポーテーションを含む多様な通信プロトコルの比較・評価の枠組みが確立された時期であった。

### 3.2 既存サーベイ論文の問題点

量子テレポーテーションに関する研究は、標準的なテレポーテーションから多者型、制御型、双方向型など多様なプロトコルが提唱されており、それらを比較分析するための試みとして、プロトコルの特徴量を表形式で整理した論文もいくつか存在する。しかし、既存研究におけるデータテーブルは、特定のプロトコルに限定してまとめられている場合が多く、量子テレポーテーション分野全体を見通した整理や比較を行うことが困難である。また、プロトコルを記述する際の項目（量子チャンネルの種類、測定基底、必要量子リソース、エージェント数など）は論文ごとに形式が異なっており、表に付与されるタグや分類基準も統一されていない。そのため、既存のデータテーブルを横断的に比較したり、新規プロトコルの体系的な位置づけを判断したりすることが困難である。さらに、既存のサーベイ論文は量子通信技術全体の進展を概観するものが中心であり、個々のテレポーテーションプロトコルを統一的な枠組みで比較する仕組みが十分に整備されていない。このため、プロトコル間の共通点や相違点の把握、未提唱領域の抽出、あるいは新規プロトコル設計に向けた体系的分析を行う際に、研究者が個別論文からデータを再整理する必要がある。

## 第4章 データテーブル構築

本章では、提唱されている量子テレポーテーションおよびそれを拡張した量子テレポーテーション系のプロトコルのデータテーブルを構築し、構築したデータテーブルに基づき、量子テレポーテーションプロトコルの年代別の提唱傾向と、現状の機能的分布について分析を行う。本分析の目的は、研究の進展を整理するだけでなく、プロトコルの構成要素を複数の視点から掛け合わせることで、理論的には定義可能であるものの、未だ詳細な検討が行われていない未開拓領域を特定することにある。

### 4.1 収集方法

本研究では、量子テレポーテーション系に関する既存プロトコルを体系的に調査するため、学術データベース (Google Scholar, Scopus) を用いて関連論文の収集を行った。具体的には、まず1つのプロトコルを提唱している代表的な論文を起点とし、その論文が引用している先行研究および、その引用関係をさらにたどることで関連論文を拡張的に収集する、いわゆる芋づる式の方法を採用した。収集した論文をデータテーブルに採録する際の選定基準として、出版後の経過年数に対して被引用数が1年あたり平均1回以上であることを条件とした。これにより、学術的に一定の評価を受け、後続の研究に対して一定の影響力をもつプロトコルに焦点を絞った分析が可能となり、分析結果の客観性と信頼性を担保している。また、同一論文を重複して扱うことを防ぐため、文献管理ソフトウェアである Zotero を活用した。収集したすべての論文を Zotero に登録し、引用時には必ず参照内容を確認することで、重複引用を防止した。

### 4.2 選択項目

収集した論文からは、以下の16項目を抽出し、タグ名として整理したデータテーブルを作成した。収集した全体の量子ビット数、送信ビット数、送信者数、制御者数、受信者数、エージェント数、量子チャンネルのビット数、量子チャンネル種類、量子チャンネル詳細、測定基底の種類、プロトコルの種類、元論文、発表年、被引用数、年平均被引用数、リソース効率である。各項目の内容と表示例は次の表 4.1 に示す。

#### 4.2.1 量子チャンネルの種類の説明

本研究の分析対象としたプロトコルにおいて、量子チャンネルとして採用されている主要な量子もつれ状態の定義を以下に示す。

表 4.1: 抽出項目の一覧

タグ名	タグ内容
全体の量子ビット数	プロトコル全体で使用される量子ビットの総数
送信ビット数	送信者が送信する未知の量子状態の量子ビット数
送信者数	通信に参加する送信者の人数
制御者	通信に参加する制御者の人数
受信者数	通信に参加する受信者の人数
エージェント数	通信に参加する利用者や制御者などの参加者の人数
量子チャンネルのビット数	通信に用いられる量子チャンネルの量子ビット数
量子チャンネル種類	通信に用いられる量子チャンネルの種類
量子チャンネル詳細	通信に用いられる量子チャンネルの詳細
測定基底の種類	プロトコルで利用される測定基底
プロトコルの種類	提唱されているプロトコルの分類
元論文	収集したプロトコルが提唱されている論文の出典情報
発表年	そのプロトコルが論文として発表された年
被引用数	収集した論文の被引用数
年平均被引用数	収集した論文の被引用数を出版後の経過年数で除した数値
リソース効率	リソース消費に対する転送効率を定量的に示す指標

### Bell 状態

2量子ビットのもつれ状態である Bell 基底を用いた量子チャンネルを指す。以下の4つの状態  $|\phi^\pm\rangle, |\psi^\pm\rangle$  のいずれか、あるいはその組み合わせで構成される。

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \quad |\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle).$$

### GHZ 状態

3量子ビット以上のもつれ状態である GHZ 基底を用いた量子チャンネルを指す。

### W 状態

2000年に Dür ら [27] によって提唱された以下のような3量子ビット以上からなる量子もつれ状態を指し、GHZ状態とは異なり、1つの量子ビットを失っても残りの粒子間にもつれが維持される特徴をもつ。

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle).$$

### クラスター状態

クラスター状態は、2001年に Briegel と Raussendorf [28] によって提唱された多量子もつれ状態であり、多数の量子ビットが格子状（または鎖状）に配置され、隣接する量子ビット間に CZ

ゲートを適用することで生成される量子状態である。クラスター状態の大きな特徴として、量子もつれが局所測定に対して非常に壊れにくい点があげられる。例えば、GHZ 状態は 1 つの量子ビットを測定するだけで量子もつれが崩壊してしまうのに対し、クラスター状態では全量子ビットのおよそ半分を測定しない限り、状態は完全な積状態にはならない。また、局所測定と古典通信を行うだけで、クラスター状態から GHZ 状態などの他の多量子もつれ状態を生成することも可能である。

### 条件付量子もつれ状態

条件付量子もつれ状態とは、特定の制御量子ビットの状態に連動して、量子チャンネル全体の量子もつれの構成が決定される状態を指す。具体的な構成例として、制御者が所有する量子ビット  $D$  の状態  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  に対して、それぞれ異なる量子もつれ状態  $\{|\phi^+\rangle, |\psi^+\rangle\}$  が相関を持つ量子チャンネルの状態  $|\psi\rangle$  を考える。このとき、量子チャンネル全体の量子状態は次式のように記述される。

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_D |\phi^+\rangle + |1\rangle_D |\psi^+\rangle).$$

ここで、制御者が自身の量子ビット  $D$  に対して  $Z$  基底での測定を行い、その測定結果を古典情報として各通信者に送信することで、量子チャンネルは  $|\phi^+\rangle$  または  $|\psi^+\rangle$  のいずれかの状態に崩壊し、通信路として確定する。

### Brown 状態

2005 年に Brown ら [29] によって提唱された、以下のような特定の 5 量子ビットの量子もつれ状態のことを指す。

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{4}(|001\rangle(|01\rangle - |10\rangle) + |010\rangle(|00\rangle - |11\rangle) + |100\rangle(|01\rangle + |10\rangle) + |111\rangle(|00\rangle + |11\rangle)).$$

### 複合状態

Bell 状態と GHZ 状態など、種類の異なる量子もつれ状態を組み合わせた量子チャンネルを指す。

### 一般・その他

前述した特定の名称をもつ量子状態 (Bell, GHZ, W, クラスター, 条件付, Brown, 複合状態) のいずれにも分類されない量子チャンネルを指す。特定の論文において独自に構成された特殊な多粒子もつれ状態などがこれに含まれる。

## 4.3 収集結果の分析

ここでは、まず提唱された年代とプロトコルの種類の推移を集計し、研究対象の変遷を把握する。次に、通信に参加するエージェント数とプロトコル種類の相関、制御者が介在するプロトコルにおける制御者数の分布、および通信形態と量子リソースの適合性という3つのヒートマップ分析を行う。これらの分析結果とリソース効率の実績値を照らし合わせることで、特定の条件下で実装の可能性が示唆されながらも未開拓である領域を明らかにする。

### 4.3.1 プロトコル種類の年代別提唱推移

収集したプロトコルの発表年とプロトコル種類の推移を図4.1に示す。データテーブルの集計結果から、提唱されるプロトコルの傾向は年代ごとに以下のような特徴を持って推移していることが読み取れる。

- **1990年–2010年頃**：1993年に量子テレポーテーション (QT) が提唱されて以降、2005年頃からはQTを拡張した制御付き量子テレポーテーション (CQT) の提唱が始まり、2012年までの期間においてCQTは計11件報告されている。
- **2013年–2017年頃**：プロトコルの提唱数が急増した時期であり、2016年には年間で14件の論文が報告されている。この期間には、双方向量子テレポーテーション (BQT) が3件、双方向制御量子テレポーテーション (BCQT) が11件提唱されるなど、QTの拡張先が双方向や非対称な量子ビット転送 (ABQT) へと多様化していることが数値から読み取れる。
- **2018年–現在**：多者間で情報を循環させる循環型の拡張プロトコルが多く提唱されている。具体的には、CyclicCQTが累計16件報告されているほか、CyclicACQT (4件)、CyclicQT (3件)、CyclicBQT (2件)、HCyclicCQT (2件)、CyclicBCQT (1件)、CyclicABCQT (1件) といった多様な循環型の拡張プロトコルが提唱されている。本データセットにおいて、これら循環型に関連するプロトコルの累計は29件に達している。

以上の推移から、収集されたデータに基づく量子テレポーテーションの研究対象は、1993年のQTを基礎として、単方向、双方向、そして多者間での循環型へと、その構成を拡張させながら推移してきたことがわかる。

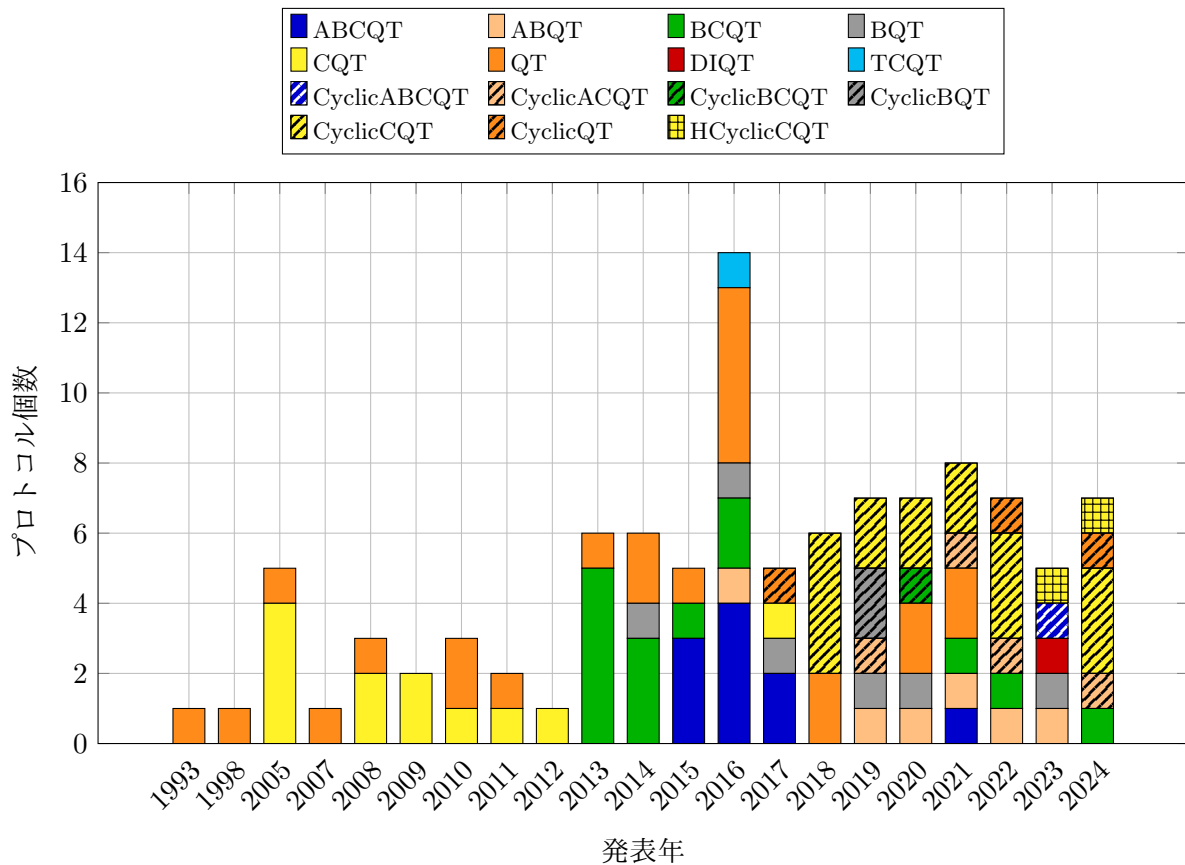


図 4.1: 年代別のプロトコル提唱数の推移

#### 4.3.2 エージェント数とプロトコル種類の関係

提唱されたプロトコル種類とプロトコルに参加するエージェント数の分布を表 4.2 に示す。全 102 件のデータテーブルの集計結果から得られる分布の傾向は以下の通りである。

- **小規模構成への集中**：エージェント数が 2 人のプロトコルは 34 件，3 人のプロトコルは 38 件報告されており，これらを合わせると 72 件となり，収集した全 102 件の約 70.6% が 3 人以下の少人数構成に集中している。エージェント数 2 人では QT (22 件) が主要な研究対象であり，3 人では BCQT (12 件) や ABCQT (10 件)，CQT (8 件) といった多様な形態が提唱されている。
- **循環型プロトコルにおける構成の推移**：多者間通信としての性質をもつ循環型のプロトコルは，単方向や双方向の形態に比べてエージェント数が増加する傾向にある。特に CyclicCQT (16 件) においては，4 人 (8 件) または 6 人 (5 件) の構成が主となっているほか，任意人数を示す  $N + 1$  人 (2 件) での提唱も確認できる。一方で，CyclicQT (3 人 : 3 件) や CyclicBQT (3 人 : 2 件) のように，循環型であっても 3 人の最小構成に限定された提唱も存在している。
- **大規模構成および変数を用いた汎用モデルの限定性**：エージェント数が 5 人以上の固定的な構成は，5 人 (2 件)，6 人 (7 件) の計 9 件に留まり，全体の約 8.8% と極めて少ない。また，特定の人数の増減に対応可能な変数モデルについても，制御者数を  $c$  人とした  $c + 2$  人構成

(4件) や、送信ビット数 ( $N$  量子ビット) に基づく  $N + 1$  人構成 (2件) の合計6件に限定されている。

表 4.2: プロトコル種類/エージェント数

	2	3	4	5	6	$c+2$	$N+1$	総計
QT	22	1	0	0	0	0	0	23
BQT	6	0	0	0	0	0	0	6
CQT	0	8	0	0	0	4	0	12
ABCQT	0	10	0	0	0	0	0	10
ABQT	6	0	0	0	0	0	0	6
BCQT	0	12	2	0	0	0	0	14
CyclicABCQT	0	0	1	0	0	0	0	1
CyclicACQT	0	0	3	0	1	0	0	4
CyclicBCQT	0	0	1	0	0	0	0	1
CyclicBQT	0	2	0	0	0	0	0	2
CyclicCQT	0	1	8	0	5	0	2	16
CyclicQT	0	3	0	0	0	0	0	3
HCyclicCQT	0	0	0	2	0	0	0	2
DIQT	0	1	0	0	0	0	0	1
TCQT	0	0	0	0	1	0	0	1
総計	34	38	15	2	7	4	2	102

以上の分布から、既存の研究の多くは2人または3人という最小規模の構成に偏っていることが明らかになった。また、循環型通信などの多人数を前提とする構成においても、エージェント数を変数とした構成や、さらなる大規模構成に関する検討も依然として限定的であることも明らかになった。

#### 4.3.3 制御型プロトコルにおける制御者数の関係

収集したプロトコルのうち、制御機能を有する制御型プロトコルは全102件中61件であった。これら制御型プロトコルにおける制御者数の分布を表4.3に示す。データテーブルの集計結果から得られる傾向は以下の通りである。

- 単一制御者モデルへの集中：制御型プロトコル61件のうち、制御者が1人の構成は50件に達し、全体の約82.0%を占めている。特にBCQT (13件)、CyclicCQT (13件)、ABCQT (10件) などの主要な形態において、その大半が単一の制御者による権限集中型のモデルとして提唱されている。
- 複数の制御者が存在する構成の現状：制御者が2人以上の人数で構成されているプロトコルは、2人(2件)、3人(4件)、4人(1件)の計7件に留まり、制御型プロトコル全体の約11.5%

となっている。循環型プロトコルにおいても、CyclicCQT (3人:3件) やHCyclicCQT (2人:1件, 4人:1件) など一部に複数制御者の例は見られるものの、依然として限定的である。

- 制御者数を変数として定義した構成：制御者数を変数  $c$  として定義し、任意の人数による分散制御を可能とするプロトコルは、CQTにおいて4件報告されている。しかし、双方向や循環型などの通信形態においては、制御者数を変数として扱った構成は確認されていない。

表 4.3: 制御型プロトコル種類/制御者数

	1	2	3	4	$c$	総計
ABCQT	10	0	0	0	0	10
BCQT	13	1	0	0	0	14
CQT	8	0	0	0	4	12
CyclicABCQT	1	0	0	0	0	1
CyclicACQT	3	0	1	0	0	4
CyclicBCQT	1	0	0	0	0	1
CyclicCQT	13	0	3	0	0	16
HCyclicCQT	0	1	0	1	0	2
TCQT	1	0	0	0	0	1
総計	50	2	4	1	4	61

以上の分布から、既存の制御型プロトコルの多くは1人の制御者に依存した設計に偏っていることが明らかになった。特に循環型の通信形態において、複数の制御者が介在する構成や、制御者数に拡張性を持たせた設計に関する検討は、依然として少ない状況にあることも明らかになった。

#### 4.3.4 プロトコル種類と量子チャンネルの関係

収集したプロトコルにおいて採用されている量子チャンネルの種類と提唱されたプロトコル種類の相関を表 4.4 に示す。データテーブルの集計結果から得られる傾向は以下の通りである。

- 量子チャンネル全体の分布状況：採用されている量子チャンネルの中で最も多く用いられているのはクラスター状態 (30件) であり、次いでGHZ状態 (22件), 条件付量子もつれ状態 (20件), Bell状態 (13件) の順となっている。特にクラスター状態は、QT (14件) において最も多く量子チャンネルとして採用されていることがわかる。
- 循環型プロトコルにおける量子チャンネル採用の特異性：QT, CQT, BCQT, ABCQTなどの多くのプロトコルにおいては、Bell状態, GHZ状態, クラスター状態, 条件付量子もつれ状態など、多岐にわたる量子チャンネルがまんべんなく採用されている。しかし、多者間で情報を循環させる循環型プロトコルに限定すると、循環型に関連するプロトコルは本データテーブル内に計29件存在するが、量子チャンネルとして条件付量子もつれ状態 (13件) やGHZ状態 (7件), 複合状態 (5件) などが採用されている一方で、クラスター状態を採用した例は1件も確認されていないことがわかる。

表 4.4: 量子チャンネル種類/プロトコル種類

	Bell 状態	GHZ 状態	W 状態	クラスター 状態	ブラウン 状態	一般・ その他	条件付き量子 もつれ状態	複合 状態	総計
ABCQT	2	0	0	3	0	1	3	1	10
ABQT	1	2	0	3	0	0	0	0	6
BCQT	1	0	0	3	2	2	4	2	14
BQT	3	2	0	1	0	0	0	0	6
CQT	0	5	2	5	0	0	0	0	12
CyclicABCQT	0	0	0	0	0	0	1	0	1
CyclicACQT	0	3	0	0	0	0	1	0	4
CyclicBCQT	0	0	0	0	0	0	1	0	1
CyclicBQT	1	0	0	0	0	0	0	1	2
CyclicCQT	1	3	0	0	0	0	9	3	16
CyclicQT	2	0	0	0	0	0	0	1	3
DIQT	0	1	0	0	0	0	0	0	1
HCyclicCQT	0	1	0	0	0	0	1	0	2
QT	2	5	1	14	1	0	0	0	23
TCQT	0	0	0	1	0	0	0	0	1
総計	13	22	3	30	3	3	20	8	102

以上の分布から、クラスター状態は主要な量子チャンネルとして多くのプロトコルで用いられていることが明らかになった。しかし、循環型プロトコルにおいては採用例が無く、既存研究における未開拓部分である可能性があると考えられる。

#### 4.3.5 循環型プロトコルにおけるクラスター状態の適用可能性とリソース効率の検討

前節までの分析により、循環型プロトコルにおけるクラスター状態の採用例は既存研究において未開拓領域であることが明らかとなった。本節では、クラスター状態を循環型通信へ適用することの妥当性について、「理論的な構成の可能性」および「リソース効率の優位性」の2つの観点から検討を行う。

##### 理論的な構成の可能性

クラスター状態を量子チャンネルとして循環型通信へ適用できる可能性については、多者間通信や複雑な制御構造を対象とした以下の理論的な構成事例から見出すことができる。

- 複合的な量子チャンネルとしての活用事例：Slaoui ら [30] によって3者間における未知の2量子ビット状態の循環型量子テレポーテーションを実現するために、6量子ビットのクラス

ター状態と 6 量子ビットのエンタングルメント状態を組み合わせた計 12 量子ビットの量子チャンネルを構成する手法が提唱されている。

- 多者間の循環制御への適応事例：Peng ら [31] によって 7 量子ビットのクラスター状態を用い、3 者間での循環的な制御遠隔操作を実現するプロトコルが提唱されており、クラスター状態単体でも循環型通信に必要な量子チャンネルを理論的に構成できることが示されている。

これらの事例から、クラスター状態は循環型プロトコルにおける量子チャンネルとして適用可能であり、未だ詳細な検討がなされていない「クラスター状態単体を主軸とした循環型プロトコル」の構築は、実現可能性が高い検討領域であると言える。

#### リソース効率の優位性に関する評価

各プロトコルの性能を評価する指標として、Sisodia [32] が用いた次式のリソース効率  $\eta$  を用いる。

$$\eta = \frac{q_i}{q_r + c_r + a_u}.$$

ここで、 $q_i$  は転送する未知の量子状態の量子ビット数、 $q_r$  は量子チャンネルの量子ビット数、 $c_r$  は測定結果を伝達するために必要な古典ビット数、 $a_u$  は補助量子ビット数である。この指標  $\eta$  は、消費されるリソース総量に対して、どれだけ効率的に量子情報を転送できたかを表すものであり、数値が高いほどリソース効率が優れていることを意味する。収集したデータに基づく各量子チャンネルのリソース効率  $\eta$  の比較を表 4.5 に示す。本表は、行方向にプロトコルの分類 (QT, CQT, Cyclic 系等)、列方向に量子チャンネルの種類 (Bell, GHZ, クラスター状態等) を配置した構成になっている。各セルには、特定のプロトコルと量子チャンネルの組み合わせにおけるリソース効率  $\eta$  の平均値を示している。

表 4.5: 各量子チャンネルにおける平均リソース効率

	Bell 状態	GHZ 状態	W 状態	クラスター 状態	ブラウン 状態	一般・ その他	条件付き量子 もつれ状態	複合 状態
ABCQT	0.19	0.00	0.00	0.23	0.00	0.20	0.24	0.20
ABQT	<b>0.45</b>	<b>0.43</b>	0.00	0.32	0.00	0.00	0.00	0.00
BCQT	0.17	0.00	0.00	0.18	0.20	0.16	0.27	0.20
BQT	0.30	0.31	0.00	<b>0.40</b>	0.00	0.00	0.00	0.00
CQT	0.00	0.07	0.14	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00
CyclicABCQT	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.33	0.00
CyclicACQT	0.00	0.31	0.00	0.00	0.00	0.00	<b>0.45</b>	0.00
CyclicBCQT	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.21	0.00
CyclicBQT	0.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.22
CyclicCQT	0.25	0.26	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.21
CyclicQT	0.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.25
DIQT	0.00	0.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
HCyclicCQT	0.00	0.15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.19	0.00
QT	0.25	0.26	0.20	<b>0.38</b>	0.14	0.00	0.00	0.00
TCQT	0.00	0.00	0.00	0.23	0.00	0.00	0.00	0.00

- クラスター状態の全体的な優位性：全量子チャンネルの総平均効率が0.26であるのに対し、クラスター状態を採用したプロトコルの平均効率は0.30を記録しており、Bell 状態（0.26）や GHZ 状態（0.24）を上回るリソース効率を示している。
- 理論的改善の余地：Malik ら [33] によって、クラスター状態の採用によって従来の GHZ 状態等を用いた構成を上回る効率が達成可能であるとの報告がなされている。

以上の分析から、クラスター状態は循環型プロトコルにおいて適用可能であり、高いリソース効率を実現し得る量子チャンネルであるといえる。しかし、現行の循環型プロトコルにおけるクラスター状態の利用は、他種のもつれ状態との複合的な活用に限定されている。したがって、クラスター状態単体を量子チャンネルとして用いたプロトコルの構築は、検討価値の高い未開拓領域であるといえる。

## 第5章 まとめ

### 5.1 結論

本研究では、既存の量子テレポーテーションおよびその拡張プロトコルを対象として、102件のプロトコルを体系的に収集し、構成要素に基づくデータテーブルを構築した。さらに、構築したデータテーブルを用いて分析を行い、現在の研究動向における機能的な偏りと、十分に検討されていない未開拓領域の特定を行った。その結果、以下の3点が明らかとなった。

- エージェント数および制御者数の分布に着目すると、多人数間での循環型プロトコルは提唱数が増加傾向にあるものの、その多くは依然として特定の固定人数に限定されたモデルに留まっていることが確認された。
- 量子チャンネルの採用傾向に関しては、クラスター状態は全プロトコル中でも高いリソース効率 ( $\eta = 0.30$ ) を記録している主要なリソースであるにもかかわらず、循環型プロトコルにおいては単体での採用例が確認されていないことが明らかとなった。
- 先行研究においては、クラスター状態を用いた多者間の循環的な制御構造が理論的に構成可能であることが示されている。

以上の分析結果をふまえると、既存の循環型量子テレポーテーションプロトコルにおいて、量子チャンネルとしてクラスター状態が採用されていない現状が明らかになった。しかし、この構成は理論的な実装可能性と高いリソース効率の両面から高い検討価値を有している。したがって、これまで十分な検討が行われてこなかったこの設計領域は、今後取り組むべき有望な未開拓領域として位置づけられる。

### 5.2 展望

本研究の今後の展望として、急速に進展する量子通信分野の最新動向を継続的に反映させるため、データテーブルへの新規プロトコルの追加を行い、分析対象の拡充を進めることがあげられる。量子テレポーテーション系の研究は現在も活発に進められており、今後提案される新たなプロトコルを体系的に整理・比較可能な形で取り込むことで、本研究で構築したデータテーブルの有用性を維持・発展させることが可能となる。また、本分析において有望な未開拓領域として特定した、クラスター状態を量子チャンネルとして用いた循環型量子テレポーテーションのプロトコルについては、その具体的な構成に関する理論的検討を進めるとともに、分析を通じて新たな未開拓領域の特定を継続的に行っていくことが必要である。

## 謝辞

本課題研究論文の執筆にあたり，ご指導・ご助言を賜りました主指導教員である高木翼准教授に心より感謝申し上げます。研究の方向性に関するご助言や，論文構成に関する的確なご指摘は，本研究を進める上での方向性を明確にしてくださいました。また，日頃より有益な助言をいただくとともに，研究室での生活全般にわたりお世話になりました研究室の皆様に感謝いたします。最後に，本研究を進めるにあたり，生活面および資金面の両面から支えてくださいました家族に深く感謝いたします。

## 参考文献

- [1] Nicolas Gisin and Rob Thew. “Quantum communication”. In: *Nature Photonics* 1.3 (Mar. 2007), pp. 165–171. ISSN: 1749-4893. DOI: 10.1038/nphoton.2007.22.
- [2] Peiyang Zhang et al. “Future Quantum Communications and Networking: A Review and Vision”. In: *IEEE Wireless Communications* 31.1 (Feb. 2024), pp. 141–148. ISSN: 1558-0687. DOI: 10.1109/MWC.012.2200295.
- [3] ステファニー・ウェーナー, デビッド・エルクース, and ロナルド・ハンソン. “Quantum internet: A vision for the road ahead”. In: *Science* 362.6412 (Oct. 19, 2018), eaam9288. DOI: 10.1126/science.aam9288.
- [4] 智 石坂 et al. 量子情報科学入門 - 共立出版. 第2版. 共立出版, 2012. ISBN: 978-4-320-12299-4.
- [5] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. 量子コンピュータと量子通信 I - 量子力学とコンピュータ科学 - — *Ohmsha*. Trans. by 達也 木村. オーム社, 2004. ISBN: 978-4-274-20013-7.
- [6] Margaret Martonosi and Martin Roetteler. 量子コンピュータシステム ノイズあり量子デバイスの研究開発 — *Ohmsha*. Trans. by 太一 湯浅. 共立出版, 2020. ISBN: 978-4-320-12465-3.
- [7] J. S. Bell. *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 1988.
- [8] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [9] Charles H. Bennett et al. “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels”. In: *Physical Review Letters* 70.13 (Mar. 29, 1993), pp. 1895–1899. DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.1895.
- [10] Anders Karlsson and Mohamed Bourennane. “Quantum teleportation using three-particle entanglement”. In: *Physical Review A* 58.6 (Dec. 1, 1998), pp. 4394–4400. DOI: 10.1103/PhysRevA.58.4394.
- [11] Hong-Zi Fu, Xiu-Lao Tian, and Yang Hu. “A General Method of Selecting Quantum Channel for Bidirectional Quantum Teleportation”. In: *International Journal of Theoretical Physics* 53.6 (June 1, 2014), pp. 1840–1847. ISSN: 1572-9575. DOI: 10.1007/s10773-013-1985-5.
- [12] Mengting Wang and Hai-Sheng Li. “Bidirectional quantum teleportation using a five-qubit cluster state as a quantum channel”. In: *Quantum Information Processing* 21.2 (Jan. 19, 2022), p. 44. ISSN: 1573-1332. DOI: 10.1007/s11128-021-03389-2.
- [13] Ying-Xuan Chen et al. “Cyclic quantum teleportation”. In: *Quantum Information Processing* 16.8 (July 6, 2017), p. 201. ISSN: 1573-1332. DOI: 10.1007/s11128-017-1648-1.

- [14] Wei Li, Xin-Wei Zha, and Jian-Xia Qi. “Tripartite Quantum Controlled Teleportation via Seven-Qubit Cluster State”. In: *International Journal of Theoretical Physics* 55.9 (Sept. 1, 2016), pp. 3927–3933. ISSN: 1572-9575. DOI: 10.1007/s10773-016-3022-y.
- [15] Yuan-hua Li and Li-ping Nie. “Bidirectional Controlled Teleportation by Using a Five-Qubit Composite GHZ-Bell State”. In: *International Journal of Theoretical Physics* 52.5 (May 1, 2013), pp. 1630–1634. ISSN: 1572-9575. DOI: 10.1007/s10773-013-1484-8.
- [16] Yuan-hua Li et al. “Asymmetric Bidirectional Controlled Teleportation by Using Six-qubit Cluster State”. In: *International Journal of Theoretical Physics* 55.6 (June 1, 2016), pp. 3008–3016. ISSN: 1572-9575. DOI: 10.1007/s10773-016-2933-y.
- [17] Vikram Verma, Dhiraj Yadav, and Devendra Kumar Mishra. “Improvement on cyclic controlled teleportation by using a seven-qubit entangled state”. In: *Optical and Quantum Electronics* 53.8 (July 22, 2021), p. 448. ISSN: 1572-817X. DOI: 10.1007/s11082-021-03098-1.
- [18] Ri-Gui Zhou and Chengpu Ling. “Asymmetric Cyclic Controlled Quantum Teleportation by Using Nine-Qubit Entangled State”. In: *International Journal of Theoretical Physics* 60.9 (Sept. 1, 2021), pp. 3435–3459. ISSN: 1572-9575. DOI: 10.1007/s10773-021-04825-w.
- [19] P. K. Vishnu et al. “Experimental demonstration of non-local controlled-unitary quantum gates using a five-qubit quantum computer”. In: *Quantum Information Processing* 17.10 (Sept. 6, 2018), p. 274. ISSN: 1573-1332. DOI: 10.1007/s11128-018-2051-2.
- [20] Jie Xu and Ri-Gui Zhou. “Asymmetric bidirectional cyclic controlled quantum teleportation in noisy environment”. In: *Quantum Information Processing* 22.10 (Oct. 16, 2023), p. 376. ISSN: 1573-1332. DOI: 10.1007/s11128-023-04116-9.
- [21] Xin-Wei Zha. “Different level of controlled cyclic quantum teleportation”. In: *Indian Journal of Physics* 99.7 (June 1, 2025), pp. 2581–2585. ISSN: 0974-9845. DOI: 10.1007/s12648-024-03475-y.
- [22] Dik Bouwmeester et al. “Experimental quantum teleportation”. In: *Nature* 390.6660 (Dec. 1997), pp. 575–579. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/37539.
- [23] Sougato Bose. “Quantum communication through spin chain dynamics: an introductory overview”. In: *Contemporary Physics* 48.1 (Jan. 1, 2007), pp. 13–30. ISSN: 0010-7514. DOI: 10.1080/00107510701342313.
- [24] Gui-lu Long et al. “Quantum secure direct communication and deterministic secure quantum communication”. In: *Frontiers of Physics in China* 2.3 (July 1, 2007), pp. 251–272. ISSN: 1673-3606. DOI: 10.1007/s11467-007-0050-3.
- [25] Sushil Kumar Singh\* et al. “Quantum Communication Technology for Future ICT – Review”. In: *Journal of Information Processing Systems* 16.6 (2020), pp. 1459–1478. ISSN: ISSN: 2092-805X. DOI: 10.3745/JIPS.03.0154.
- [26] Daniele Cozzolino et al. “High-Dimensional Quantum Communication: Benefits, Progress, and Future Challenges”. In: *Advanced Quantum Technologies* 2.12 (2019), p. 1900038. ISSN: 2511-9044. DOI: 10.1002/qute.201900038.

- [27] W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac. “Three qubits can be entangled in two inequivalent ways”. In: *Physical Review A* 62.6 (Nov. 14, 2000), p. 062314. DOI: 10.1103/PhysRevA.62.062314.
- [28] Hans J. Briegel and Robert Raussendorf. “Persistent Entanglement in Arrays of Interacting Particles”. In: *Physical Review Letters* 86.5 (Jan. 29, 2001), pp. 910–913. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.910.
- [29] Iain D K Brown et al. “Searching for highly entangled multi-qubit states”. In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 38.5 (Jan. 1, 2005), p. 1119. ISSN: 0305-4470. DOI: 10.1088/0305-4470/38/5/013.
- [30] A. Slaoui et al. “Cyclic quantum teleportation of two-qubit entangled states by using six-qubit cluster state and six-qubit entangled state”. In: *Scientific Reports* 14.1 (July 9, 2024), p. 15856. ISSN: 2045-2322. DOI: 10.1038/s41598-024-63395-z.
- [31] Jia-Yin Peng and Yong He. “Cyclic Controlled Remote Implementation of Partially Unknown Quantum Operations”. In: *International Journal of Theoretical Physics* 58.9 (Sept. 1, 2019), pp. 3065–3072. ISSN: 1572-9575. DOI: 10.1007/s10773-019-04185-6.
- [32] Mitali Sisodia. “Improvement on Quantum Bidirectional Teleportation Scheme of two  $\leftrightarrow$  two or two  $\leftrightarrow$  Three Qubit Quantum States”. In: *International Journal of Theoretical Physics* 62.3 (Mar. 14, 2023), p. 63. ISSN: 1572-9575. DOI: 10.1007/s10773-023-05315-x.
- [33] Javid Ahmad Malik, Muzaffar Qadir Lone, and Rayees Ahmad Malla. “Symmetric bidirectional quantum teleportation using a six-qubit cluster state as a quantum channel”. In: *Pramana* 97.1 (Mar. 6, 2023), p. 50. ISSN: 0973-7111. DOI: 10.1007/s12043-023-02521-4.