Title	規則消去法による合流性解析
Author(s)	河野, 冬紀
Citation	
Issue Date	2026-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	https://hdl.handle.net/10119/20543
Rights	
Description	Supervisor:廣川　直, 先端科学技術研究科, 修士(情報科学)

修士論文

規則消去法による合流性解析

2310038　河野　冬紀

主指導教員　廣川　直
審査委員主査　廣川　直
審査委員　石井　大輔
緒方　和博
冨田　尭

北陸先端科学技術大学院大学
先端科学技術研究科
(情報科学)

令和 8 年 2 月

Abstract

Aim: Confluence

Term rewriting is a computational model which uses directed equations as computation rules. This model has two important properties. One is termination which means that a result of computation is eventually obtained. The other property is confluence that guarantees uniqueness of computation results.

A term rewriting system is a set of a rewrite rules. For instance, consider the term rewriting system consisting of the three rules:

$$\mathsf{0} + x \to x \qquad \mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y) \qquad x + y \to x + y$$

The term $(\mathsf{0} + \mathsf{s}(\mathsf{0})) + \mathsf{s}(\mathsf{0})$ is calculated as follows:

$$(\mathsf{0} + \mathsf{s}(\mathsf{0})) + \mathsf{s}(\mathsf{0}) \to \mathsf{s}(\mathsf{0}) + \mathsf{s}(\mathsf{0}) \to \mathsf{s}(\mathsf{0} + \mathsf{s}(\mathsf{0})) \to \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))$$

These calculation steps are called a rewrite sequence. Another rewrite sequence also exists:

$$(\mathsf{0} + \mathsf{s}(\mathsf{0})) + \mathsf{s}(\mathsf{0}) \to \mathsf{0} + (\mathsf{s}(\mathsf{0}) + \mathsf{s}(\mathsf{0})) \to \mathsf{s}(\mathsf{0}) + \mathsf{s}(\mathsf{0}) \to \mathsf{s}(\mathsf{0} + \mathsf{s}(\mathsf{0})) \to \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))$$

We got the same result $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))$ in the calculation of $(\mathsf{0} + \mathsf{s}(\mathsf{0})) + \mathsf{s}(\mathsf{0})$. This property is *confluence* and how to prove or disprove it automatically is the theme of this thesis.

Approach: Compositional Confluence Criteria and Rule Removal

Recently, Shintani and Hirokawa [14] proposed compositional confluence criteria for confluence analysis. This method ensures that, given a rewriting system and its subsystem, confluence of the subsystem implies the original TRS. Since such a subsystem can be analyzed by any other (compositional) confluence criterion, compositional confluence criteria can be applied to subsystems successively. This method enables us to decompose a rewriting system into its subsystem for showing confluence of the original one. They also developed another method that is a rule removal [14] which ensures equivalence of confluence of a given TRS and its subsystem and we can prove confluence of given TRS by analyzing its subsystem as well as compositional confluence criteria while preserving confluence. By using rule removal, we can search a subsystem strongly and efficiently. This rule removal is based on compositional confluence criteria and actually it consists of a compositional confluence criterion and a sufficient condition which guarantees the reverse direction meaning that confluence of given a TRS implies its subsystem. In this thesis, we present a criterion ensures the reverse direction of rule removal based on persistency. Furthermore, we need to revisit the automation technique for rule removal by Shintani and Hirokawa. Whereas they aim to automate compositional confluence criteria, we aim to automate rule removal criteria. To this end, we will recast their automation method for rule removal.

Illustration

With an example, we demonstrate our rule removal approach. Consider the TRS $\mathcal{R}$:

$$1\colon\ \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \qquad 2\colon\ \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x \qquad 3\colon\ \infty \to \mathsf{s}(\infty)$$

We show the confluence of $\mathcal{R}$ by using the rule removal criteria based on parallel critical pair system and rule labeling.

1. The TRS $\mathcal{R}$ admits two parallel critical peaks and the corresponding critical pairs join:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{s}(\mathsf{p}(\mathsf{s}(x))) \arrow[dl] \arrow[dr, "\epsilon"] & \\
\mathsf{s}(x) & & \mathsf{p}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) \arrow[ll, dashed]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{p}(\mathsf{s}(\mathsf{p}(x))) \arrow[dl] \arrow[dr, "\epsilon"] & \\
\mathsf{p}(\mathsf{p}(\mathsf{s}(x))) \arrow[rr, dashed] & & \mathsf{p}(x)
\end{tikzcd}
$$

Let $\mathcal{S} = \{3\}$. The parallel critical pair system $\mathsf{PCPS}(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ consists of the four rules:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{s}(\mathsf{p}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{s}(x) && \mathsf{p}(\mathsf{s}(\mathsf{p}(x))) \to \mathsf{p}(\mathsf{p}(\mathsf{s}(x))) \\
&\mathsf{s}(\mathsf{p}(\mathsf{s}(x))) \to \mathsf{p}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(x))) && \mathsf{p}(\mathsf{s}(\mathsf{p}(x))) \to \mathsf{p}(x)
\end{aligned}
$$

By taking the linear polynomial interpretation $\mathcal{A}$ on $\mathbb{N}$ with

$$
\mathsf{s}_{\mathcal{A}}(n) = 2n \qquad \mathsf{p}_{\mathcal{A}}(n) = n + 1 \qquad \infty_{\mathcal{A}} = 0
$$

the inclusions $\mathsf{PCPS}(\mathcal{R}, \mathcal{S}) \subseteq >_{\mathcal{A}}$ and $\mathcal{R} \subseteq \geqslant_{\mathcal{A}}$ hold. Thus, $\mathsf{PCPS}(\mathcal{R}, \mathcal{S})/\mathcal{R}$ is terminating. We define many sorted signature Σ as follows:

$$
\mathsf{s} : A \to A \qquad \infty : A
$$

Since $\mathcal{R}{\restriction_{\Sigma}} = \{3\} = \mathcal{S}$, we obtain $\mathcal{R}{\restriction_{\Sigma}} \subseteq \to_{\mathcal{S}}^{*}$. Therefore, by rule removal based on parallel critical pair system the TRSs $\mathcal{R}$ and $\mathcal{S}$ are equi-confluent.

2. As $\mathcal{S}$ admits no parallel critical peaks, the rule removal criterion based on rule labeling proves the equi-confluence of $\mathcal{S}$ and $\varnothing$.
3. The empty TRS $\varnothing$ is trivially confluent.

Hence the original TRS $\mathcal{R}$ is confluent. In our automation technique, the suitable subsystem $\mathcal{S}$ and $\varnothing$ are found by solving SMT constraints. This correctness follows from our persistency result.

目次

第 1 章

導入

項書換えは等式を左辺から右辺へ向き付けた書換え規則により計算を行う計算モデルであり、宣言型プログラミング言語 (CafeOBJ, Maude) [4] や定理証明系 (Dedukti) [9] の理論基盤をなしている。項書換えにおいて計算結果の一意性を保証する合流性は関数定義の well-definedness を示す上で重要な性質である。本論文では合流性の自動証明手法を議論する。

1.1　項書換え系と合流性

以下のような書換え規則の集合を項書換え系と呼ぶ。

$$\mathsf{0} + x \to x \qquad \mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y) \qquad x + y \to x + y$$

上の項書換え系において項 $(\mathsf{0}+\mathsf{s}(\mathsf{0}))+\mathsf{s}(\mathsf{0})$ は以下のように計算され、計算結果は $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))$ となる。

$$\begin{aligned}(\mathsf{0} + \mathsf{s}(\mathsf{0})) + \mathsf{s}(\mathsf{0}) &\to \mathsf{s}(\mathsf{0}) + \mathsf{s}(\mathsf{0}) \\ &\to \mathsf{s}(\mathsf{0} + \mathsf{s}(\mathsf{0})) \\ &\to \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))\end{aligned}$$

この計算過程を書換え列と呼ぶ。また他にも以下の書換え列が存在する。

$$\begin{aligned}(\mathsf{0} + \mathsf{s}(\mathsf{0})) + \mathsf{s}(\mathsf{0}) &\to \mathsf{0} + (\mathsf{s}(\mathsf{0}) + \mathsf{s}(\mathsf{0})) \\ &\to \mathsf{s}(\mathsf{0}) + \mathsf{s}(\mathsf{0}) \\ &\to \mathsf{s}(\mathsf{0} + \mathsf{s}(\mathsf{0})) \\ &\to \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))\end{aligned}$$

この書換え列においても計算結果は $\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$ となる。このようにどの書換え列も同じ項に到達する性質を合流性と呼ぶ。この項書換え系においては任意の項に対してこのような性質が成り立つのでこの項書換え系は合流性を持つ。次に以下の項書換え系を考える。

$$\mathsf{f}(x,x) \to \mathsf{a} \qquad \mathsf{f}(x,\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{b} \qquad \mathsf{c} \to \mathsf{g}(\mathsf{c})$$

項 $\mathsf{f}(\mathsf{c},\mathsf{c})$ は以下のように書換えられる。

$$\mathsf{a} \leftarrow \mathsf{f}(\mathsf{c},\mathsf{c}) \to \mathsf{f}(\mathsf{c},\mathsf{g}(\mathsf{c})) \to \mathsf{b}$$

項 a,b はそれ以上書換えられない項であるため $\mathcal{R}_2$ は合流性を持たない。また冒頭で示した項書換え系は $x+y \to y+x \to \cdots$ のように無限の書換え列を持ちこのような無限の書換え列を持たない項書換え系は停止性を持つという。停止性を持つ有限集合の項書換え系の合流性は決定可能である。

1.2　既存研究

現代の合流性証明手法では次の合流性基準、分割手法に分類されるものがある。

合流性基準は与えられた項書換え系から直接合流性を証明できる手法である。以下は合流性基準の１つである直交性 [13] の例である。

例 1.1. 以下の項書換え系を考える。

$$0+x \to x \qquad \mathsf{s}(x)+y \to \mathsf{s}(x+y)$$

同じ項に対する各書換え規則の適用箇所はどの項に対しても重ならず各左辺に同じ変数が２つ以上現れない。このような項書換え系は直交であるといい合流性を持つ。

分割手法は与えられた項書換え系とその項書換え系を複数に分割した項書換え系の合流性が同値となる十分条件である。次の例は分割手法の１つである直和に関するモジュラ性 [15] の例である。直和とは２つの項書換え系が同じ関数記号を共有していないことをいう。

例 1.2. 以下の項書換え系 $\mathcal{R}_1$ と

$$0+x \to x \qquad \mathsf{s}(x)+y \to \mathsf{s}(x+y)$$

以下の項書換え系 $\mathcal{R}_2$ を考える。

$$\mathsf{if}(\mathsf{true},x,y) \to x \qquad \mathsf{if}(\mathsf{false},x,y) \to y$$

$\mathcal{R}_1$ が含む関数記号は $0, \mathsf{s}, +$ であり $\mathcal{R}_2$ が含む関数記号は $\mathsf{if}, \mathsf{true}, \mathsf{false}$ である。よって $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ が同じ関数記号を共有していないため直和である。このとき $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ の両方が合流性を持つことと $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ が合流性を持つことが同値となる。

新谷らは合成可能な新たな証明手法として合成可能合流性基準 [14] を提案した。合成可能合流性基準とは与えられた項書換え系 $\mathcal{R}$ とその部分集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ に対し以下の含意を示す十分条件である。

$$\mathcal{S} \text{ が合流性を持つ} \implies \mathcal{R} \text{ が合流性を持つ}$$

また $\mathcal{R}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ を部分システムと呼ぶ。新谷らは合流性の十分条件である直交性、規則ラベリング [12, 16] に基づく合成可能合流性基準と危険対システム [7] より導出した並列危険対システムに基づく合成可能合流性基準を提案した。またこれら複数の十分条件を組み合わせて適用することができるため、高い証明能力を持つ。以下に合成可能合流性基準の例を示す。また簡潔に書くため書換え規則を対応する番号で記す。

例 1.3. 以下の項書換え系 $\mathcal{S}_0$ を考える。

$$\begin{array}{llllll} 1: & \mathsf{0} \times y \to \mathsf{0} & 3: & \mathsf{s}(x) \times y \to (x \times y) + y & 5: & (x + y) + z \to x + (y + z) \\ 2: & x \times \mathsf{0} \to \mathsf{0} & 4: & \mathsf{0} + x \to x & 6: & x + (y + z) \to (x + y) + z \end{array}$$

この項書換え系の合流性を合成可能合流性基準により証明する。

1. $\mathcal{S}_1 = \{2, 4, 5, 6\}$ とすると直交性に基づく合成可能合流性基準より $\mathcal{S}_1$ の合流性が $\mathcal{S}_0$ の合流性を示す。
2. $\mathcal{S}_2 = \{4, 5\}$ とすると規則ラベリングに基づく合成可能合流性基準より $\mathcal{S}_2$ の合流性が $\mathcal{S}_1$ の合流性を示す。
3. 危険対システムに基づく合成可能合流性基準より $\varnothing$ の合流性が $\mathcal{S}_2$ の合流性を示す。

空の項書換え系は合流性を持つため $\mathcal{S}_0$ が合流性を持つ。

しかし合成可能合流性基準は与えられた項書換え系の全ての部分システムについて探索する必要があり超冪の大きさの探索空間を要する。次の例は合成可能合流性基準による部分システムの探索の例である。

例 1.4. 次の項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える。

$$1: \ \mathsf{f}(\mathsf{g}(x), y) \to \mathsf{h}(x) \quad 2: \ \mathsf{f}(x, \mathsf{g}(y)) \to \mathsf{h}(y) \quad 3: \ \mathsf{h}(x) \to \mathsf{a}$$

$\mathcal{S}_1 = \{1, 2\}$ とすると並列危険対システムに基づく合成可能合流性基準より $\mathcal{S}_1$ の合流性が $\mathcal{R}$ の合流性を示す。しかし $\mathcal{S}_1$ は合流性を持たず $\mathcal{S}_1$ のどの部分システムも合成可能合流性基準の十分条件を満たさない。よって $\mathcal{R}$ の部分システムの探索に戻る。$\mathcal{S}_2 = \{3\}$ とすると並列危険対システムに基づく合成可能合流性基準より $\mathcal{S}_2$ の合流性が $\mathcal{R}$ の合流性を示す。直交性より $\mathcal{S}_2$ が合流性を持つため $\mathcal{R}$ が合流性を持つ。

そこで新谷らは規則消去法を提案した。規則消去法は与えられた項書換え系 $\mathcal{R}$ とその部分システム $\mathcal{S}$ に対し以下を示す十分条件である。

$$\mathcal{R} \text{ が合流性を持つ} \iff \mathcal{S} \text{ が合流性を持つ}$$

規則消去法は合成可能合流性基準と以下を保証する十分条件の組み合わせで構成される。

$$\mathcal{R} \text{ が合流性を持つ} \implies \mathcal{S} \text{ が合流性を持つ}$$

新谷らは直和に関するモジュラ性から規則消去法の十分条件を導出した。また直交性に基づく規則消去法の自動化方法を提案し規則ラベリングと並列危険対システムに基づく合成可能合流性基準と組み合わせることで探索効率を向上させた。

1.3 本論文の貢献

前節で述べたとおり新谷らは規則ラベリングと並列危険対システムに基づく規則消去法の実装は行っていない。その原因は部分システムの探索方法にある。新谷らの実装では合成可能合流性基準を満たす部分システムを見つけた後、規則消去法の十分条件を満たす部分システムに拡張する方法で実装している。しかしその拡張が規則ラベリングと並列危険対システムに基づく合成可能合流性基準の十分条件を保たないためにそれらの規則消去法を実装できない。そこで本論文では充足可能問題の割り当てとして部分システムを求めることで上記 2 つの規則消去法を実装する。また例 1.1 のような左辺に同じ変数が 2 つ以上現れない項書換え系は左線形であるといい、規則ラベリングと並列危険対システムに基づく規則消去法は左線形項書換え系にのみ適用できる。そのため左線形ではない項書換え系に適用可能な Klein–Hirokawa の定理 [10] に基づく規則消去法も実装する。実装の詳細については 3.3 節、5.2 節、4.2 節、6.2 節で述べる。

また規則消去法はその十分条件の制限により証明能力において合成可能合流性基準と差がある。規則消去法では部分システムに含まれる関数記号のみを左辺に持つ書換え規則は部分システムで書換えが可能でなければならないという十分条件により例 1.3 のような適用は失敗する。

例 1.5. 例 1.3 の項書換え系 $\mathcal{S}_0$ を考える。$\mathcal{S}_1 = \{2, 4, 5, 6\}$ とすると $\mathcal{S}_1$ が含む関数記号は $\mathsf{0}, \times, +$ であり左辺のそれらの関数記号のみを持つ 1 番目の規則 $\mathsf{0} \times y \to \mathsf{0}$ は $\mathcal{S}_1$ を用いて書換えられないため規則消去法を適用できない。

新谷らの規則消去法は直和に関するモジュラ性に基づいている。直和に関するモジュラ性のような分割手法は他にも知られており [13][5]、その 1 つとして永続性に関するモジュラ性 [1] がある。永続性に関するモジュラ性は与えられた項書換え系を型導入のもとで分割する手法であり直和に関するモジュラ性の成果を包含する。次の例は永続性に関するモジュラ性による合流性証明の例である。

例 1.6. 以下の項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える。

$$\begin{array}{llll} 1: & \mathsf{f}(x, y) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(x), \mathsf{g}(x)) & 2: & \mathsf{g}(x) \to \mathsf{h}(x) \\ 3: & \mathsf{F}(\mathsf{g}(x), x) \to \mathsf{F}(x, \mathsf{g}(x)) & 4: & \mathsf{F}(\mathsf{h}(x), x) \to \mathsf{F}(x, \mathsf{h}(x)) \end{array}$$

$\mathcal{R}_1 = \{1, 2\}, \mathcal{R}_2 = \{2, 3, 4\}$ とすると永続性に関するモジュラ性により $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ の両方の合流性と $\mathcal{R}$ の合流性が同値となる。

例 1.6 の項書換え系は直和に関するモジュラ性ではどのように分割しても関数記号 g か h を共有してしまうため分割できない。本研究では規則消去法の制限の緩和のため永続性に基づく規則消去法を提案する。

次の例は新谷らの規則消去法は適用できないが、本論文の提案手法適用できる項書換え系の例である。

例 1.7. 以下の書換え規則を持つ項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える。

$$1: \ \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{h}(x))) \to \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{h}(\mathsf{g}(x)))) \quad 3: \ \mathsf{g}(x) \to x \quad 2: \ \mathsf{f}(x) \to x \quad 4: \ \mathsf{h}(x) \to x$$

永続性に基づく規則消去法を以下のように適用する。

1. $\mathcal{S} = \{2, 3, 4\}$ とすると永続性に基づく規則消去法より $\mathcal{R}$ が合流性を持つことと $\mathcal{S}$ が合流性を持つことが同値となる。
2. 永続性に基づく規則消去法より $\mathcal{S}$ が合流性を持つことと $\varnothing$ が合流性を持つことが同値となる。
3. 空の項書換え系が合流性を持つことは自明であるため $\mathcal{R}$ が合流性を持つ。

本論文は次のように構成される。2 章では項書換え系の基礎的な概念や性質を定義する。3 章では提案手法、新谷らの規則消去法、自動化について述べる。4 章、5 章、6 章で

は新谷らが提案した合成可能合流性基準と提案手法による規則消去法について説明する。7 章では規則消去法の新谷らの実装方法と充足可能問題としての実装方法の比較実験、新谷らの規則消去法と提案手法の比較実験を行う。8 章では提案手法の評価と今後の課題について述べる。

第 2 章

準備

本論文では項書換え系における基本的な概念や性質について理解しているものとする。またこの章での定義や表記方法は [2] に基づく。

2.1　二項関係

項書換え系の書換えは二項関係によって表される。

定義 2.1. A を集合とする。A 上の**二項関係**は $A \times A$ の部分集合である。R, S を A 上の二項関係とする。$(a, b) \in R$ のとき $a \mathrel{R} b$ と書く。R と S の合成 $R \cdot S$ は A 上の二項関係 $\{(a, c) \mid a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{S} c$ となる $b \in A$ が存在する$\}$ で定義される。R が無限下降列 $a_0 \mathrel{R} a_1 \mathrel{R} \cdots$ を持たないとき R が**整礎である**という。A 上の二項関係 R に対し以下の性質を定義する。

- 全ての元 $a \in A$ に対し $a \mathrel{R} a$ が成り立つとき R が**反射的**であるという。
- $a \mathrel{R} a$ となる元 $a \in A$ が存在しないとき R が**非反射的**であるという。
- $a \mathrel{R} b$ かつ $b \mathrel{R} c$ を満たす元 $a, b, c \in A$ に対し $a \mathrel{R} c$ となるとき R が**推移的**であるという。

二項関係 $\gtrsim$ が反射的かつ推移的であるとき $\gtrsim$ を**擬順序**と呼び、二項関係 $>$ が非反射的かつ推移的であるとき $>$ を**狭義半順序**と呼ぶ。

2.2 抽象書換え系

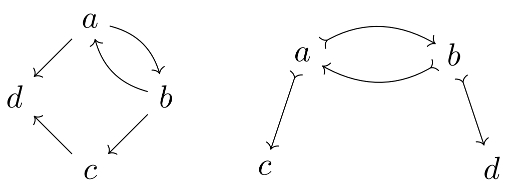
項書換え系は抽象書換え系の特殊な概念である。

定義 2.2. 集合 A と A 上の二項関係 $\to$ の対 $\langle A, \to \rangle$ を**抽象書換え系** (abstract rewrite system, ARS) と呼ぶ。$a \to b$ のとき $b \leftarrow a$ とも書く。$\to^n, \to^*, \leftrightarrow$ を以下のように定義する。

- $\to^n = \begin{cases} \{(a,a) \mid a \in A\} & \text{if } n = 0 \\ \to \cdot \to^{n-1} & \text{if } n > 0 \end{cases}$
- $\to^* = \bigcup_{n \geq 0} \to^n$
- $\leftrightarrow = \to \cup \leftarrow$

$\mathcal{A} = \langle A, \to \rangle, \mathcal{B} = \langle A, \rightarrowtail \rangle$ を抽象書換え系とする。$1 \leq i < n$ を満たす任意の i について $a_i \to a_{i+1}$ となるような $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ を**書換え列**と呼び $a_1 \to \cdots \to a_n$ と書く。また任意の $i \in \mathbb{N}$ に対し $a_i \to a_{i+1}$ となるような A の元の無限列 $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ を**無限の書換え列**と呼ぶ。$a, b \in A$ に対し $a \to^* \cdot {}^*\!\leftarrow b$ となるとき a と b が**交差する**という。$a \in A$ とし $b \, {}^*\!\leftarrow a \to^* c$ となる任意の $b, c \in A$ に対し、$b \to^* d \, {}^*\!\leftarrow c$ となる $d \in A$ が存在するとき a が $\mathcal{A}$ に対し**合流性**を持つという。集合 B に属する全ての元が $\mathcal{A}$ に対し合流性を持つとき $\mathcal{A}$ が B 上で**合流性**を持つという。$\mathcal{A}$ が A 上で合流性を持つとき $\mathcal{A}$ が**合流性**を持つという。無限の書換え列 $a_1 \to a_2 \to \cdots$ が存在しないとき $\to$ が**停止性**を持つという。またこのとき $\mathcal{A}$ が停止性を持つともいう。$\rightarrowtail^* \cdot \to \cdot \rightarrowtail^*$ が停止性を持つとき $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ が**停止性**を持つという。またこのとき $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ に関して**相対停止性**を持つという。

例 2.3. $A = \{a, b, c, d\}$ とし A 上の二項関係 $\to$ と $\rightarrowtail$ を以下のように定義する。



$\mathcal{A}_1 = \langle A, \to \rangle, \mathcal{A}_2 = \langle A, \rightarrowtail \rangle$ を抽象書換え系とすると $\mathcal{A}_1$ は合流性を持つが $\mathcal{A}_2$ は合流性を持たない。

2.3　項書換え系

項は関数記号と変数からなる。

定義 2.4. $\mathcal{F}$ を関数記号の集合 (signature)、$\mathcal{V}$ を変数の集合 (variable) とし $\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \varnothing$ が成り立つとする。全ての関数記号は**項数** (arity) と呼ばれる自然数を持っており、項数 n を持つ関数記号 f は必要であれば $f^{(n)}$ で項数を表す。また項数が 0 である関数記号を**定数** (constant) と呼ぶ。**項** (term) を以下のように定義する。

- 全ての変数は項である。
- 全ての関数記号 $f^{(n)}$ と項 $t_1, \ldots, t_n$ に対し $f(t_1, \ldots, t_n)$ は項である。

定数 f に対する $f()$ を f と略記する。$\mathcal{F}$ と $\mathcal{V}$ からなる項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と書く。項 t が含む変数の集合 $\mathcal{V}\mathsf{ar}(t)$ を以下のように再帰的に定義する。

$$\mathcal{V}\mathsf{ar}(t) = \begin{cases} \{t\} & \text{if } t \in \mathcal{V} \\ \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}\mathsf{ar}(t_i) & \text{if } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

項 t が含む関数記号の集合 $\mathcal{F}\mathsf{un}(t)$ を以下のように再帰的に定義する。

$$\mathcal{F}\mathsf{un}(t) = \begin{cases} \varnothing & \text{if } t \in \mathcal{V} \\ \{f\} \cup \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}\mathsf{un}(t_i) & \text{if } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

項 t の中に同じ変数が 2 つ以上出現しないとき t が**線形** (linear) であるという。

例 2.5. $\mathcal{F} = \{\mathsf{f}^{(2)}, \mathsf{g}^{(1)}\}, t = \mathsf{f}(\mathsf{g}(x), \mathsf{f}(y, z))$ を考える。

- $\mathcal{V}\mathsf{ar}(t) = \{x, y, z\}$
- $\mathcal{F}\mathsf{un}(t) = \{\mathsf{f}, \mathsf{g}\}$

次に定義する位置は引数の番号を左から並べた列により表現される。

定義 2.6. **位置** (position) は正の整数の有限列であり空列を ϵ で表す。pq は位置 p と q の連接を表す。位置上の関係 $\leq, <, \parallel$ を以下のように定義する。

- $pr = q$ が成り立つ r が存在するとき $p \leq q$ と書く。
- $p \leq q$ かつ $p \neq q$ のとき $p < q$ と書く。

- $p \leq q$ でも $q \leq p$ でもないとき $p \parallel q$ と書く。

項の位置の集合 $\mathcal{P}\mathsf{os}(t)$ を以下のように再帰的に定義する。

$$\mathcal{P}\mathsf{os}(t) = \begin{cases} \{\epsilon\} & \text{if } t \in \mathcal{V} \\ \{\epsilon\} \cup \{ip \mid 1 \leq i \leq n, \text{ and } p \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t_i)\} & \text{if } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

項 $t|_p$ を以下のように再帰的に定義する。

$$t|_p = \begin{cases} t & \text{if } p = \epsilon \\ t_i|_q & \text{if } t = f(t_1, \ldots, t_n) \text{ and } p = iq \end{cases}$$

また項 t の変数の位置の集合 $\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{V}}(t)$ を $\{p \in \mathcal{P}\mathsf{os}(t) \mid t|_p \in \mathcal{V}\}$ と定義し、関数記号の位置の集合 $\mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}}(t)$ を $\mathcal{P}\mathsf{os}(t) \setminus \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{V}}(t)$ と定義する。

例 2.7. $\mathcal{F} = \{\mathsf{f}^{(2)}, \mathsf{g}^{(1)}\}, t = \mathsf{f}(\mathsf{g}(x), \mathsf{f}(y, z))$ を考える。t の位置の集合は $\mathcal{P}\mathsf{os}(t) = \{\epsilon, 1, 11, 2, 21, 22\}$ となる。t の位置 1 の項は $t|_1 = \mathsf{g}(x)$ となる。

次に定義する文脈では項の一部を穴と呼ばれる定数に置き換えることで置き換え位置を表現する。

定義 2.8. 定数 $\Box \notin \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ を**穴** (hole) と呼び、$\Box$ を一つだけ持つ項を**文脈** (context) と呼ぶ。また $\mathcal{F}$ と $\mathcal{V}$ からなる文脈の集合を $\mathcal{C}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と書く。文脈 C と項 t に対し C の $\Box$ を t で置き換えた項 $C[t]$ を以下のように再帰的に定義する。

$$C[t] = \begin{cases} t & \text{if } C = \Box \\ f(t_1, \ldots, C'[t], \ldots, t_n) & \text{if } C = f(t_1, \ldots, C', \ldots, t_n) \end{cases}$$

ここで C' は文脈である。項 s, t と位置 p に対し $t[s]_p$ を以下のように再帰的に定義する。

$$t[s]_p = \begin{cases} s & \text{if } p = \epsilon \\ f(t_1, \ldots, t_i[s]_q, \ldots, t_n) & \text{if } t = f(t_1, \ldots, t_n) \text{ and } p = iq \end{cases}$$

例 2.9. 文脈 $C = \mathsf{f}(\Box, \mathsf{g}(x))$、項 $s = \mathsf{f}(x, \mathsf{g}(y)), t = \mathsf{g}(\mathsf{f}(x, y))$ を考える。

- $C[t] = \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{f}(x, y)), \mathsf{g}(x))$
- $t[s]_1 = \mathsf{g}(\mathsf{f}(x, \mathsf{g}(y)))$

次に定義する代入は変数を項に置き換えるための写像である。

定義 2.10. **代入** (substitution) は変数 $\mathcal{V}$ から項 $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ への写像であり、定義域 $\mathcal{D}\mathsf{om}(\sigma) = \{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ が有限集合となる。代入 σ の項 t への適用 $t\sigma$ を以下のように再帰的に定義する。

$$t\sigma = \begin{cases} \sigma(t) & \text{if } t \in \mathcal{V} \\ f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma) & \text{if } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

代入 σ と τ の合成 $\sigma\tau$ を $\{x \mapsto (x\sigma)\tau \mid x \in \mathcal{V}\}$ と定義する。また代入 σ は $\mathcal{D}\mathsf{om}(\sigma) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ に対し $\{x_1 \mapsto \sigma(x_1), \ldots, x_n \mapsto \sigma(x_n)\}$ と表されることもある。

例 2.11. 項 $t = \mathsf{f}(\mathsf{g}(x), \mathsf{f}(x,y))$、代入 $\sigma = \{x \mapsto \mathsf{g}(y), y \mapsto \mathsf{g}(x)\}, \tau = \{x \mapsto \mathsf{f}(x,y), z \mapsto \mathsf{g}(z)\}$ を考える。$t\sigma = \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{g}(y), \mathsf{f}(\mathsf{g}(y), \mathsf{g}(x))))$ となる。$\sigma\tau = \{x \mapsto \mathsf{g}(y), y \mapsto \mathsf{g}(\mathsf{f}(x,y)), z \mapsto \mathsf{g}(z)\}$ となる。

定義 2.12. s, t を項とする。$s\sigma = t\sigma$ となるような代入 σ が存在するとき s と t が**単一化可能**であるという。またこのとき σ を s と t の**単一化子**と呼ぶ。σ を項 s と t の単一化子とする。s と t の任意の単一化子 τ に対し $\sigma\rho = \tau$ となる代入 ρ が存在するとき σ を s と t の**最汎単一化子**と呼ぶ。

例 2.13. 項 $s = \mathsf{f}(\mathsf{g}(x), y), t = \mathsf{f}(y, \mathsf{g}(\mathsf{g}(z)))$ を考える。代入 $\sigma = \{x \mapsto \mathsf{g}(z), y \mapsto \mathsf{g}(\mathsf{g}(z))\}$ は s と t の単一化子である。また σ は最汎単一化子でもある。

定義 2.14. **書換え規則**を以下を満たす項の対 $\langle \ell, r \rangle$ と定義する。

- 左辺 ℓ が変数ではない。
- $\mathcal{V}\mathsf{ar}(r) \subseteq \mathcal{V}\mathsf{ar}(\ell)$ が成り立つ。

また書換え規則 $\langle \ell, r \rangle$ を $\ell \to r$ と書く。書換え規則の集合を**項書換え系**と呼ぶ。項 s, t に対し、$s|_p = \ell\sigma$ かつ $t = s[r\sigma]_p$ となる書換え規則 $\ell \to r \in \mathcal{R}$、位置 p、代入 σ が存在するとき $s \to_{\mathcal{R}} t$ と書き、これを**書換えステップ**と呼ぶ。またこのとき $s \xrightarrow{p}_{\mathcal{R}} t, s \xrightarrow{p}_{\mathcal{R}} t, s \to_{\ell \to r} t$ とも書く。項書換え系 $\mathcal{R}$ の全ての規則 $\ell \to r \in \mathcal{R}$ に対し ℓ が線形であるとき $\mathcal{R}$ が**左線形**であるという。項書換え系 $\mathcal{R}$ が含む関数記号の集合 $\mathcal{F}\mathsf{un}(\mathcal{R})$ を $\displaystyle\bigcup_{\ell \to r \in \mathcal{R}} \mathcal{F}\mathsf{un}(\ell) \cup \mathcal{F}\mathsf{un}(r)$ と定義する。

項書換え系 $\mathcal{R}$ は抽象書換え系 $\langle \mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V}), \to_{\mathcal{R}} \rangle$ であるため項書換え系の合流性、停止性も同じように定義できる。

定義 2.15. $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ を項書換え系とする。$s \in \mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ とし $b \mathrel{{}_{\mathcal{R}}^{*}{\leftarrow}} a \to_{\mathcal{R}}^{*} c$ となる任意の

$t, u \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ に対し、$t \to_{\mathcal{R}}^{*} v \ {}_{\mathcal{R}}^{*}\!\!\leftarrow u$ となる $v \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ が存在するとき s が $\mathcal{R}$ に対し**合流性**を持つという。項の集合 A に属する全ての元が $\mathcal{R}$ に対し合流性を持つとき $\mathcal{R}$ が A 上で**合流性**を持つという。$\mathcal{R}$ が $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ 上で合流性を持つとき $\mathcal{R}$ が**合流性**を持つという。$\to_{\mathcal{R}}$ が停止性を持つとき $\mathcal{R}$ が**停止性**を持つという。$\to_{\mathcal{S}}^{*} \cdot \to_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathcal{S}}^{*}$ が停止性を持つとき $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ が**停止性**を持つという。またこのとき $\mathcal{R}$ が $\mathcal{S}$ に関して**相対停止性**を持つという。

次に簡約対を定義する。

定義 2.16. $\to$ を項上の二項関係、s, t を項とする。$s \to t$ のとき全ての代入 σ に対し $s\sigma \to t\sigma$ が成り立つとき $\to$ が**代入について閉じている**という。$s \to t$ のとき全ての文脈 C に対し $C[s] \to C[t]$ が成り立つとき $\to$ が**文脈について閉じている**という。$\to$ が代入と文脈について閉じているとき $\to$ を**書換え関係**と呼ぶ。$>$ が狭義半順序かつ書換え関係であり整礎であるとき $>$ を**簡約順序**と呼ぶ。書換え関係である擬順序 $\gtrsim$ と整礎かつ代入について閉じている狭義半順序 $>$ に対し $\gtrsim \cdot > \cdot \gtrsim \subseteq >$ が成り立つとき $\langle \gtrsim, > \rangle$ を**簡約対**と呼ぶ。簡約対 $\langle \gtrsim, > \rangle$ に対し $>$ が文脈について閉じているとき $\langle \gtrsim, > \rangle$ は**単調**であるという。

相対停止性は簡約対を見つけることで証明できる [6]。

定理 2.17. 単調簡約対 $\langle \gtrsim, > \rangle$ に対し $\mathcal{R} \subseteq >$ かつ $\mathcal{S} \subseteq \gtrsim$ が成り立つとき $\mathcal{R}/\mathcal{S}$ が停止性を持つ。

書換え列において分岐する箇所を危険対として表現する。危険対は合流性証明で用いられる。

定義 2.18. 代入 σ が変数から変数への写像かつ全単射であるとき σ を **改名** (renaming) と呼ぶ。書換え規則の両辺に改名を適用することを**変数の名前替え**と呼ぶ。以下が成り立つとき $\ell_2\sigma[r_1\sigma]_p \ {}_{\mathcal{R}}\!\!\leftarrow \ell_2\sigma \xrightarrow{\epsilon}_{\mathcal{R}} r_2\sigma$ を**危険頂** (critical peak) と呼ぶ。

(1) $\ell_1 \to r_1$ と $\ell_2 \to r_2$ が変数の名前替えをした $\mathcal{R}$ の書換え規則であり変数を共有していない。
(2) $p \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}}(\ell_2)$ が成り立つ。
(3) σ が ℓ_1 と $\ell_2|_p$ の最汎単一化子である。
(4) $p = \epsilon$ なら $\ell_1 \to r_1$ が変数の名前変えをした $\ell_2 \to r_2$ ではない。

またこのとき $\ell_2\sigma[r_1\sigma]_p \approx r_2\sigma$ を**危険対** (critical pair) と呼び必要であれば

$\ell_2\sigma[r_1\sigma]_p\ {}_{\mathcal{R}}{\leftarrow}\!\rtimes\!\xrightarrow{\epsilon}_{\mathcal{R}} r_2\sigma$ と省略できる。

例 2.19. 以下の書換え規則を持つ項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える。

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, x) \to \mathsf{g}(x) \qquad\qquad \mathsf{f}(x, \mathsf{a}) \to \mathsf{g}(x)$$

書換え規則 $\ell_1 = \mathsf{f}(\mathsf{a}, y) \to \mathsf{g}(y) = r_1, \ell_2 = \mathsf{f}(z, \mathsf{a}) \to \mathsf{g}(z) = r_2$、代入 $\sigma = \{y \mapsto \mathsf{a}, z \mapsto \mathsf{a}\}$、位置 $p = \epsilon$ に対し $\ell_1[r_2\sigma]_p = \mathsf{g}(\mathsf{a})$ と $r_1\sigma = \mathsf{g}(\mathsf{a})$ は危険対である。

第 3 章

規則消去法

規則消去法は書換え規則を消去することで合流性を証明する。規則消去法では与えられた項書換え系 $\mathcal{R}$ とその部分システム $\mathcal{S}$ の合流性が同値となる定理に基づき書換え規則を消去する。この定理は $\mathcal{S}$ の合流性が $\mathcal{R}$ の合流性を示す定理とその逆方向の定理からなる。この章では後者について説明する。

3.1　永続性に基づく規則消去法

型付けされる項上の書換え系と全ての項上の項書換え系の間である性質が保たれるときその性質は**永続性**を持つという。合流性は永続性を持っており型の付いた項のみの合流性を考えることで項全体の合流性を証明できる。この章ではソートと呼ばれる概念と合流性の永続性を用いた規則消去法について説明する。また多ソート項書換え系の定義は [11] を参考にしている。

定義 3.1. $\mathbb{S}$ をソートの集合とする。シグネチャ $\mathcal{G}$ を $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ とする。$\mathcal{G}$ についての**多ソートシグネチャ** Σ を関数記号 $f^{(n)} \in \mathcal{G}$ と**ランク** $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) \in \mathbb{S}^{n+1}$ の対の集合とし、$\langle f, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)\rangle$ を $f : \alpha_1 \times \cdots \times \alpha_n \to \beta$ と書く。特に $n = 0$ であり $\langle f, \beta\rangle$ のとき $f : \beta$ と書く。**変数環境** (variable environment) Γ を変数とソートの対の集合とし、$\langle x, \alpha\rangle$ を $x : \alpha$ とも書く。Σ を多ソートシグネチャとする。以下の推論規則から $\Gamma \vdash_\Sigma t : \alpha$ が導出されるような変数環境 Γ とソート α が存在するとき t が Σ 上で**型付**

けされる (well-sorted) という。またこのとき簡潔に $\vdash_\Sigma t : \alpha$ とも書く。

$$\dfrac{}{\Gamma \cup \{x : \alpha\} \vdash_\Sigma x : \alpha} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash_\Sigma t_1 : \alpha_1 \quad \cdots \quad \Gamma \vdash_\Sigma t_n : \alpha_n \quad f : \alpha_1 \times \cdots \times \alpha_n \to \alpha \in \Sigma}{\Gamma \vdash_\Sigma f(t_1, \ldots, t_n) : \alpha}$$

書換え規則 $\ell \to r$ とソート α に対し $\Gamma \vdash_\Sigma \ell : \alpha$ かつ $\Gamma \vdash_\Sigma r : \alpha$ となる変数環境 Γ が存在するとき $\vdash_\Sigma \ell \to r : \alpha$ とも書く。$\mathcal{F}$ と $\mathcal{V}$ からなる Σ 上で型付けされる項の集合を $\mathcal{T}_\Sigma(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と定義する。文脈 C、ソート α, β、新規変数 x に対し $\Gamma \cup \{x : \alpha\} \vdash_\Sigma C[x] : \beta$ となるような変数環境 Γ が存在するとき C が Σ 上で型付けされる (well-sorted on Σ) といい、簡潔に $\vdash_\Sigma C : \alpha \to \beta$ とも書く。また $\mathcal{C}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ に属する文脈の内 Σ 上で型付けされる文脈の集合を $\mathcal{C}_\Sigma(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と書く。項書換え系 $\mathcal{R}$ の任意の書換え規則 $\ell \to r \in \mathcal{R}$ に対し $\vdash_\Sigma \ell \to r : \alpha$ となるソート α が存在するとき $\mathcal{R}$ を Σ 上の**多ソート項書換え系** (many-sorted term rewriting system on Σ, STRS) と呼ぶ。

例 3.2. 以下の合流性を持つ項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える。

$$1\colon\ \mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{h}(x)) \quad 2\colon\ \mathsf{f}(\mathsf{h}(y)) \to y$$

$\mathcal{G} = \{\mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h}, \mathsf{s}\}$ とし以下の関数記号とランクからなる多ソートシグネチャ Σ を定義する。

$$\mathsf{f} : A \to B \qquad \mathsf{g} : C \to A \qquad \mathsf{h} : C \to D \qquad \mathsf{s} : D \to B$$

変数環境 $\Gamma = \{x : C, y : C\}$ を定義する。一番目の規則 $\ell_1 = \mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{h}(x)) = r_1$ について考える。左辺 ℓ_1 に対し以下のように $\Gamma \vdash \ell_1 : B$ が導出されるため ℓ_1 は Σ 上で型付けされる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash_\Sigma x : C} \quad \mathsf{g} : C \to A \in \Sigma}{\Gamma \vdash_\Sigma \mathsf{g}(x) : A} \quad \mathsf{f} : A \to B \in \Sigma}{\Gamma \vdash_\Sigma \mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) : B}$$

また右辺 r_1 に対しても以下のように $\Gamma \vdash_\Sigma r_1 : B$ が導出されるため r_1 は Σ 上で型付けされる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash_\Sigma x : C} \quad \mathsf{h} : C \to D \in \Sigma}{\Gamma \vdash_\Sigma \mathsf{h}(x) : D} \quad \mathsf{s} : D \to B \in \Sigma}{\Gamma \vdash_\Sigma \mathsf{s}(\mathsf{h}(x)) : B}$$

二番目の規則の左辺 $\ell_2 = \mathsf{f}(\mathsf{h}(x))$ については $\mathsf{f} : A \to B \in \Sigma$ かつ $\Gamma \vdash_\Sigma \mathsf{h}(x) : D$ であるため ℓ_2 は Σ 上で型付けされない。よって $\mathcal{S} = \{1\}$ とすると $\mathcal{S}$ は Σ 上の多ソート項書換え系である。

定理 3.3. $\mathcal{R}$ を項書換え系、Σ を $\mathcal{F}$ についての多ソートシグネチャとする。$\mathcal{R}$ が $\mathcal{T}_\Sigma(\mathcal{F},\mathcal{V})$ 上で合流性を持つことと $\mathcal{R}$ が合流性を持つことは同値である。

定義 3.4. $\mathbb{S}$ をソートの集合、$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$、$\Sigma$ を $\mathcal{G}$ についての多ソートシグネチャとする。ソートの集合 $\hat{\mathbb{S}}$ を $\mathbb{S} \cup \{*\}$ と定義する。ただし $* \notin \mathbb{S}$ とする。また今後ソートとして $*$ と書いたときこのソートを表すものとする。$\mathcal{F}$ についての多ソートシグネチャ $\hat{\Sigma}$ を以下のように定義する。

$$\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \{f : * \times \cdots \times * \to * \mid f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}\}$$

項書換え系 $\mathcal{R}$ の部分集合 $\mathcal{R}{\restriction_\Sigma}$ を以下のように定義する。

$$\mathcal{R}{\restriction_\Sigma} = \{\ell \to r \in \mathcal{R} \mid \vdash_{\hat{\Sigma}} \ell : \alpha \text{ and } \alpha \neq *\}$$

型付けされた項は多ソート項書換え系での書換えにおいて型が保たれる。その性質を次に示す。

命題 3.5. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$、$\Sigma$ を $\mathcal{G}$ についての多ソートシグネチャ、$s \in \mathcal{T}_\Sigma(\mathcal{F},\mathcal{V}), t \in \mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ を項、$\mathcal{R}$ を Σ 上の多ソート項書換え系とすると次が成り立つ。$\vdash_\Sigma s : \alpha$ かつ $s \to_\mathcal{R} t$ のとき $\vdash_\Sigma t : \alpha$ である。

上の命題より多ソート項書換え系による複数回の書換えでも型は保たれる。

補題 3.6. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$、$\Sigma$ を $\mathcal{G}$ についての多ソートシグネチャ、$s \in \mathcal{T}_\Sigma(\mathcal{F},\mathcal{V}), t \in \mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ を項、$\mathcal{R}$ を Σ 上の多ソート項書換え系とすると次が成り立つ。$\vdash_\Sigma s : \alpha$ かつ $s \to_\mathcal{R}^* t$ のとき $\vdash_\Sigma t : \alpha$ である。

証明. $s \to_\mathcal{R}^n t$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在するため n についての帰納法で証明する。$n = 0$ のとき $s = t$ となるため成り立つ。$n' \in \mathbb{N}$ に対し $n = n' + 1$ のとき $s \to_\mathcal{R}^* s' \to_\mathcal{R} t$ となる項 $s' \in \mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ が存在する。帰納法の仮定より $\vdash_\Sigma s' : \alpha$ であるため命題 3.5 より $\vdash_\Sigma t : \alpha$ となる。 □

$\hat{\Sigma}$ 上で型付けされる項はランクに $*$ を含む関数記号 $f : * \times \cdots \times * \to *$ のみから構成されるかそれ以外の関数記号のみから構成される。次の 2 つの補題でそれを証明する。

補題 3.7. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$、$\Sigma$ を $\mathcal{G}$ に関する多ソートシグネチャ、$t \in \mathcal{T}_{\hat{\Sigma}}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ を項とする。$\vdash_{\hat{\Sigma}} t : \alpha$ かつ $\alpha \neq *$ であるとき任意の関数記号 $f \in \mathcal{F}\mathsf{un}(t)$ に対し $f : * \times \cdots \times * \to * \notin \hat{\Sigma}$ である。

証明. t についての構造的帰納法で証明する。$t \in \mathcal{V}$ のとき $\mathcal{F}\mathsf{un}(t) = \varnothing$ であるため成り立つ。$t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を項、f を関数記号とし $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ のとき$\vdash_{\hat{\Sigma}} t : \alpha$ かつ $\alpha \neq *$ であるため $f : * \times \cdots \times * \to * \notin \hat{\Sigma}$ である。t が $\hat{\Sigma}$ 上で型付けされるため全ての $1 \leq i \leq n$ に対し $\vdash t_i : \alpha_i$ かつ $\alpha_i \neq *$ が成り立つ。よって帰納法の仮定から任意の関数記号 $f' \in \mathcal{F}\mathsf{un}(t_1) \cup \cdots \cup \mathcal{F}\mathsf{un}(t_n)$ に対し $f' : * \times \cdots \times * \to * \notin \hat{\Sigma}$ が成り立つ。 □

補題 3.8. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$、$\Sigma$ を $\mathcal{G}$ についての多ソートシグネチャ、$t \in \mathcal{T}_{\hat{\Sigma}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を項とする。$\vdash_{\hat{\Sigma}} t : *$ であるとき任意の関数記号 $f \in \mathcal{F}\mathsf{un}(t)$ に対し $f : * \times \cdots \times * \to * \in \hat{\Sigma}$ である。

証明. t ついての構造的帰納法で証明する。$t \in \mathcal{V}$ のとき $\mathcal{F}\mathsf{un}(t) = \varnothing$ であるため成り立つ。$t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を項、f を関数記号とし $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ のとき$\vdash_{\hat{\Sigma}} t : *$ であるため $f : * \times \cdots \times * \to * \in \hat{\Sigma}$ である。t が $\hat{\Sigma}$ 上で型付けされるため全ての $1 \leq i \leq n$ に対し $\vdash_{\hat{\Sigma}} t_i : *$ が成り立つ。よって帰納法の仮定から任意の関数記号 $f' \in \mathcal{F}\mathsf{un}(t_1) \cup \cdots \cup \mathcal{F}\mathsf{un}(t_n)$ に対し $f' : * \times \cdots \times * \to * \in \hat{\Sigma}$ が成り立つ。 □

また上の 2 つの補題が文脈に対しても同じように成り立つため次のことがいえる。

補題 3.9. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$、$\Sigma$ を $\mathcal{G}$ についての多ソートシグネチャ、$C \in \mathcal{C}_{\hat{\Sigma}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を文脈とする。$\vdash_{\hat{\Sigma}} C : \alpha \to \beta$ かつ $\alpha \neq *$ のとき $\beta \neq *$ である。

証明. C についての構造的帰納法で証明する。$C = \Box$ のとき $\beta = \alpha \neq *$ である。次に $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を項、f を関数記号、$C' \in \mathcal{C}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を文脈とし $C = f(t_1, \ldots, C', \ldots, t_n)$ のときを考える。C が $\hat{\Sigma}$ 上で型付けされるため $f : \alpha_1 \times \cdots \times \alpha_n \to \beta \in \hat{\Sigma}$ とすると $C = f(t_1, \ldots, t_n)[C']_i$ となる i が存在し$\vdash_{\hat{\Sigma}} C' : \alpha \to \alpha_i$ となる。よって帰納法の仮定から $\alpha_i \neq *$ である。つまり $f : * \times \cdots \times * \to * \notin \hat{\Sigma}$ であるため $\beta \neq *$ となる。 □

以上の準備の後、左辺が $\mathbb{S}$ のソートを持つ書換え規則を部分システムで書換えられるとき $\mathbb{S}$ の型を持つ項に対する書換えが部分システムでの書換えであることを示す。また項書換え系 $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ に対し $\mathcal{R} \subseteq \to_{\mathcal{S}}^*$ と書いたとき全ての規則 $\ell \to r \in \mathcal{R}$ に対し $\ell \to_{\mathcal{S}}^* r$ となることを意味する。

補題 3.10. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$、$\Sigma$ を $\mathcal{G}$ についての多ソートシグネチャ、$s, t \in \mathcal{T}_{\hat{\Sigma}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を項、$\mathcal{R}, \mathcal{S}$ を項書換え系とする。$\mathcal{R}\restriction_{\Sigma} \subseteq \to_{\mathcal{S}}^*$ かつ $\mathcal{S}$ を $\hat{\Sigma}$ 上の多ソート項書換え系であると仮定すると以下が成り立つ。

(1) $s \to_{\mathcal{R}} t$ であり $\vdash_{\hat{\Sigma}} s : \alpha$ かつ $\alpha \neq *$ のとき $s \to_{\mathcal{S}}^* t$ が成り立ち $\vdash_{\hat{\Sigma}} t : \alpha$ である。

(2) $s \to_{\mathcal{R}}^* t$ であり $\vdash_{\hat{\Sigma}} s : \alpha$ かつ $\alpha \neq *$ のとき $s \to_{\mathcal{S}}^* t$ が成り立つ。

証明. まず (1) について証明する。$s \to_{\mathcal{R}} t$ より $s = C[\ell\sigma]$ かつ $t = C[r\sigma]$ となる書換え規則 $\ell \to r \in \mathcal{R}$、文脈 $C \in \mathcal{C}_{\hat{\Sigma}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$、代入 σ が存在する。$\vdash_{\hat{\Sigma}} s : \alpha$ かつ $\alpha \neq *$ であるため補題 3.7 より任意の関数記号 $f \in \mathcal{F}\mathsf{un}(s)$ に対し $f : * \times \cdots \times * \to * \notin \hat{\Sigma}$ が成り立つ。よって任意の関数記号 $f' \in \mathcal{F}\mathsf{un}(\ell)$ に対し $f' : * \times \cdots \times * \to * \notin \Sigma$ が成り立つため $\vdash_{\hat{\Sigma}} \ell : \alpha'$ かつ $\alpha' \neq *$ である。つまり $\ell \to r \in \mathcal{R}{\restriction_\Sigma}$ であるため $\ell \to_{\mathcal{S}}^* r$ が成り立つ。よって $s = C[\ell\sigma] \to_{\mathcal{S}}^* C[r\sigma] = t$ となる。また $\mathcal{S}$ が $\hat{\Sigma}$ 上の多ソート項書換え系であるため $\Gamma \vdash_{\hat{\Sigma}} \ell : \alpha'$ かつ $\Gamma \vdash_{\hat{\Sigma}} r : \alpha'$ となる変数環境 Γ が存在する。よって $\vdash_{\hat{\Sigma}} \ell\sigma : \alpha'$ であることから $\vdash_{\hat{\Sigma}} r\sigma : \alpha'$ である。また $\vdash_{\hat{\Sigma}} C : \alpha' \to \alpha$ であるため $\vdash_{\hat{\Sigma}} C[r\sigma] : \alpha$ である。次に (2) について証明する。$s \to_{\mathcal{R}}^n t$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在するため n についての帰納法で証明する。$n = 0$ のとき $s \to_{\mathcal{S}}^0 t$ が成り立つ。$n' \in \mathbb{N}$ に対し $n = n' + 1$ のとき $s \to_{\mathcal{R}} s' \to_{\mathcal{R}}^{n'} t$ となる項 $s' \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ が存在する。$\vdash_{\hat{\Sigma}} s : \alpha$ かつ $\alpha \neq *$ であるため *(1)* より $s \to_{\mathcal{S}}^* s'$ かつ $\vdash_{\hat{\Sigma}} s' : \alpha$ である。よって帰納法の仮定より $s' \to_{\mathcal{S}}^* t$ が成り立つため $s \to_{\mathcal{S}}^* t$ となる。 $\square$

次の定理を永続性に基づく規則消去法に用いる。

定理 3.11. $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ を項書換え系、$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$、$\Sigma$ を $\mathcal{G}$ についての多ソートシグネチャとする。$\mathcal{S}$ が Σ 上の多ソート項書換え系であり $\mathcal{R}{\restriction_\Sigma} \subseteq \to_{\mathcal{S}}^*$ かつ $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ と仮定する。$\mathcal{R}$ が合流性を持つとき $\mathcal{S}$ も合流性を持つ。

証明. $\mathcal{S}$ が $\hat{\Sigma}$ 上の多ソート項書換え系であることは自明であるため $\mathcal{S}$ が $\mathcal{T}_{\hat{\Sigma}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ 上で合流性を持つことを証明する。$\hat{\Sigma}$ 上で型付けされた項 $s \in \mathcal{T}_{\hat{\Sigma}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と項 $t, u \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ に対し $t \; {}_{\mathcal{S}}^{*}\!\!\leftarrow s \to_{\mathcal{S}}^* u$ と仮定する。$\mathcal{R}$ が合流性を持つため $t \to_{\mathcal{R}}^* v \; {}_{\mathcal{R}}^{*}\!\!\leftarrow u$ となる項 $v \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ が存在する。補題 3.6 よりソート α に対し $\vdash_{\hat{\Sigma}} t : \alpha$ である。α について場合分けを考える。

1. $\alpha = *$ のとき補題 3.8 より任意の関数記号 $f \in \mathcal{F}\mathsf{un}(t)$ に対し $f : * \times \cdots \times * \to * \in \hat{\Sigma}$ が成り立つ。$s \to_{\mathcal{S}}^0 t$ のとき $s = t$ であるため任意の関数記号 $f \in \mathcal{F}\mathsf{un}(s)$ に対し $f : * \times \cdots \times \to * \in \hat{\Sigma}$ が成り立つため $s \to_{\mathcal{S}}^0 u$ となり $t \to_{\mathcal{S}}^0 v \; {}_{\mathcal{S}}^{0}\!\!\leftarrow u$ となる。項 $s' \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ に対し $s \to_{\mathcal{S}}^* s' \to_{\mathcal{S}} t$ のとき $s' = C[\ell\sigma] \to_{\mathcal{S}} C[r\sigma] = t$ となる文脈 $C \in \mathcal{C}_{\hat{\Sigma}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$、代入 σ、書換え規則 $\ell \to r \in \mathcal{S}$ が存在する。$\mathcal{S}$ が $\hat{\Sigma}$ 上の多ソート項書換え系であるため $\vdash_{\hat{\Sigma}} r : *$ より $\vdash_{\hat{\Sigma}} \ell : *$ である。しかし $\mathcal{S}$ は Σ 上の多ソート項書換え系であり $* \notin \mathbb{S}$ であるため矛盾する。

2. $\alpha \neq *$ のとき補題 3.10 より $t \to_{\mathcal{S}}^* v$ となる。また同様に $u \to_{\mathcal{S}}^* v$ が成り立つたつため $\mathcal{S}$ が $\mathcal{T}_{\hat{\Sigma}}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ 上で合流性を持つ。定理 3.3 より $\mathcal{S}$ が合流性を持つ。 □

例 3.12. 以下の合流性を持つ項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える。

$$1:\ \mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{s}(\mathsf{h}(x)) \quad 2:\ \mathsf{f}(\mathsf{h}(y)) \to y$$

$\mathcal{G} = \{\mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h}, \mathsf{s}\}$ とし $\mathcal{S} = \{1\}$ とする。以下の関数記号とランクからなる $\mathcal{G}$ についての多ソートシグネチャ Σ を定義する。

$$\mathsf{f} : A \to B \qquad \mathsf{g} : C \to A \qquad \mathsf{h} : C \to D \qquad \mathsf{s} : D \to B$$

$\mathcal{R}{\restriction_\Sigma} = \{1\} = \mathcal{S}$ である。定理 3.11 より $\mathcal{R}$ が合流性を持つため $\mathcal{S}$ が合流性を持つ。

次の例では関数適用を関数適用記号 (applicative symbol) $\circ^{(2)}$ により表す。また項 s, t に対し $\circ(s, t)$ を中置記法 $s \circ t$ で表現する。

例 3.13. 以下の合流性を持つ項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える。

$$1:\ \mathsf{f} \circ x \to x \quad 2:\ \mathsf{g} \circ y \to y$$

$\mathcal{G} = \{\mathsf{f}, \circ\}$ とし $\mathcal{S} = \{1\}$ とする。以下の関数記号とランクからなる $\mathcal{G}$ についての多ソートシグネチャ Σ を定義する。

$$\mathsf{f} : A \qquad \circ : A \times B \to B$$

$\mathcal{R}{\restriction_\Sigma} = \{1\} = \mathcal{S}$ である。定理 3.11 より $\mathcal{R}$ が合流性をもつため $\mathcal{S}$ が合流性を持つ。

3.2 既存手法との比較

この節では新谷らが提案した規則消去法について説明する。

定義 3.14. $\mathcal{R}$ と $\mathcal{S}$ を項書換え系とする。項書換え系 $\mathcal{R}$ の部分集合 $\mathcal{R}{\restriction_\mathcal{S}}$ を以下のように定義する。

$$\mathcal{R}{\restriction_\mathcal{S}} = \{\ell \to r \in \mathcal{R} \mid \mathcal{F}\mathsf{un}(\ell) \subseteq \mathcal{F}\mathsf{un}(\mathcal{S})\}$$

例 3.15. 以下の書換え規則からなる項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える。

$$1:\ \mathsf{f}(\mathsf{g}(x), y) \to \mathsf{g}(\mathsf{h}(x, y)) \quad 2:\ \mathsf{f}(x, \mathsf{g}(y)) \to \mathsf{g}(\mathsf{h}(x, y)) \quad 3:\ \mathsf{s}(\mathsf{g}(x)) \to x$$

- $\mathcal{S} = \{1\}$ とすると $\mathcal{R}{\restriction_\mathcal{S}} = \{1, 2\}$ となる。

- $\mathcal{S} = \{2,3\}$ とすると $\mathcal{R}\restriction_{\mathcal{S}} = \mathcal{R}$ となる。

定理 3.16. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ かつ $\mathcal{R}\restriction_{\mathcal{S}} \subseteq \to_{\mathcal{S}}^*$ と仮定する。$\mathcal{R}$ が合流性を持つとき $\mathcal{S}$ も合流性を持つ。

例 3.17. 以下の書換え規則からなる合流性を持つ項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える。

$$1:\ \mathsf{f}(\mathsf{g}(x), y) \to \mathsf{g}(\mathsf{h}(x,y)) \quad 2:\ \mathsf{f}(x, \mathsf{g}(y)) \to \mathsf{g}(\mathsf{h}(x,y)) \quad 3:\ \mathsf{s}(\mathsf{g}(x)) \to x$$

$\mathcal{S} = \{1,2\}$ とすると $\mathcal{R}\restriction_{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \subseteq \to_{\mathcal{S}}^*$ となる。$\mathcal{R}$ が合流性を持つため $\mathcal{S}$ も合流性を持つ。

並列書換えは並列位置の項を一度に書換える書換えステップである。また並列危険頂は危険頂を並列書換えにより拡張したものである。

定義 3.18. 位置の集合 P が**並列位置の集合**であるとは任意の位置 $p, q \in P$ が $p \neq q$ のとき $p \parallel q$ を満たすことである。項書換え系 $\mathcal{R}$ と並列位置の集合 P に対し $\overset{P}{\twoheadrightarrow}_{\mathcal{R}}$ を以下のように定義する。

- 全ての変数 x に対し $x \overset{P}{\twoheadrightarrow}_{\mathcal{R}} x$ が成り立つ。また $P = \varnothing$ である。
- 関数記号 $f^{(n)} \in \mathcal{F}$、項 $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$、並列位置の集合 $P_1, \ldots, P_n$ に対し、$1 \leq i \leq n$ を満たす任意の i について $s_i \overset{P_i}{\twoheadrightarrow}_{\mathcal{R}} t_i$ を満たすとき $f(s_1, \ldots, s_n) \overset{P}{\twoheadrightarrow}_{\mathcal{R}} f(t_1, \ldots, t_n)$ が成り立つ。ここで $P = \{ip \mid 1 \leq i \leq n, p \in P_i\}$ である。
- $\ell \to r \in \mathcal{R}$ のとき全ての代入 σ に対し $\ell\sigma \overset{P}{\twoheadrightarrow}_{\mathcal{R}} r\sigma$ が成り立ち $P = \{\epsilon\}$ である。

また $\twoheadrightarrow_{\mathcal{R}}, \twoheadrightarrow$ と省略して書くこともできる。E を項の対の集合とする。代入 σ が任意の項の対 $\langle s, t \rangle \in E$ に対し $s\sigma = t\sigma$ を満たすとき σ は E の**単一化子**であるという。E の単一化子 σ が**最汎単一化子**であるとは任意の E の単一化子 τ に対し $\tau = \sigma\sigma'$ となる代入 σ' が存在することである。全ての位置 $p \in P$ に対し項 s の位置 p を項 t_p で置き換えた項を $s[t_p]_{p \in P}$ で表す。$\mathcal{R}$ と $\mathcal{S}$ を項書換え系、$\ell \to r$ を変数の名前替えをした $\mathcal{S}$ の書換え規則、P を並列位置の集合、任意の $p \in P$ に対する $\ell_p \to r_p$ を変数の名前替えをした $\mathcal{R}$ の書換え規則、σ を代入とする。$\ell\sigma[r_p\sigma]_{p \in P}\ {}_{\mathcal{R}}\overset{P}{\twoheadleftarrow}\ \ell\sigma \overset{\epsilon}{\to}_{\mathcal{S}} r\sigma$ が**並列危険頂** (parallel critical peak) であるとは以下が成り立つことである。

(1) $P \subseteq \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}}(\ell)$ が ℓ の並列位置の集合であり空集合ではない。
(2) 各 $\ell_p \to r_p$ と $\ell \to r$ が変数を共有しない。
(3) σ が $\{\langle \ell_p, \ell|_p \rangle \mid p \in P\}$ の最汎単一化子である。
(4) $P = \{\epsilon\}$ であるとき $\ell_\epsilon \to r_\epsilon$ が変数の名前替えをした $\ell \to r$ ではない。

また $\ell\sigma[r_p\sigma]_{p\in P} \approx r\sigma$ を**並列危険対** (parallel critical pair) と呼ぶ。さらにこのとき必要であれば $\ell\sigma[r_p\sigma]_{p\in P}\ {}_{\mathcal{R}}\!\leftarrow\!\!\!\!\!\shortparallel\!\rtimes\!\xrightarrow{\epsilon}_{\mathcal{S}} r\sigma$ と省略して書くこともできる。

新谷らは次の直交性に基づく合成可能合流性基準と定理 3.16 の組み合わせによる規則消去法を自動化した。

定理 3.19. $\mathcal{R}$ を左線形項書換え系とする。$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ かつ ${}_{\mathcal{R}}\!\leftarrow\!\!\!\!\!\shortparallel\!\rtimes\!\xrightarrow{\epsilon}_{\mathcal{R}} \subseteq \leftrightarrow^*_{\mathcal{S}}$ が成り立ち $\mathcal{S}$ が合流性を持つとき $\mathcal{R}$ が合流性を持つ。

例 3.20. 次の規則を持つ左線形項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える。

$$1\colon\ \mathsf{g}(\mathsf{a}) \to \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a})) \quad 2\colon\ \mathsf{a} \to \mathsf{b} \quad 3\colon\ \mathsf{g}(\mathsf{b}) \to \mathsf{c} \quad 4\colon\ \mathsf{f}(x) \to \mathsf{c}$$

(1) $\mathcal{R}$ は以下の並列危険対を持ち交差する。

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{g}(\mathsf{a}) \arrow[dl, bend right, "\shortparallel"'] \arrow[dr, bend left, "\epsilon"] & \\
\mathsf{g}(\mathsf{b}) \arrow[r, dashed] & \mathsf{c} & \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{a})) \arrow[l, dashed]
\end{tikzcd}$$

ここで $\mathcal{S} = \{3,4\}$ とすると ${}_{\mathcal{R}}\!\leftarrow\!\!\!\!\!\shortparallel\!\rtimes\!\xrightarrow{\epsilon}_{\mathcal{R}} \subseteq \leftrightarrow^*_{\mathcal{S}}$ が成り立つ。また $\mathcal{R}{\restriction_{\mathcal{S}}} = \mathcal{S} \subseteq \to^*_{\mathcal{S}}$ となるため定理 3.19 と定理 3.16 から $\mathcal{R}$ と $\mathcal{S}$ の合流性が同値となる。

(2) $\mathcal{S}$ は並列危険対を持たないため定理 3.19 と定理 3.16 より $\mathcal{S}$ と $\varnothing$ の合流性が同値となる。

(3) 空の項書換え系 $\varnothing$ が合流性を持つことは自明である。

よって $\mathcal{R}$ が合流性を持つ。

次に本論文で提案する定理 3.11 が新谷らの成果である定理 3.16 を包含することを示す。

定理 3.21. 定理 *3.11* が定理 *3.16* を包含する。

証明. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ かつ $\mathcal{R}{\restriction_{\mathcal{S}}} \subseteq \to^*_{\mathcal{S}}$ と仮定する。$\mathcal{G} = \mathcal{F}\mathsf{un}(\mathcal{S})$ かつ Σ を $\mathcal{G}$ についての多ソートシグネチャとし任意の関数記号 $f \in \mathcal{G}$ に対し $f : A \times \cdots \times A \to A \in \Sigma$ と定義する。$\Gamma = \{x : A \mid x \in \mathcal{V}\}$ とすると $\mathcal{S}$ の書換え規則 $\ell \to r \in \mathcal{S}$ に対し $\Gamma \vdash_\Sigma \ell : A$ かつ $\Gamma \vdash_\Sigma r : A$ が成り立つ。書換え規則 $\ell \to r \in \mathcal{R}$ に対し $\vdash_{\hat{\Sigma}} \ell : \alpha$ かつ $\alpha \neq *$ のとき任意の関数記号 $f \in \mathcal{F}\mathsf{un}(\ell)$ に対し $f : A \times \cdots \times A \to A \in \hat{\Sigma}$ が成り立つため $f \in \mathcal{F}\mathsf{un}(\mathcal{S})$ となる。よって $\ell \to^*_{\mathcal{S}} r$ となり定理 3.11 の十分条件が成り立つため定理 3.11 が定理 3.16 を包含する。 $\square$

3.3 自動化

新谷ら [14] は合成可能合流性基準と定理 3.16 を組み合わせた規則消去法を提案し与えられた項書換え系 $\mathcal{R}$ の部分システム $\mathcal{S}$ の探索で問題になっていたバックトラックをなくし時間効率を向上させた。また新谷らは規則消去法の実装において合成可能合流性基準を満たす部分システムを見つけた後定理 3.16 を満たす部分システムに拡張する方法で実装している。しかしこの拡張が 4 章、5 章で説明する合成可能合流性基準の十分条件を保てないためそれらに基づく規則消去法を実装することができない。そのため定理 3.19 と定理 3.16 からなる規則消去法の実装のみにとどまっている。そこで充足可能性問題として部分システムを見つけることで 4 章、5 章で説明する規則消去法を実装可能にする。また左線形ではない項書換え系に適用可能である 6 章の規則消去法についても実装を行う。この節では定理 3.11 を制約式で表し、それぞれの規則消去法の実装については 4 章、5 章、6 章で説明する。

与えられた項書換え系 $\mathcal{R}$ から制約式を生成し SMT ソルバでその制約式を解くことで部分システム $\mathcal{S}$ を見つける。制約式は以下のように構成されている。

$$\phi ::= \top \mid \bot \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid \phi \vee \phi \mid x \mid e = e \mid e \neq e \mid e > e \mid e < e \mid e \leq e \mid e \geq e$$

ここで x はブール型の変数、e は算術式を表す。制約式では各ソートを整数値で表しソート $* \notin \mathbb{S}$ を 0 とする。この節で扱う変数はそれぞれ以下を表す。

- 整数型の変数 $x_{f_0}, \ldots, x_{f_n}$ は $f^{(n)}$ に対するランクを表す。
- x_f はブール型の変数であり $f \in \mathcal{G}$ を表す。
- x_β はブール型の変数であり $\beta \in \mathcal{S}$ を表す。
- $x_{\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}}$ はブール型の変数であり $x_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge x_{\beta_n}$ を表す。

項 t が $\mathcal{G}$ についての多ソートシグネチャ Σ 上で型付けされることを表す制約式 $\mathsf{W}(t)$ を以下のように定義する。

$$\mathsf{W}_0(x,t) = \begin{cases} \top & \text{if } t \in \mathcal{V} \\ x = x_{f_0} & \text{if } t = f(t_1,\ldots,t_n) \end{cases}$$

$$\mathsf{W}(t) = \begin{cases} \top & \text{if } t \in \mathcal{V} \\ \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (\mathsf{W}_0(x_{f_i}, t_i) \wedge \mathsf{W}(t_i)) & \text{if } t = f(t_1,\ldots,t_n) \end{cases}$$

項 t の型を表す変数を返す関数 $\mathsf{H}(t)$ を以下のように定義する。

$$\mathsf{H}(t) = \begin{cases} x_t & \text{if } t \in \mathcal{V} \\ x_{f_0} & \text{if } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

$\mathcal{R}{\restriction_\Sigma} \subseteq \to_{\mathcal{S}}^*$ の右辺を表すため関数 $\mathsf{T}(k, \mathcal{R}, s, t)$ を以下のように定義する。

$$\mathsf{T}(k, \mathcal{R}, s, t) = \{\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \mid n \leq k,\, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathcal{R}, \text{ and } s \to_{\beta_1} \cdots \to_{\beta_n} t\}$$

次の関数 $\mathsf{P}(t)$ と $\mathsf{V}(t, p, x)$ により変数に型を付ける。

$$\mathsf{P}(t) = \begin{cases} \{(\epsilon, t)\} & \text{if } t \in \mathcal{V} \\ \{(ip, x) \mid 1 \leq i \leq n, (p, x) \in \mathsf{P}(t_i)\} & \text{if } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

$$\mathsf{V}(t, p, x) = \begin{cases} x_{f_i} = x_x & \text{if } i \in \mathbb{N},\, p = p'i, \text{ and } t|_{p'} = f(t_1, \ldots, t_n) \\ \top & \text{otherwise} \end{cases}$$

これらの関数を用いて定理 3.11 を制約式で表す。また与えられた項書換え系 $\mathcal{R}$ の書換え規則同士は同じ変数を共有しないものとする。

Φ_R^1 を各規則 $\ell \to r \in \mathcal{R}$ に対する次式の連言とする。

(1) $\mathcal{R}$ における変数の型がその出現位置の型と同じである：

$$\bigwedge_{t \in \{\ell, r\}} \bigwedge_{(p, x) \in \mathsf{P}(t)} \mathsf{V}(t, p, x)$$

(2) 前項 (1) の仮定のもとで $\mathcal{S}$ が Σ 上の多ソート項書換え系とみなせる：

$$\neg x_{\ell \to r} \vee (\mathsf{W}(\ell) \wedge \mathsf{W}(r) \wedge \mathsf{H}(\ell) = \mathsf{H}(r) \wedge \mathsf{H}(\ell) \neq 0)$$

(3) 前項 (1) の仮定のもとで $\mathcal{R}{\restriction_\Sigma} \subseteq \to_{\mathcal{S}}^*$ を満たす：

$$\neg(\mathsf{W}(\ell) \wedge \mathsf{H}(\ell) \neq 0) \vee \bigvee_{\mathcal{S}' \in \mathsf{T}(k, \mathcal{R}, \ell, r)} x_{\mathcal{S}'})$$

また Φ_R^2 を各関数記号 $f^{(n)} \in \mathcal{F}\mathsf{un}(\mathcal{R})$ に対する次式の連言とする。

$$(\neg x_f \vee (\bigwedge_{0 \leq i \leq n} x_{f_i} \neq 0)) \ \wedge\ (x_f \vee (\bigwedge_{0 \leq i \leq n} x_{f_i} = 0))$$

Φ_R^2 は $* \notin \mathbb{S}$ かつ $\mathcal{G}$ に属さない関数記号のランクが $* \times \cdots * \to *$ であることを表す。これらの制約式の連言 $\Phi_R^1 \wedge \Phi_R^2$ を Φ_R で表す。与えられた項書換え系から Φ_R と以降の自動化の節で定義する制約式を生成し SMT ソルバで解くことで定理 3.11 及び対応する合成可能合流性基準の十分条件を満たす部分システムを見つける。次に項書換え系を Φ_R に符号化する例を示す。

例 3.22. 以下の項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える。

$$1\colon\ \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{h}(x))) \to \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{h}(\mathsf{g}(x)))) \quad 2\colon\ \mathsf{f}(y) \to y \quad 3\colon\ \mathsf{g}(z) \to z \quad 4\colon\ \mathsf{h}(w) \to w$$

制約式は以下のようになる。ただし i 番目の規則 $\ell_i \to r_i$ に対する $x_{\ell_i \to r_i}$ を x_i と書く。

$$\begin{aligned}
&(x_{\mathsf{h}_1} = x_x) \land (x_{\mathsf{g}_1} = x_x) \land (x_{\mathsf{f}_1} = x_y) \land (x_{\mathsf{g}_1} = x_z) \land (x_{\mathsf{h}_1} = x_w) \land \\
&(\neg x_1 \lor X) \ \land\ (\neg(x_{\mathsf{f}_1} = x_{\mathsf{g}_0} \land x_{\mathsf{g}_1} = x_{\mathsf{h}_0} \land x_{\mathsf{f}_0} \neq 0) \lor x_1) \land \\
&(\neg x_2 \lor (x_{\mathsf{f}_0} = x_y \land x_{\mathsf{f}_0} \neq 0)) \ \land\ (\neg(x_{\mathsf{f}_0} \neq 0) \lor x_2) \land \\
&(\neg x_3 \lor (x_{\mathsf{g}_0} = x_z \land x_{\mathsf{g}_0} \neq 0)) \ \land\ (\neg(x_{\mathsf{g}_0} \neq 0) \lor x_3) \land \\
&(\neg x_4 \lor (x_{\mathsf{h}_0} = x_w \land x_{\mathsf{h}_0} \neq 0)) \ \land\ (\neg(x_{\mathsf{h}_0} \neq 0) \lor x_4) \land \\
&(\neg x_{\mathsf{f}} \lor (x_{\mathsf{f}_0} \neq 0 \land x_{\mathsf{f}_1} \neq 0)) \land (x_{\mathsf{f}} \lor (x_{\mathsf{f}_0} = 0 \land x_{\mathsf{f}_1} = 0) \land \\
&(\neg x_{\mathsf{g}} \lor (x_{\mathsf{g}_0} \neq 0 \land x_{\mathsf{g}_1} \neq 0)) \land (x_{\mathsf{g}} \lor (x_{\mathsf{g}_0} = 0 \land x_{\mathsf{g}_1} = 0) \land \\
&(\neg x_{\mathsf{h}} \lor (x_{\mathsf{h}_0} \neq 0 \land x_{\mathsf{h}_1} \neq 0)) \land (x_{\mathsf{h}} \lor (x_{\mathsf{h}_0} = 0 \land x_{\mathsf{h}_1} = 0)
\end{aligned}$$

ここで X は $x_{\mathsf{f}_1} = x_{\mathsf{g}_0} \land x_{\mathsf{g}_1} = x_{\mathsf{h}_0} \land x_{\mathsf{g}_1} = x_{\mathsf{f}_0} \land x_{\mathsf{f}_1} = x_{\mathsf{h}_0} \land x_{\mathsf{h}_1} = x_{\mathsf{g}_0} \land x_{\mathsf{f}_0} = x_{\mathsf{g}_0} \land x_{\mathsf{f}_0} \neq 0$ である。これを解くと解は以下になる。

$$\begin{aligned}
&x_{\mathsf{f}} = x_{\mathsf{g}} = x_{\mathsf{h}} = \top \quad && x_{\mathsf{f}_0} = x_{\mathsf{f}_1} = 1 \quad && x_{\mathsf{g}_0} = x_{\mathsf{g}_1} = x_{\mathsf{h}_0} = x_{\mathsf{h}_1} = 2 \\
&x_1 = \bot && x_2 = x_3 = x_4 = \top &&
\end{aligned}$$

よって $x_2 = x_3 = x_4 = \top$ より $\mathcal{S} = \{2, 3, 4\}$ となる。定理 3.11 より $\mathcal{R}$ の合流性が $\mathcal{S}$ の合流性を示す。

第 4 章

規則ラベリング

規則ラベリング [12, 16] はラベリング関数と呼ばれる書換え規則に番号付けを行う関数により書換えステップを比較する手法である。この章では規則ラベリングに基づく合成可能合流性基準 [14] について説明する。

4.1 定理

定義 4.1. 項 t と位置の集合 P に対し変数の集合 $\mathcal{V}\mathsf{ar}(t,P)$ を以下のように定義する。

$$\mathcal{V}\mathsf{ar}(t,P) = \bigcup_{p \in P} \mathcal{V}\mathsf{ar}(t|_p)$$

項書換え系 $\mathcal{R}$ に関する**ラベリング関数** (labeling function for $\mathcal{R}$) は $\mathcal{R}$ から $\mathbb{N}$ への関数である。$\mathcal{R}$ を項書換え系、ϕ, ψ を $\mathcal{R}$ に関するラベリング関数とする。自然数 k, m に対し以下を定義する。

- $\mathcal{R}_{\phi,k} = \{\ell \to r \in \mathcal{R} \mid \phi(\ell \to r) \le k\}$
- $\curlyvee k = \{i \in \mathbb{N} \mid i < k\}$
- $\curlyvee km = (\curlyvee k) \cup (\curlyvee m)$

また $\to_{\mathcal{R}_{\phi,k}}, \mathrel{-\!\!\|\!\!\!\to}_{\mathcal{R}_{\phi,k}}$ を簡潔に $\to_{\phi,k}, \mathrel{-\!\!\|\!\!\!\to}_{\phi,k}$ と書く。自然数の集合 K に対し $\leftrightarrow_K$ を全ての $k \in K$ に対する ${}_{\phi,k}\!\leftarrow$ と $\to_{\psi,k}$ の和集合と定義する。$t \;{}_{\phi,k}\!\overset{P}{\leftarrow\!\!\|\!\!-}\; s \overset{\epsilon}{\to}_{\phi,m} u$ が (ψ,ϕ) **に関して減少する** ((ψ,ϕ)-decreasing) とは $\mathcal{V}\mathsf{ar}(v,P') \subseteq \mathcal{V}\mathsf{ar}(s,P)$ と以下が成り立つような並列位置の集合 P' と項 v が存在することをいう。

$$t \xleftrightarrow[\curlyvee k]{*} \cdot \mathrel{-\!\!\|\!\!\!\to}_{\psi,m} \cdot \xleftrightarrow[\curlyvee km]{*} v \;{}_{\phi,k}\!\overset{P'}{\leftarrow\!\!\|\!\!-} \cdot \xleftrightarrow[\curlyvee m]{*} u$$

例 4.2. 以下の書換え規則を持つ項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える。

$$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \to \mathsf{g}(\mathsf{b}) \qquad\qquad\qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b}$$

$\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \mathrel{\overset{\{1,2\}}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\shortparallel}\;}_{\mathcal{R}} \mathsf{f}(\mathsf{b},\mathsf{b})$ は成り立つが $\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \mathrel{\overset{\{\epsilon,2\}}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\shortparallel}\;}_{\mathcal{R}} \mathsf{g}(\mathsf{b})$ は成り立たない。

例 4.3. 以下の書換え規則を持つ項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える。

$$1\colon\ \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}) \quad 2\colon\ \mathsf{f}(\mathsf{b},x) \to \mathsf{g}(\mathsf{b}) \quad 3\colon\ \mathsf{f}(x,\mathsf{b}) \to \mathsf{g}(\mathsf{b}) \quad 4\colon\ \mathsf{a} \to \mathsf{b}$$

$\mathcal{S} = \{2,3,4\}$ とする。$\mathcal{R}$ に関するラベリング関数 ϕ, ψ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
&\phi(1) = \psi(1) = 1 \\
&\phi(2) = \psi(2) = \phi(3) = \psi(3) = \phi(4) = \psi(4) = 0
\end{aligned}$$

$\mathsf{f}(\mathsf{b},\mathsf{a})\ {}_{\phi,0}\!\mathrel{\overset{\{1\}}{\shortparallel\!\!\!\!\!\!\!\longleftarrow}} \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \to_{\psi,1} \mathsf{g}(\mathsf{a})$ は $\mathsf{f}(\mathsf{b},\mathsf{a}) \mathrel{\shortparallel\!\!\!\!\twoheadrightarrow}_{\psi,1} \mathsf{g}(\mathsf{b})\ {}_{\phi,0}\!\mathrel{\overset{\{1\}}{\shortparallel\!\!\!\!\!\!\!\longleftarrow}} \mathsf{g}(\mathsf{a})$ が成り立つため (ϕ,ψ) に関して減少する。

定理 4.4. $\mathcal{R}$ を左線形項書換え系、ϕ, ψ を $\mathcal{R}$ に関するラベリング関数とする。$\mathcal{S} = \mathcal{R}_{\phi,0} = \mathcal{R}_{\psi,0}$ かつ任意の $(k,m) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に対し以下が成り立つと仮定する。

- 各並列危険項 $t\ {}_{\phi,k}\!\mathrel{\shortparallel\!\!\!\!\leftarrow} s \xrightarrow{\epsilon}_{\psi,m} u$ が (ψ,ϕ) に関して減少する。
- 各並列危険項 $t\ {}_{\psi,m}\!\mathrel{\shortparallel\!\!\!\!\leftarrow} s \xrightarrow{\epsilon}_{\phi,k} u$ が (ϕ,ψ) に関して減少する。

$\mathcal{S}$ が合流性を持つとき $\mathcal{R}$ は合流性を持つ。

例 4.5. 以下の書換え規則を持つ項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える。

$$1\colon\ \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}) \quad 2\colon\ \mathsf{f}(\mathsf{b},x) \to \mathsf{g}(\mathsf{b}) \quad 3\colon\ \mathsf{f}(x,\mathsf{b}) \to \mathsf{g}(\mathsf{b}) \quad 4\colon\ \mathsf{a} \to \mathsf{b}$$

以下のような並列危険項が存在する。

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\shortparallel" marking] & \mathsf{g}(\mathsf{a}) \arrow[d, "\shortparallel" marking] \\
\mathsf{f}(\mathsf{b},\mathsf{a}) \arrow[r, "\shortparallel" marking] & \mathsf{g}(\mathsf{b})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\shortparallel" marking] & \mathsf{g}(\mathsf{a}) \arrow[d, "\shortparallel" marking] \\
\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \arrow[r, "\shortparallel" marking] & \mathsf{g}(\mathsf{b})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\shortparallel" marking] & \mathsf{g}(\mathsf{a}) \arrow[d, "\shortparallel" marking] \\
\mathsf{f}(\mathsf{b},\mathsf{b}) \arrow[r, "\shortparallel" marking] & \mathsf{g}(\mathsf{b})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\shortparallel" marking] & \mathsf{g}(\mathsf{a}) \\
\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \arrow[ur, bend right, "\shortparallel" marking] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{f}(\mathsf{b},\mathsf{b}) \arrow[r] \arrow[d, "\shortparallel" marking] & \mathsf{g}(\mathsf{b}) \\
\mathsf{g}(\mathsf{b}) \arrow[ur, bend right, equal] &
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{R}$ に関するラベリング関数 ϕ, ψ を以下のように定義する。

$$\phi(1) = \psi(1) = \phi(2) = \psi(2) = \phi(3) = \psi(3) = \phi(4) = \psi(4) = 1$$

$\mathcal{R}_{\phi,0} = \mathcal{R}_{\psi,0} = \mathcal{S} = \varnothing$ となる。各並列危険項 $t\ {}_{\phi,0}\!\!\mathrel{\leftarrow\!\!\!\!+\!\!\!\!+}\ s \xrightarrow{\epsilon}_{\psi,1} u$ と $t\ {}_{\psi,1}\!\!\mathrel{\leftarrow\!\!\!\!+\!\!\!\!+}\ s \xrightarrow{\epsilon}_{\phi,0} u$ が存在せず並列危険項 $t\ {}_{\psi,1}\!\!\mathrel{\leftarrow\!\!\!\!+\!\!\!\!+}\ s \xrightarrow{\epsilon}_{\phi,1} u$ が (ϕ, ψ) に関して減少する。$\mathcal{S}$ は空であり合流性を持つため $\mathcal{R}$ も合流性を持つ。

定理 4.4 と定理 3.11 より規則消去法として合流性の同値関係が得られる。

4.2 自動化

この節では規則ラベリングに基づく合成可能合流性基準である定理 4.4 と定理 3.11 による規則消去法の合流性証明の自動化について考える。規則ラベリングによる規則消去法も 3.3 節と同様に制約解消による自動化を行う。またその制約式を以下で定義する。3.3 節で扱った変数に加え以下の変数を扱う。

- $y_{\phi,\beta}$ は整数の変数であり $\phi(\beta)$ の値を表す。
- x_β はブール型の変数であり $y_{\phi,\beta} = 0$ を表す。
- $x_{\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}}$ はブール型の変数であり $x_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge x_{\beta_n}$ を表す。

またこの節では 3.3 節で定義した Φ_R に含まれる変数 x_β を上で定義した変数とする。$\mathsf{D}(\mathcal{R}, s, t, \mathcal{S}, \alpha, \phi, \psi)$ を $s \rightarrow^*_{\mathcal{S}_1} \cdot \mathrel{+\!\!\!\!+\!\!\!\!\rightarrow}_{\mathcal{S}_2} \cdot \rightarrow^*_{\mathcal{S}_3} \cdot {}_{\mathcal{S}'_3}\!\!{}^*\!\!\leftarrow \cdot {}_{\mathcal{S}'_2}\!\!\mathrel{\leftarrow\!\!\!\!+\!\!\!\!+} \cdot {}_{\mathcal{S}'_1}\!\!{}^*\!\!\leftarrow t$ かつ $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}'_1 \cup \mathcal{S}'_2 \cup \mathcal{S}'_3 \subseteq \mathcal{R}$ を満たす各項書換え系 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2, \mathcal{S}'_3$ に対する次式の選言と定義する。

$$\begin{aligned}
&\bigwedge_{\alpha' \in \mathcal{S}_1} \Big(\bigvee_{m \in K} m > y_{\psi,\alpha'} \Big) \wedge \bigwedge_{\alpha' \in \mathcal{S}_2} \Big(\bigvee_{m \in M} m \leq y_{\psi,\alpha'} \Big) \wedge \bigwedge_{\alpha' \in \mathcal{S}_3} \Big(\bigvee_{m \in K \cup M} m > y_{\psi,\alpha'} \Big) \wedge \\
&\bigwedge_{\alpha' \in \mathcal{S}'_3} \Big(\bigvee_{m \in K \cup M} m > y_{\phi,\alpha'} \Big) \wedge \bigwedge_{\alpha' \in \mathcal{S}'_2} \Big(\bigvee_{m \in K} m \leq y_{\phi,\alpha'} \Big) \wedge \bigwedge_{\alpha' \in \mathcal{S}'_1} \Big(\bigvee_{m \in M} m > y_{\phi,\alpha'} \Big)
\end{aligned}$$

ただし $K = \{\phi(\beta) \mid \beta \in \mathcal{S}\}, M = \{\psi(\alpha)\}$ とする。制約式 Φ_D を各並列危険項 $t\ {}_{\mathcal{S}'}\!\!\mathrel{\leftarrow\!\!\!\!+\!\!\!\!+} s \rightarrow_\alpha u$ とラベリング関数の対 $\langle \phi', \psi' \rangle \in \{\langle \phi, \psi \rangle, \langle \psi, \phi \rangle\}$ に対する次式の連言とする。

$$x_{\mathcal{S}'} \ \wedge\ (y_{\psi',\alpha} = 0) \ \wedge\ \mathsf{D}(\mathcal{R}, t, u, \mathcal{S}', \alpha, \phi', \psi')$$

制約式 Φ_C を次式の連言とする。

1. 少なくとも 1 つの書換え規則を消去できる:

$$\neg\left(\bigwedge_{\alpha\in\mathcal{R}} y_{\phi,\alpha} = 0\right)$$

2. $\mathcal{S} = \mathcal{R}_{\phi,0} = \mathcal{R}_{\psi,0}$ を満たす:

$$\bigwedge_{\alpha\in\mathcal{R}}\Big((y_{\phi,\alpha} \neq 0 \lor y_{\psi,\alpha} = 0) \land (y_{\psi,\alpha} \neq 0 \lor y_{\phi,\alpha} = 0)\Big)$$

3. ラベリング関数 ϕ, ψ が各書換え規則 $\alpha \in \mathcal{R}$ に対し $\phi(\alpha) \geq 0$ かつ $\psi(\alpha) \geq 0$ を満たす:

$$\bigwedge_{\alpha\in\mathcal{R}}\bigwedge_{\chi\in\{\phi,\psi\}}\Big(\chi(\alpha) \geq 0\Big)$$

これら制約式の連言 $\Phi_D \land \Phi_C$ を制約式 Φ_L とする。与えられた項書換え系 $\mathcal{R}$ が左線形かつ ${}_{\mathcal{R}}{\leftarrow\!\!\!\!\!\shortparallel} \rtimes \xrightarrow{\epsilon}_{\mathcal{R}} \subseteq \to^*_{\mathcal{R}} \cdot \shortparallel\!\!\!\!\!\rightarrow_{\mathcal{R}} \cdot \to^*_{\mathcal{R}} \cdot {}^{*}_{\mathcal{R}}\!\leftarrow \cdot {}_{\mathcal{R}}{\leftarrow\!\!\!\!\!\shortparallel} \cdot {}^{*}_{\mathcal{R}}\!\leftarrow$ であることを確認した後、$\mathcal{R}$ を制約式 Φ_L と 3.3 節で定義した制約式 Φ_R の連言に符号化し SMT ソルバで解くことで定理 4.4 と定理 3.11 の十分条件を満たす部分システムを見つける。

第 5 章

並列危険対システム

新谷らは危険対システム [7] より新たに合成可能合流性基準 [14] を導出した。この章では並列危険対システムに基づく合成可能合流性基準について説明する。

5.1　定理

まず並列危険対システムを定義する。

定義 5.1. $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ を項書換え系とする。**並列危険対システム** (parallel critical pair system) を以下で定義される項書換え系 $\mathsf{PCPS}(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ とする。

$\mathsf{PCPS}(\mathcal{R}, \mathcal{S}) = \{s \to t, s \to u \mid\ t \leftrightarrow^*_{\mathcal{S}} u$ を満たさない並列危険項 $t\ {}_{\mathcal{R}}\overset{P}{\mathrel{\leftarrow\!\!\!\!\!\shortparallel}}\ s \xrightarrow{\epsilon}_{\mathcal{R}} u$ がある。$\}$

例 5.2. 以下の書換え規則からなる項書換え系 $\mathcal{R}$ と

$$\mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{a}) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}) \qquad\qquad \mathsf{a} \to \mathsf{b}$$

以下の書換え規則からなる項書換え系 $\mathcal{S}$ を考える。

$$\mathsf{f}(x, \mathsf{b}) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}) \qquad\qquad \mathsf{f}(\mathsf{b}, y) \to \mathsf{g}(\mathsf{a})$$

$\mathsf{f}(\mathsf{b}, \mathsf{b})\ {}_{\mathcal{R}}\overset{\{1,2\}}{\mathrel{\longleftarrow\!\!\!\!\!\shortparallel\!\!-}}\ \mathsf{f}(\mathsf{a}, \mathsf{a}) \xrightarrow{\epsilon}_{\mathcal{R}} \mathsf{g}(\mathsf{a})$ は並列危険項である。また $\mathsf{PCPS}(\mathcal{R}, \mathcal{S}) = \varnothing$ となる。

定理 5.3. $\mathcal{R}$ を左線形項書換え系とし、$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ とする。また ${}_{\mathcal{R}}\mathrel{\leftarrow\!\!\!\!\!\shortparallel} \rtimes \xrightarrow{\epsilon}_{\mathcal{R}} \subseteq \to^*_{\mathcal{R}} \cdot {}^*_{\mathcal{R}}\leftarrow$ が成り立ち $\mathsf{PCPS}(\mathcal{R}, \mathcal{S})/\mathcal{R}$ が停止性を持つと仮定する。$\mathcal{S}$ が合流性を持つとき $\mathcal{R}$ も合流性を持つ。

例 5.4. 以下の書換え規則を持つ左線形項書換え系 $\mathcal{R}$ を考える。

$$1\colon\ \mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \to \mathsf{g}(\mathsf{a}) \quad 2\colon\ \mathsf{f}(\mathsf{b},x) \to \mathsf{g}(\mathsf{b}) \quad 3\colon\ \mathsf{f}(x,\mathsf{b}) \to \mathsf{g}(\mathsf{b}) \quad 4\colon\ \mathsf{a} \to \mathsf{b}$$

$\mathcal{R}$ は以下の並列危険頂を持ち ${}_{\mathcal{R}}{\nleftarrow}\!\rtimes\!\overset{\epsilon}{\to}_{\mathcal{R}} \subseteq \to^*_{\mathcal{R}} \cdot {}_{\mathcal{R}}^{*}\!\leftarrow$ が成り立つ。ただし下の図中の二重線は等号を表す。

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\nparallel" description] & \mathsf{g}(\mathsf{a}) \arrow[d] \\
\mathsf{f}(\mathsf{b},\mathsf{a}) \arrow[r] & \mathsf{g}(\mathsf{b})
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\nparallel" description] & \mathsf{g}(\mathsf{a}) \arrow[d] \\
\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \arrow[r] & \mathsf{g}(\mathsf{b})
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\nparallel" description] & \mathsf{g}(\mathsf{a}) \arrow[d] \\
\mathsf{f}(\mathsf{b},\mathsf{b}) \arrow[r] & \mathsf{g}(\mathsf{b})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \arrow[r] \arrow[d, "\nparallel" description] & \mathsf{g}(\mathsf{a}) \\
\mathsf{f}(\mathsf{a},\mathsf{a}) \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\mathsf{f}(\mathsf{b},\mathsf{b}) \arrow[r] \arrow[d, "\nparallel" description] & \mathsf{g}(\mathsf{b}) \\
\mathsf{g}(\mathsf{b}) \arrow[ur, equal, bend right] &
\end{tikzcd}$$

1. $\mathcal{S} = \{2,3,4\}$ とする。$\mathsf{PCPS}(\mathcal{R},\mathcal{S}) = \varnothing$ より $\to^*_{\mathcal{R}} \cdot \to_{\mathsf{PCPS}(\mathcal{R},\mathcal{S})} \cdot \to^*_{\mathcal{R}} = \varnothing$ であるため $\mathsf{PCPS}(\mathcal{R},\mathcal{S})/\mathcal{R}$ が停止性を持つ。
2. $\mathsf{PCPS}(\mathcal{S},\varnothing) = \varnothing$ となり $\mathsf{PCPS}(\mathcal{S},\varnothing)/\mathcal{S}$ が停止性を持つ。
3. 空の項書換え系は合流性を持つため、$\mathcal{S}$ が合流性を持つ。よって $\mathcal{R}$ が合流性を持つ。

定理 5.3 と定理 3.11 より規則消去法として合流性の同値関係が得られる。

5.2 自動化

この節では並列危険対システムに基づく合成可能合流性基準である定理 5.3 と定理 3.11 による規則消去法の合流性証明の自動化について考える。3.3 節と同様に定理 5.3 と定理 3.11 に基づく制約式を SMT ソルバで解くことで合流性が同値となる部分システムを見つける。以下でその制約式を定義する。この節では 3.3 節に加えブール型の変数 x_e を扱う。x_e は $\mathsf{PCPS}(\mathcal{R},\mathcal{S}) = \varnothing$ を表す。

$\mathsf{PCPS}(\mathcal{R},\mathcal{S})/\mathcal{R}$ の停止性は定理 2.17 より $\mathsf{PCPS}(\mathcal{R},\mathcal{S})$ の規則 $\ell \to r \in \mathsf{PCPS}(\mathcal{R},\mathcal{S})$ に対し $\ell > r$ が成り立ち $\mathcal{R}$ の規則 $\ell' \to r' \in \mathcal{R}$ に対し $\ell' \gtrsim r'$ が成り立つような単調簡約対 $\langle >, \gtrsim \rangle$ を見つけることで証明する。$\mathsf{Q}(\mathcal{R})$ を以下のように定義する。

$$\mathsf{Q}(\mathcal{R}) = \{(\mathcal{S}',\alpha,s,t,u) \mid t\ {}_{\mathcal{S}'}\overset{P}{\nleftarrow} s \to_{\alpha} u \text{ が並列危険頂となる並列位置の集合 } P \text{ が存在する}\}$$

$\mathsf{J}(k, \mathcal{R}, t, u)$ を集合 $\{\{\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta'_1, \ldots, \beta'_m\} \mid t \to_{\beta_1} \cdots \to_{\beta_n} \cdot {}_{\beta'_m}\!\leftarrow \cdots {}_{\beta'_1}\!\leftarrow u, n \leq k \text{ and } m \leq k\}$ で定義する。関数 $\mathsf{O}(s, t, >)$ を以下のように定義する。

$$\mathsf{O}(s, t, >) = \begin{cases} \top & \text{if } s > t \\ \bot & \text{otherwise} \end{cases}$$

制約式 Φ_C を次式の連言とする。

1. $\mathsf{PCPS}(\mathcal{R}, \mathcal{S}) \neq \varnothing$ のとき $\mathcal{R} \subseteq \gtrsim$ を満たす:

$$\left(y_e \vee (\bigwedge_{\ell \to r \in \mathcal{R}} \mathsf{O}(\ell, r, \gtrsim) \right)$$

2. $\mathsf{PCPS}(\mathcal{R}, \mathcal{S}) \subseteq >$ を満たす:

$$\bigwedge_{(\mathcal{S}_1, \alpha, s, t, u) \in \mathsf{P}(\mathcal{R})} \left((x_{\mathcal{S}_1} \wedge x_\alpha) \vee (\bigvee_{S_2 \in \mathsf{J}(k, \mathcal{R}, t, u)} x_{\mathcal{S}_2}) \vee (\mathsf{O}(s, t, >) \wedge \mathsf{O}(s, u, >) \wedge \neg y_e) \right)$$

ただし $\langle >, \gtrsim \rangle$ を単調簡約対とする。制約式 Φ_C は $\mathsf{PCPS}(\mathcal{R}, \mathcal{S})/\mathcal{R}$ が停止性を持つことを表す。

与えられた項書換え系 $\mathcal{R}$ が左線形であり ${}_{\mathcal{R}}\!\leftarrow\!\!\!\!\!+\!\!\!\rtimes\!\xrightarrow{\epsilon}_{\mathcal{R}} \subseteq \to_{\mathcal{R}}^* \cdot {}_{\mathcal{R}}^*\!\leftarrow$ が成り立つことを証明した後、制約式 Φ_C と Φ_R の連言を SMT ソルバで解くことで定理 5.3 と定理 3.11 の十分条件を満たす部分システム $\mathcal{S}$ を見つける。

第 6 章

Klein–Hirokawa の定理

この章では合成可能合流性基準である Klein–Hirokawa の定理 [10] について説明する。4 章、5 章で紹介した合成可能合流性基準は左線形項書換え系に対し適用できるが、Kelin–Hirokawa の定理は左線形ではない項書換え系にも適用できる。

6.1　定理

定義 6.1. $\ell \notin \mathcal{V}$ となる項の対 $\langle \ell, r \rangle$ を**拡張書換え規則** (extended rewrite rule) と呼び、拡張書換え規則の集合を**拡張項書換え系** (extended TRS) と呼ぶ。$\mathsf{REN}(\mathcal{R}) = \{\mathsf{REN}(\ell) \to r \mid \ell \to r \in \mathcal{R}\}$ とする。ここで $\mathsf{REN}(t)$ は t の変数の出現位置に新たな変数を置いた項である。$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{E}$ を拡張項書換え系、p を位置とする。書換え規則 $\ell_1 \to r_1, \ell_2 \to r_2$ が以下の条件を満たすとき $(\ell_1 \to r_1, p, \ell_2 \to r_2)$ を $\mathcal{E}$ **に関する重なり** ($\mathcal{E}$-overlap) と呼ぶ。

- $\ell_1 \to r_1$ と $\ell_2 \to r_2$ がそれぞれ $\mathcal{R}$ と $\mathcal{S}$ の規則の変数の名前替えである。
- $\ell_1 \to r_1$ と $\ell_2 \to r_2$ が変数を共有していない。
- $p \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}}(\ell_2)$ が成り立つ。
- $\ell_1\sigma \leftrightarrow^*_{\mathcal{E}} \ell_2|_p\sigma$ が成り立つ代入 σ が存在する。
- $p = \epsilon$ のとき $\ell_1 \to r_1$ が $\ell_2 \to r_2$ の変数の名前替えではない。

またこのとき必要であれば $\ell_2\sigma[r_1\sigma]_p \ {}_{\mathcal{R}}{\leftarrow}_{\mathcal{E}}{\rtimes}\xrightarrow{\epsilon}_{\mathcal{R}} r_2\sigma$ と書く。項書換え系 $\mathcal{R}$ と $\mathcal{S}$ に対し $\mathsf{REN}(\mathcal{R})$ と $\mathsf{REN}(\mathcal{S})$ の間と $\mathsf{REN}(\mathcal{S})$ と $\mathsf{REN}(\mathcal{R})$ の間で $\varnothing$ に関する重なりが存在しないとき $\mathcal{R}$ と $\mathcal{S}$ が**強い意味で重なりがない** (strongly non-overlapping) という。

定理 6.2. $\mathcal{R}$ を項書換え系とする。$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ かつ $\mathcal{P} = \mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$ であり $\mathcal{P}/\mathcal{S}$ が停止性を持ち

$\mathcal{P}$ と $\mathcal{S}$ が強い意味で重なりがなく ${}_{\mathcal{P}}{\leftarrow}_{\mathcal{S}} \rtimes \overset{\epsilon}{\rightarrow}_{\mathcal{P}} \subseteq \rightarrow^*_{\mathcal{R}} \cdot {}^*_{\mathcal{R}}{\leftarrow}$ が成り立つと仮定する。$\mathcal{S}$ が合流性を持つとき $\mathcal{R}$ が合流性を持つ。

定理 6.2 と定理 3.11 より規則消去法として合流性の同値関係が得られる。

6.2 自動化

この節では Klein–Hirokawa の定理に基づく合成可能合流性基準である定理 6.2 と定理 3.16 による規則消去法の合流性証明の自動化について考える。3.3 節と同様に定理 6.2 と定理 3.16 に基づく制約式を SMT ソルバで解くことで適当な部分システムを見つける。またその制約式を以下で定義する。この節で定義する制約式では変数 $x_\beta, x_{\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}}$ を 3.3 節で定義した制約式 Φ_R に含まれる変数と同じ変数として扱う。関数 $\mathsf{R}, \mathsf{U}, \mathsf{C}$ をそれぞれ以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}(\ell \to r) &= \mathsf{REN}(\ell) \to r \\
\mathsf{U}(\ell_1 \to r_1, \ell_2 \to r_2) &= \begin{cases} \top & \text{if (*)} \\ \bot & \text{otherwise} \end{cases} \\
\mathsf{C}(\ell_1 \to r_1, \ell_2 \to r_2, p) &= \begin{cases} \top & \text{if } \exists\sigma.\ \ell_1\sigma = \ell_2|_p\sigma \implies \ell_2[r_1]_p\sigma \rightarrow^*_{\mathcal{R}} \cdot {}^*_{\mathcal{R}}{\leftarrow}\, r_2\sigma \\ \bot & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$

ただし (*) は ℓ_1 と $\ell_2|_p$ が単一化可能となる位置 p が存在することを表す。また σ は ℓ_1 と $\ell_2|_p$ の最汎単一化子である。定理 6.2 の相対停止性は 5.2 節と同様に定理 2.17 により証明する。5.2 節で定義した関数 $\mathsf{O}(s,t,>)$ を用い、制約式 Φ_K を次式の連言と定義する。

1. $\mathcal{S}/\mathcal{P}$ が停止性を持つ:

$$\bigwedge_{\ell \to r \in \mathcal{R}} \Big((x_{\ell \to r} \vee \mathsf{O}(\ell, r, >)) \ \wedge\ (\neg x_{\ell \to r} \vee \mathsf{O}(\ell, r, \gtrsim)) \Big)$$

2. $\mathcal{P}$ と $\mathcal{S}$ が強い意味で重なりがない:

$$\bigwedge_{\alpha_1 \in \mathcal{R}} \bigwedge_{\alpha_2 \in \mathcal{R}} \Big((x_{\alpha_1} \wedge x_{\alpha_2}) \vee (\neg x_{\alpha_1} \wedge \neg x_{\alpha_2}) \vee \neg \mathsf{U}(\mathsf{R}(\alpha_1), \mathsf{R}(\alpha_2)) \Big)$$

3. ${}_{\mathcal{P}}{\leftarrow}_{\mathcal{S}} \rtimes \overset{\epsilon}{\rightarrow}_{\mathcal{P}} \subseteq \rightarrow^*_{\mathcal{R}} \cdot {}^*_{\mathcal{R}}{\leftarrow}$ を満たす:

$$\bigwedge_{\alpha_1 \in \mathcal{R}} \bigwedge_{\alpha_2 \in \mathcal{R}} \Big((x_{\alpha_1} \vee x_{\alpha_2}) \vee \bigwedge_{p \in \mathcal{P}\mathsf{os}_{\mathcal{F}}(\ell_2)} \mathsf{C}(\alpha_1, \alpha_2, p) \Big)$$

ただし $\mathcal{P} = \mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$ であり $\langle >, \gtrsim \rangle$ を単調簡約対とする。項書換え系 $\mathcal{R}$ が与えられたとき 3.3 節で定義した制約式 Φ_R と制約式 Φ_K の連言を SMT ソルバで解くことで定理 6.2 と定理 3.16 の十分条件を満たす部分システム $\mathcal{S}$ を見つける。

第 7 章

実験

この章では新谷らの実装と制約解消による実装の比較と新谷らの規則消去法と永続性に基づく規則消去法の比較を実験により行う。合流性の自動証明ツール Hakusan (`https://www.jaist.ac.jp/project/saigawa/`) に合成可能合流性基準である定理 4.4、定理 5.3、定理 6.2 と定理 3.11 および定理 3.16 による規則消去法を制約解消により実装した。実験では、合流性証明ツールの評価用問題集 ARI COPS Database[8] を使用した。問題数は 564 問 (1 番目から 1502 番目の問題の項書換え系である問題) であり、合流性が証明されている問題が 205 問、合流性が反証されている問題が 215 問、左線形項書換え系が 462 問含まれている。実験には Core i7-10710U 1.1GHz と 8GB の RAM を搭載したコンピュータを用いた。また実験結果の表における証明数、反証数とはそれぞれツールが合流性を証明もしくは反証できた問題数であり証明不能数とはツールが合流性を証明も反証もすることが出来ない問題数であり、タイムアウトとは設定された時間内にツールが証明結果を返すことが出来ない問題数であり、エラーは実行時エラーを表す。また本実験ではタイムアウトの時間を 60 秒に設定し、3.3 節、4.2 節、5.2 節、6.2 節で定義した制約式における k の値を 5 とした。さらに制約解消に z3 4.13.0 [3] を用いた。実験結果と実験に使用したツールを以下に記載する。

`https://www.jaist.ac.jp/~hirokawa/software/kawano/`

表 7.1 は合成可能合流性基準と規則消去法の比較と新谷らの自動化方法と本論文の自動化方法の比較の実験結果である。**O** は合成可能合流性基準である定理 3.19 の実装、$\mathbf{Oc}_1$ と $\mathbf{Oc}_2$ は定理 3.19 と定理 3.16 による規則消去法の実装である。また **O** は全ての部分システムを探索する実装、$\mathbf{Oc}_1$ は [14] に基づく規則消去法の実装、$\mathbf{Oc}_2$ は制約解消による実装である。

表 7.1　新谷らの実装と制約解消による実装の比較

	O	**Oc**$_1$	**Oc**$_2$
証明数	87	55	56
証明不能数	351	502	491
タイムアウト (60 秒)	44	7	17
エラー	82	0	0

表 7.1 についての調査結果を述べる。

- 規則消去法により **O** に比べ **Oc**$_1$ のタイムアウトが減少している。
- **Oc**$_1$ に比べ **Oc**$_2$ のタイムアウトが増加している。**Oc**$_1$ は任意の $\mathcal{R}$ の危険対 $\langle s,t\rangle$ に対し $s \leftrightarrow^*_{\mathcal{S}_0} t$ となる $\mathcal{S}_0$ を一つ見つけ $\mathcal{S}$ へ拡張するが、**Oc**$_2$ の実装では並列危険対 $\langle s,t\rangle$ に対し $s \rightarrow_{\ell_1\rightarrow r_1} \cdots \rightarrow_{\ell_n\rightarrow r_n} \cdot {}_{\ell_m\rightarrow r_m}\!\leftarrow \cdots {}_{\ell'_1\rightarrow r'_1}\!\leftarrow$ となる項書換え系 $\{\ell_1 \rightarrow r_1,\ldots,\ell_n \rightarrow r_n, \ell'_1 \rightarrow r'_1,\ldots,\ell'_n \rightarrow r'_n\}$ を全て制約式に含めるため制約式を解くのに時間がかかりタイムアウトが 10 問程度増える。

制約解消のオーバーヘッドを代償として、本提案手法は規則ラベリング、並列危険対システム、Klein–Hirokawa の定理に基づく規則消去法の自動化を実現している。

表 7.2　定理 3.11 と定理 3.16 の比較

	Rr$_1$	**Rr**$_2$	**Cr**$_1$	**Cr**$_2$	**Kr**$_1$	**Kr**$_2$	**RCKr**$_1$	**RCKr**$_2$
証明数	108	108	72	73	41	41	142	141
証明不能数	422	422	482	481	500	500	359	359
タイムアウト (60 秒)	32	32	10	10	23	23	61	60
エラー	2	2	0	0	0	0	2	4

表 7.2 は新谷らの規則消去法と永続性に基づく規則消去法を比較した実験結果である。また全て本論文で提案する制約解消による自動化方法で実装している。**Rr**$_1$ と **Rr**$_2$ は定理 4.4 に基づく規則消去法、**Cr**$_1$、**Cr**$_2$ は定理 5.3 に基づく規則消去法、**Kr**$_1$、**Kr**$_2$ は定理 6.2 に基づく規則消去法であり、**RCKr**$_1$、**RCKr**$_2$ はそれらの組み合わせによる証明である。また **Rr**$_1$、**Cr**$_1$、**Kr**$_1$、**RCKr**$_1$ は定理 3.16 による規則消去法、**Rr**$_2$、**Cr**$_2$、**Kr**$_2$、**RCKr**$_2$ は定理 3.11 による規則消去法である。

表 7.2 についての調査結果を述べる。

- **Cr**$_2$ は **Cr**$_1$ と比べ新たに以下の 1498 番の項書換え系の合流性を証明できる。

$$\begin{array}{llll} 1: & \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{h}(x))) \to \mathsf{g}(\mathsf{f}(\mathsf{h}(\mathsf{g}(x)))) & 3: & \mathsf{g}(x) \to x \\ 2: & \mathsf{f}(x) \to x & 4: & \mathsf{h}(x) \to x \end{array}$$

  $\mathcal{G} = \{\mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h}\}$ とし以下の関数記号とランクからなる $\mathcal{G}$ についての多ソートシグネチャを定義する。

$$\mathsf{f} : A \to A \qquad \mathsf{g} : B \to B \qquad \mathsf{h} : B \to B$$

  $\mathcal{S} = \{2, 3, 4\}$ とすると $\mathcal{S}$ は Σ 上の多ソート項書換え系である。また $\mathcal{R}\restriction_\Sigma = \mathcal{S}$ である。$\mathcal{S}$ は並列危険対を持たないため $\varnothing$ と $\mathcal{S}$ の合流性が同値となる。

- **RCKr**$_1$ に比べ **RCKr**$_2$ では以下の 185 番の項書換え系の合流性を証明できない。

$$\begin{array}{llllll} 1: & 0 + y \to y & 3: & \mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y) & 5: & x + (y + z) \to (x + y) + z \\ 2: & x + 0 \to x & 4: & x + \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}(x + y) & 6: & x + y \to y + x \end{array}$$

  $\mathcal{S} = \varnothing$ とすることで合流性を証明できる。しかし **RCKr**$_2$ では $\mathcal{S} = \{1, 3, 5, 6\}$ とすることもできる。この場合でも $\mathcal{S}$ は合流するが、今ある合成可能合流性基準ではその合流性を証明できない。

- **RCKr**$_1$ で証明不能になっていた問題が **RCKr**$_2$ ではタイムアウトになっている。以下の 876 番の項書換え系である。

$$\begin{array}{llllll} 1: & \mathsf{b}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{a}(\mathsf{a}(x)) & 4: & \mathsf{b}(\mathsf{c}(x)) \to \mathsf{a}(\mathsf{a}(x)) & 7: & \mathsf{a}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{b}(x)) \\ 2: & \mathsf{b}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{b}(x)) & 5: & \mathsf{b}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{a}(\mathsf{a}(x)) & 8: & \mathsf{c}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{a}(x)) \\ 3: & \mathsf{a}(\mathsf{b}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{b}(x)) & 6: & \mathsf{c}(\mathsf{a}(x)) \to \mathsf{c}(\mathsf{b}(x)) & 9: & \mathsf{c}(\mathsf{c}(x)) \to \mathsf{a}(\mathsf{a}(x)) \end{array}$$

  定理 3.11 により消去できる規則の組み合わせが増えたことで相対停止性の証明を試みるため時間を要していると考えられる。

r1Hakusan は定理 3.16 の制約解消による実装、**r2Hakusan** は定理 3.11 の制約解消による実装である。また ACP と CSI は共に分割手法を実装している。

表 7.3 では **r1Hakusan** に比べ **r2Hakusan** では 185 番目と 876 番目の問題がタイムアウトになっている。

表 7.3　実装したツールと他ツールとの比較

	r1Hakusan	**r2Hakusan**	ACP	CSI
証明数	140	139	257	270
反証数	205	206	162	203
証明不能数	140	138	80	20
タイムアウト (60 秒)	77	79	65	71
エラー	2	2	0	0

第 8 章

結論

本論文では永続性に基づく規則消去法を提案した。新谷らの規則消去法は直和に関するモジュラ性に基づいており本論文の提案手法が新谷らの手法を包含することを定理 3.21 で示した。また実験では規則消去ができるようになったことで合流性証明が可能になる問題が増加したことが示された。さらに本研究では新谷らの規則消去法についても制約解消による自動化を行い合流性自動解析ツールの国際コンペティション CoCo 2025 では定理 3.16 に基づく規則消去法を含めたツール Hakusan が証明の信頼性のカテゴリにおいて 2 位を獲得した。

多くの項書換え系は型が付くように定義されている。本実験で用いた問題集 ARI COPS Database もそのような項書換え系を多く含んでいる。また Haskell のプログラムのような高階関数を扱うために例 3.13 で扱ったような項書換え系を扱う場合がある。この項書換え系を作用項書換え系と呼ぶ。作用項とは定数、変数と 2 引数関数 $\circ$ からなる項であり項 $f(x)$ は作用項 $f \circ x$ として表される。そのため変数ではない項は常に $\circ$ を含んでおり直和に関するモジュラ性や永続性に関するモジュラ性に基づく規則消去法の適用が難しい。そこで分割手法の最近の成果である層システムが有効であると考えられる。層システムは Felgenhauer ら [5] により提案され、項が多ホール文脈と呼ばれる $\square$ を 1 つ以上持つ項から構成されるとみなし任意の項を構成できる多ホール文脈の集合上で合流性を持つならば項全体でも合流性を持つことを保証する。この成果は定理 3.3 を包含しこれに基づく規則消去法は作用項書換え系にも適用できると期待する。

■謝辞　指導教員である廣川直准教授のご指導に心より感謝申し上げます。また研究活動を支えてくださった研究室の皆様にも御礼申し上げます。

参考文献

[1] T. Aoto and Y. Toyama. Persistency of confluence. *Journal of Universal Computer Science*, 3(11):1134–1147, 1997.

[2] F. Baader and T. Nipkow. *Term Rewriting and All That*. Cambridge University Press, 1998.

[3] L. de Moura and N. Bjørner. Z3: An efficient SMT solver. In *Proceedings of 12th International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems*, volume 4963 of *LNCS*, pages 337–340, 2008. The website of Z3 is: `https://github.com/Z3Prover/z3`.

[4] R. Diaconescu, K. Futatsugi, and K. Ogata. Cafeobj: Logical foundations and methodologies. *Computers and Artificial Intelligence*, 22(3-4):257–283, 2003.

[5] B. Felgenhauer, A. Middeldorp, H. Zankl, and V. van Oostrom. Layer systems for proving confluence. *ACM Trans. Comput. Logic*, 16(2):1–32, 2015.

[6] A. Geser. *Relative Termination*. PhD thesis, Universit¨at Passau, 1990.

[7] N. Hirokawa and A. Middeldorp. Decreasing diagrams and relative termination. *Journal of Automated Reasoning*, 47:481–501, 2011.

[8] N. Hirokawa, J. Nagele, and A. Middeldorp. Cops and CoCoWeb: Infrastructure for confluence tools. In *Proceedings of 9th International Joint Conference on Automated Reasoning*, volume 10900 of *LNCS (LNAI)*, pages 346–353, 2018. The website of ARI-COPS Database is: `https://ari-cops.uibk.ac.at/`.

[9] G. Hondet and F. Blanqui. The new rewriting engine of dedukti. In *Proceedings of 5th International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction*, volume 167 of *LIPIcs*, pages 35:1–35:16, 2020.

[10] D. Klein and N. Hirokawa. Confluence of non-left-linear TRSs via relative termination. In *Proceedings of 18th International Conference on Logic Programming*

and Automated Reasoning, volume 7180 of *LNCS*, pages 258–273, 2012.

[11] C. Kop and N. Nishida. Term rewriting with logical constraints. In *LNCS*, volume 8152, pages 343–358. Springer, 2013.

[12] V. van Oostrom. Confluence by decreasing diagrams, converted. In *Proceedings of 19th International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, volume 5117 of *LNCS*, pages 306–320, 2008.

[13] B. Rosen. Tree-manipulating systems and Church-Rosser theorems. *Journal of the ACM*, pages 160–187, 1973.

[14] K. Shintani and N. Hirokawa. Compositional confluence criteria. *Logical Methods in Computer Science*, 20:6:1–6:28, 2024.

[15] Y. Toyama. On the Church–Rosser property for the direct sum of term rewriting systems. *Journal of the ACM*, 34(1):128–143, 1987.

[16] H. Zankl, B. Felgenhauer, and A. Middeldorp. Labelings for decreasing diagrams. *Journal of Automated Reasoning*, 54(2):101–133, 2015.