

Title	複雑ネットワークにおける連結ロバスト性の構造的要因に関する研究
Author(s)	牟, 映洲
Citation	
Issue Date	2026-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	ETD
URL	<a href="https://hdl.handle.net/10119/20611">https://hdl.handle.net/10119/20611</a>
Rights	
Description	Supervisor: 林 幸雄, 先端科学技術研究科, 博士

博士論文

複雑ネットワークにおける連結ロバスト性の  
構造的要因に関する研究

**A Study on Structural Factors of Robustness of Connectivity  
in Complex Networks**

Yingzhou MOU

主任研究指導教員 林 幸雄

北陸先端科学技術大学院大学 金沢大学

融合科学共同専攻

[工学]

令和 8 年 3 月

## Abstract

Modern infrastructures such as communication networks, transportation systems, and energy supply networks, as well as social and biological systems, can be modeled as complex networks with highly uneven connectivities. A fundamental issue in these systems is the robustness of connectivity, namely, how well global connectivity is preserved when nodes are removed by failures, natural disasters, or malicious attacks. While previous studies have mainly focused on statistical properties such as degree distribution and average degree, the structural and geometric factors underlying robustness of connectivity have not been fully investigated.

This dissertation aims to clarify the structural factors that govern the robustness of connectivity in complex networks. Two kinds of networks which are widely exist in real-world systems are investigated: scale-free networks, which have highly uneven connectivities, such as WWW, and spatial networks, which embedded in the surface of Earth such as road and communication systems constrained by geography. The robustness of connectivity is evaluated using two measures: a robustness index defined as the area under the curve of the largest connected component during node removal, and a critical fraction of removed nodes at which network fragmentation becomes most pronounced. Several attack strategies, including recalculated degree attacks, recalculated betweenness attacks, and belief propagation attacks that approximate the worst loop destruction, are applied.

For scale-free networks, the power-law exponent is continuously varied within a realistic range from  $\gamma \sim 2.1$  (WWW) to  $\gamma \sim 4.0$  (western power-grid in U.S.), showing that an increase in the exponent narrows the degree distributions, enlarges holes in networks represented by longer average length of the shortest loops, and leads to a consistent improvement with upper bound in robustness of connectivity. These results demonstrate that the robustness and the average length of the shortest loops is strongly affected by the variance of the degree distributions.

For spatial networks, networks are constructed using population data from major Japanese urban regions based on relative neighborhood graph and Gabriel graphs. Three node placements are considered: population-based (Pop.), in which nodes are preferentially located in densely populated areas to meet concentrated access demand; inverse population-based (Inv.), in which nodes are placed in sparsely populated areas for lower cost of construction; and uniform (Uni), in which nodes are distributed randomly to represent an intermediate spatial configuration.

Overall, the robustness of connectivity is primarily determined by the variance of the degree distribution and the length of the shortest loops. In scale-free networks, as the power-law exponent increases and the degree distribution becomes narrower, larger holes emerge within the network, leading to an improvement of the robustness. In spatial networks, local modulars formed by spatial concentration of nodes and short links show a strong influence on the robustness of connectivity. When nodes are unevenly placed according to population, strong local modules are formed, and the loss of bridging links causes the network to fragment rapidly. As a result, the robustness decreases markedly with increasing modularity. The findings of this study provide an important theoretical foundation for the robustness-oriented design of real-world infrastructure networks and complex systems.

**Keywords:** Robustness of connectivity, Complex networks, Scale-free networks, Spatial networks, Shortest loops, Modularity, Infrastructure networks.

# 目次

<b>1</b>	<b>緒言</b>	<b>17</b>
1.1	研究背景と目的	17
1.2	論文の構成	20
<b>2</b>	<b>ネットワークの基本的な用語や既存の解析指標</b>	<b>22</b>
2.1	基本的な用語	22
2.1.1	次数	22
2.1.2	媒介中心性	22
2.1.3	フィードバック頂点集合	23
2.2	ロバスト性指標の評価	25
2.2.1	ロバスト性指標 $R$	25
2.2.2	臨界閾値 $q_c$	26
2.2.3	疎密度指数 (Sparsity Index, SI)	26
<b>3</b>	<b>スケールフリーネットワークにおけるロバスト性の解析</b>	<b>32</b>
3.1	モデル設定とべき指数の可調性	32
3.2	攻撃手法の概要	35
3.3	三種の攻撃手法が連結ロバスト性に与える影響	37
3.4	最短ループ平均長 $\langle l \rangle$ がロバスト性に与える影響	38
3.5	本章のまとめ	41
<b>4</b>	<b>空間ネットワークにおけるロバスト性機構の解析</b>	<b>46</b>
4.1	広く存在するモジュール構造によるネットワークの脆弱化	46
4.2	モデル構築とノード分布の設定	47
4.3	攻撃手法の概要	52
4.4	局所コミュニティの形成	53
4.5	再計算媒介中心性攻撃に対する連結ロバスト性	55
4.6	初期次数攻撃およびランダム故障に対する連結ロバスト性	63
4.7	本章のまとめ	72
<b>5</b>	<b>結論と考察</b>	<b>73</b>
5.1	研究の総括	73
5.2	研究の意義と貢献	74
5.3	今後の研究展望	75

# 目次

1	本図は次数に基づく攻撃（次数優先攻撃）に対する (a) 最大連結成分および (b) 第2連結成分 $S(q)/N$ の変化例を示す. $R$ 値は (a) の曲線下の面積として定義され, $q_c$ は (b) の曲線が最大となる点の横軸値として定義される. ノード除去率がおおよそ $q \approx 0.17$ に達すると, 第2連結成分の規模がピークに達し, ネットワーク連結性が急速に崩壊し始めることが分かる. また, $R$ の値が相対的に小さいことから, 本ネットワークは次数優先攻撃に対して弱いロバスト性を示している. . . . .	27
2	Lorenz 曲線に基づくスパース性の概念図, 実際の総次数 $T$ に基づいて計算されるジニ係数の曲線 (青) と, 潜在的な総次数 $T_1$ を参照とする場合 (赤) を比較した. $T_1 > T$ の場合, 曲線は均等分配線からさらに離れ, より大きな疎密度指数 $SI(G)$ が得られる [1]. . . . .	30
3	異なるトポロジ構造における累積次数分布の模式図. リンク数が同程度の場合, スター型ネットワーク (赤) は接続が一部ノードに集中しており, 曲線の後半が急峻に上昇するため $SI$ 値が高い. 一方, ハミルトンパス構造 (青) は接続が比較的均一であり, 曲線は均等分配線に近い位置をとるため $SI$ 値が低い. . . . .	31
4	本図は関連研究の位置付けを示す. 青色の領域は本研究の対象範囲を表し, 可変べき指数 $2 < \gamma \leq 4$ をもつスケールフリー・ネットワーク (SF networks) に着目する. 一方, 橙色の領域はより広いランダム化ネットワークに関する先行研究 [2, 3, 4, 5] を表す. これらの研究により, 次数分布 $P(k)$ がより狭くなる (すなわち大きなホールが増加する) と, ネットワークは悪意ある攻撃に対してより高いロバスト性を示すことが報告されている. . . . .	33
5	本図は異なるべき指数 $\gamma$ によって生成したスケールフリーネットワークの次数分布 $P(k) \sim k^{-\gamma}$ を示す. (a) $\gamma = 2.1$ , (b) $\gamma = 2.5$ , (c) $\gamma = 3.0$ , (d) $\gamma = 4.0$ . 破線は両対数軸におけるべき指数 $\gamma$ の推定された傾きを示している. . . . .	36
6	本図はべき指数 $\gamma$ の増加に伴う (a) 最大次数 $k_{max}$ および (b) 次数分布 $P(k)$ の分散 $\sigma^2$ の単調減少関係を示す. . . . .	37
7	本図はランダム化されたスケールフリーネットワークにおける, 異なるべき指数 $\gamma$ に対するロバスト性曲線 $S(q)/N$ を示す. (a) $\gamma = 2.1$ , (b) $\gamma = 2.5$ , (c) $\gamma = 3.0$ , (d) $\gamma = 4.0$ . 青, 緑, 赤の曲線はそれぞれ再計算次数攻撃, 媒介中心性攻撃および BP 攻撃に対応する. 曲線下の面積を比較すると, 赤 (BP) および緑 (媒介中心性) は青 (次数) よりも面積が小さく, より強い破壊効果を有することが分かる. . . . .	39
8	本図は3種類の攻撃下におけるロバスト性曲線 $S(q)/N$ を示す. 色付き曲線は深紫から赤へ, べき指数 $\gamma = 2.1$ から $\gamma = 4.0$ の増加に対応する. 各曲線下の面積がロバスト性指標 $R$ に相当する. $\gamma$ の増加に伴い曲線は右方向に移動し, $R$ も増大することが分かる. また, $\gamma > 3.0$ では曲線間隔が縮小し, 分散 $\sigma^2$ の収束効果が反映されている. . . . .	42

9	本図はランダム化されたスケールフリー・ネットワークにおけるロバスト性指標 $R$ と次数分布の分散 $\sigma^2$ の関係を示す. (a) 次数攻撃, (b) 媒介中心性攻撃, (c) BP 攻撃, (d) 各攻撃手法の比較. 色付き点は深紫から赤へ, べき指数 $\gamma = 2.1$ から $\gamma = 4.0$ を表す. 一般に, $\gamma$ の増加に伴い $R$ は増加するが, $\gamma > 3$ では $R$ の増加が頭打ちとなる傾向が見られる. . . . .	43
10	最短ループ (青い線) の模式図. こうしたループは穴を表し, リンク $e_{ij}$ と, リンク $e_{ij}$ を除いたネットワーク上でのノード $i$ と $j$ の間の最短経路から構成される. . . . .	43
11	本図はランダム化されたスケールフリーネットワークにおける最短ループ長の分布 $P(l)$ を示す. 色付き曲線は深紫から赤へ, べき指数 $\gamma = 2.1$ から $\gamma = 4.0$ の増加に対応する. $\gamma$ の増加に伴い $P(l)$ 全体が右方向へシフトしており, 長いループがより多く出現することを示している. . . . .	44
12	本図はランダム化されたスケールフリーネットワークにおける最短ループ平均長 $\langle l \rangle$ と次数分布の分散 $\sigma^2$ の単調減少関係を示す. 色付き点は深紫から赤へ, べき指数 $\gamma = 2.1$ から $\gamma = 4.0$ を表す. べき指数 $\gamma$ が増加し, 図 6(b) に示されるように $\sigma^2$ が減少するにつれて, $\langle l \rangle$ は増加する. . . . .	45
13	本図は (a) RNG および (b) GG における接続制約の概念図を示す. 陰影領域内に他のノードが存在しない場合, 赤色の線分が2つの青色ノード間にリンクとして形成される. . . . .	51
14	本図は無線通信における2つの基地局間の電波ビームカバレッジを示す. 青色および橙色の陰影領域は強い信号ビームの到達範囲を表す. 中央の円形領域は干渉領域を示して, この領域内に別の基地局が存在する場合は, 2つの基地局間には接続が形成されない. . . . .	51
15	本図は東京地域におけるコミュニティ構造の可視化結果を示す. (左) RNG, (右) GG. (a)(b) は元のネットワーク, (c)(d) はノードを10%除去した後のネットワークである. ネットワークは $N = 1024$ のノードから構成され, ノードは人口値の降順 (Pop.-based) で配置されている. RNG は GG の部分グラフであることに注意する. Louvain 法により検出されたコミュニティは赤・黄・緑・青の4色で区別される. 各図は2次元ユークリッド平面上の空間ネットワークを表し, ノード位置は $500\text{m} \times 500\text{m}$ の人口メッシュ重心に対応する. 横軸および縦軸はこれら重心位置に基づいて算出された平面距離を表す. . . . .	56
16	本図は東京地域におけるコミュニティ構造の可視化結果を示す. (左) RNG, (右) GG. (a)(b) は元のネットワーク, (c)(d) はノードを10%除去した後のネットワークである. ネットワークは $N = 1024$ のノードから構成され, ノードは人口値の逆順 (Inv.-based) で配置されている. RNG は GG の部分グラフであることに注意する. Louvain 法により検出されたコミュニティは赤・黄・緑・青の4色で区別される. 各図は2次元ユークリッド平面上の空間ネットワークを表し, ノード位置は $500\text{m} \times 500\text{m}$ の人口メッシュ重心に対応する. 横軸および縦軸はこれら重心位置に基づいて算出された平面距離を表す. . . . .	57

- 17 本図は日本の7地域における  $N = 1024$  ノードのネットワークに対し, モジュラリティ  $Q$  とロバスト性指標  $R^{RB}$  (RB 攻撃下) の関係を示す. (a) RNG および (b) GG ネットワークにおいて, 各点は元のネットワーク (三角形) および 2次元格子に再配置したネットワーク (十字形) の  $R^{RB}$  と  $Q$  を表す. ノード位置は Pop.-based (緑/黄), Inv.-based (赤/マゼンタ), Uni.-based (青/シアン) に基づいて生成されている. (a) の挿入図は右下領域の高密度部分を拡大したものである. . . . . 64
- 18 本図は東京地域の元のネットワークにおける次数分布  $P(k)$  を示す ( $N = 1024$ ). ノード位置は Pop.-based, Inv.-based, Uni.-based の3種類の分布に基づく. いずれの場合も  $P(k)$  は鐘形の分布を呈し, ピークは概ね  $k = 2$  から  $k = 4$  の範囲に位置する. . . . . 65
- 19 本図は日本の7地域における  $N = 1024$  ノードのネットワークに対し, ロバスト性指標  $R^{RB}$  と稀疏性指数  $SI(G_w)$  の関係を示す. (a) RNG および (b) GG の結果は, Pop.-based (緑), Inv.-based (赤), Uni.-based (青) に基づくノード配置の場合をそれぞれ表す. 色付き点は明瞭な単調減少傾向を示し, 稀疏性指数  $SI(G_w)$  が大きいネットワークほどロバスト性指標  $R^{RB}$  が低くなることを示している. 縦軸 ( $R^{RB}$ ) の変動範囲は比較的狭い一方で, 横軸 ( $SI(G_w)$ ) の変動範囲はより広いことに留意されたい. . . . . 65
- 20 本図は日本の7地域における  $N = 1024$  ノードのネットワークに対し, 稀疏性指数  $SI(G_w)$  とモジュラリティ  $Q$  の関係を示す. (a) RNG および (b) GG の結果は, Pop.-based (緑の三角形), Inv.-based (赤の四角形), Uni.-based (青の円) に基づくノード配置の場合をそれぞれ表す. 色付き点は明瞭な単調増加傾向を示し, 空間的稀疏性指数  $SI(G_w)$  が高いネットワークほどモジュラリティ  $Q$  が高い傾向にあることが分かる. Pop. に基づくネットワーク (緑の三角形) は, 都市中心部と周縁部の間に長距離接続が存在するため  $SI$  が最大となる. 一方, Uni. に基づくネットワーク (青の円) はノード配置が均一であるため  $SI$  が最小となる. なお, 縦軸と横軸のスケール差が大きいので, 縦方向の差異は相対的に小さいことに留意されたい. . . . . 66
- 21 本図は東京地域における  $N = 1024$  ノードのネットワークに対し, 再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性分析を示す. 再配線 (ランダム化ネットワーク) においては, 元の次数分布が保持されている. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対規模  $S^{1st}(q)/N$  と, (c)(d) 第2連結成分の相対規模  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点の臨界割合  $q_c$  を用いる. . . . . 67
- 22 本図は東京地域における  $N = 1024$  ノードのネットワークに対し, 再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性分析を示す. 2次元格子 (2DL) へのノード再配置においても, 元の次数分布は保持されている. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対規模  $S^{1st}(q)/N$  と, (c)(d) 第2連結成分の相対規模  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点の臨界割合  $q_c$  を用いる. . . . . 68
- 23 ノード除去前における福岡のコミュニティ構造の可視化.  $N = 100$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . . 78

24	ノード除去前における福岡のコミュニティ構造の可視化. $N = 100$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 23 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	79
25	ノード除去前における広島コミュニティ構造の可視化. $N = 100$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	80
26	ノード除去前における広島コミュニティ構造の可視化. $N = 100$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 25 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	80
27	ノード除去前における京阪のコミュニティ構造の可視化. $N = 100$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	81
28	ノード除去前における京阪のコミュニティ構造の可視化. $N = 100$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 27 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	81
29	ノード除去前における名古屋のコミュニティ構造の可視化. $N = 100$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	82
30	ノード除去前における名古屋のコミュニティ構造の可視化. $N = 100$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 29 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	82
31	ノード除去前における東京のコミュニティ構造の可視化. $N = 100$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	83
32	ノード除去前における東京のコミュニティ構造の可視化. $N = 100$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 31 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	84
33	ノード除去前における仙台のコミュニティ構造の可視化. $N = 100$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	84
34	ノード除去前における仙台のコミュニティ構造の可視化. $N = 100$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 33 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	85

35	ノード除去前における札幌のコミュニティ構造の可視化. $N = 100$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	86
36	ノード除去前における札幌のコミュニティ構造の可視化. $N = 100$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 35 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	87
37	ノード除去前における福岡のコミュニティ構造の可視化. $N = 1024$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	87
38	ノード除去前における福岡のコミュニティ構造の可視化. $N = 1024$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 37 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	88
39	ノード除去前における広島 of コミュニティ構造の可視化. $N = 1024$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	88
40	ノード除去前における広島 of コミュニティ構造の可視化. $N = 1024$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 39 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	89
41	ノード除去前における京阪のコミュニティ構造の可視化. $N = 1024$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	89
42	ノード除去前における京阪のコミュニティ構造の可視化. $N = 1024$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 41 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	90
43	ノード除去前における名古屋のコミュニティ構造の可視化. $N = 1024$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	90
44	ノード除去前における名古屋のコミュニティ構造の可視化. $N = 1024$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 43 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	91
45	ノード除去前における仙台のコミュニティ構造の可視化. $N = 1024$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	92

46	ノード除去前における仙台のコミュニティ構造の可視化. $N = 1024$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 45 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	93
47	ノード除去前における札幌のコミュニティ構造の可視化. $N = 1024$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	94
48	ノード除去前における札幌のコミュニティ構造の可視化. $N = 1024$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 47 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	95
49	ノード除去前における福岡のコミュニティ構造の可視化. $N = 10000$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	96
50	ノード除去前における福岡のコミュニティ構造の可視化. $N = 10000$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 49 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	97
51	ノード除去前における広島 of コミュニティ構造の可視化. $N = 10000$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	98
52	ノード除去前における広島 of コミュニティ構造の可視化. $N = 10000$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 51 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	99
53	ノード除去前における京阪のコミュニティ構造の可視化. $N = 10000$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	100
54	ノード除去前における京阪のコミュニティ構造の可視化. $N = 10000$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 53 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	101
55	ノード除去前における名古屋のコミュニティ構造の可視化. $N = 10000$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	102
56	ノード除去前における名古屋のコミュニティ構造の可視化. $N = 10000$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 55 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	103

57	ノード除去前における東京のコミュニティ構造の可視化. $N = 10000$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	104
58	ノード除去前における東京のコミュニティ構造の可視化. $N = 10000$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 57 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	105
59	ノード除去前における仙台のコミュニティ構造の可視化. $N = 10000$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	106
60	ノード除去前における仙台のコミュニティ構造の可視化. $N = 10000$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 59 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	107
61	ノード除去前における札幌のコミュニティ構造の可視化. $N = 10000$ のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる. . . . .	108
62	ノード除去前における札幌のコミュニティ構造の可視化. $N = 10000$ のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 61 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる. . . . .	109
63	東京における RNG ネットワークに対して, ネットワークサイズ $N$ を変化させた場合の, モジュラリティ $Q$ の増加と, RB 攻撃に対するロバスト性指標 $R^{RB}$ および臨界割合 $q_c^{RB}$ の減少との関係. . . . .	110
64	東京における GG ネットワークに対して, ネットワークサイズ $N$ を変化させた場合の, モジュラリティ $Q$ の増加と, RB 攻撃に対するロバスト性指標 $R^{RB}$ および臨界割合 $q_c^{RB}$ の減少との関係. . . . .	110
65	散布図はネットワークロバスト性指標 ((a) $R$ , (b) $q_c$ ) と格子状部分の割合との関係を示す (RF に対する結果). 対象は $N = 1024$ のネットワークであり, Pop.-based ネットワーク (緑) は Inv.-based (赤) および Uni.-based (青) と比較して, 格子状部分の割合が有意に高いことがわかる. 詳細は 4.6 小節末尾を参照. . . . .	110
66	福岡ネットワーク ( $N = 100$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	111
67	広島ネットワーク ( $N = 100$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	112

68	京阪ネットワーク ( $N = 100$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	113
69	名古屋ネットワーク ( $N = 100$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	114
70	東京ネットワーク ( $N = 100$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	115
71	仙台ネットワーク ( $N = 100$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	116
72	札幌ネットワーク ( $N = 100$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	117
73	福岡ネットワーク ( $N = 1024$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	118
74	広島ネットワーク ( $N = 1024$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	119
75	京阪ネットワーク ( $N = 1024$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	120
76	名古屋ネットワーク ( $N = 1024$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	121

77	仙台ネットワーク ( $N = 1024$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	122
78	札幌ネットワーク ( $N = 1024$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	123
79	福岡ネットワーク ( $N = 10000$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	124
80	広島ネットワーク ( $N = 10000$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	125
81	京阪ネットワーク ( $N = 10000$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	126
82	名古屋ネットワーク ( $N = 10000$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	127
83	東京ネットワーク ( $N = 10000$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	128
84	仙台ネットワーク ( $N = 10000$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	129
85	札幌ネットワーク ( $N = 10000$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ $S^{2nd}(q)/N$ が最大となる点での臨界割合 $q_c$ を用いる. . . . .	130

86	$N = 100$ のネットワークにおけるロバスト性指標 $R^{RB}$ とモジュラリティ $Q$ の関係. . . . .	130
87	$N = 10000$ のネットワークにおけるロバスト性指標 $R^{RB}$ とモジュラリティ $Q$ の関係. . . . .	131
88	日本の主要7地域における $500\text{m} \times 500\text{m}$ メッシュあたりの人口を, 人口の多い順に並べた半対数プロット. 各曲線は地域を表す. 対数スケール上で線形に減衰していることから, 少数のメッシュに人口が集中していることがわかる. このヘビーテール分布は, Pop. および Inv. ネットワークにおけるランクに基づくノード選択の妥当性を支持する. . . . .	131

# 表目次

1	人口分布に基づくノード配置戦略の概念的意味 . . . . .	50
2	1024 ノードを含むネットワークにおける日本の主要7地域のモジュラリティ $Q$ . 元のネットワークと2次元格子 (2D lattice) ネットワークの結果を比較する. 元のネットワークと, ノードを 2D 格子上に再配置したネットワークにおけるモジュラリティ $Q$ の比較. 値が大きいほど, より強いコミュニティ構造を示す. 上付きの三角記号 ( $\Delta$ ) は, Pop.-based または Inv.-based に基づくネットワークが, RNG および GG のいずれにおいても Uni.-based のネットワークより高いモジュラリティを示すことを表す. 太字は対応するモジュラリティが Uni.-based ネットワークより低いことを示す. . . . .	55
3	元のネットワークにおける初期次数 (ID) 攻撃下のロバスト性指標 $R^{ID}$ と臨界割合 $q_c^{ID}$ . 本表は $N = 1024$ の元のネットワークにおいて, 日本の主要7地域に対する初期次数 (ID) 攻撃下でのロバスト性指標 $R^{ID}$ および臨界割合 $q_c^{ID}$ を示す. 数値が大きいほど高いロバスト性を示す. 上付き三角記号 ( $\Delta$ ) は, Pop. または Inv. に基づくネットワークが, Uni. に基づくネットワークより高いロバスト性を示すことを表す. . . . .	69
4	元のネットワークにおけるランダム故障 (RF) 下のロバスト性指標 $R^{RF}$ と臨界割合 $q_c^{RF}$ . 本表は $N = 1024$ の元のネットワークにおいて, 日本の主要7地域に対するランダム故障 (RF) 下でのロバスト性指標 $R^{RF}$ および臨界割合 $q_c^{RF}$ を示す. 数値が大きいほど高いロバスト性を示す. 上付き三角記号 ( $\Delta$ ) は, Pop.-based または Inv.-based ネットワークが, Uni.-based ネットワークより高いロバスト性を示すことを表す. . . . .	69
5	ネットワークの平均次数. 本表は, 日本の主要7地域における $N = 1024$ ノードのネットワークの平均次数 $\langle k \rangle$ を示す. 上付き三角記号 ( $\Delta$ ) は, Pop. または Inv. に基づくネットワークが, Uni. に基づくネットワークよりも高い平均次数 $\langle k \rangle$ を示すことを表す. . . . .	71
6	ネットワークにおける格子状部分の割合. 本表は, 日本の主要7地域における $N = 1024$ ノードのネットワークに対し, 格子状構造を構成するノードの割合を示す. 次数が4であり, その隣接ノードもすべて次数4であるノードを格子状部分に属するものとして定義する. 上付き三角記号 ( $\Delta$ ) は, Pop.-based または Inv.-based に基づくネットワークが, Uni.-based に基づくネットワークよりも高い割合を示すことを表す. なお, 2次元格子 (Lattice) ネットワークは完全な格子構造を持つため, その割合が最も高い (76.56%) . . . . .	71
7	$N = 100$ のネットワークにおける再計算媒介中心性 (RB) 攻撃に対するロバスト性指標 ( $R^{RB}$ ) および臨界割合 ( $q_c^{RB}$ ). 値が大きいほど連結ロバスト性が高いことを示す. $R^{RB}$ において, $\Delta$ の付いた値は Uni.-based の場合よりロバスト性が高いことを示し, $\nabla$ の付いた値は Uni.-based の場合よりロバスト性が低いことを示す. $q_c^{RB}$ については, 全ての値が Uni.-based より低いため, $\nabla$ が付されている. . . . .	132

- 8  $N = 1024$  のネットワークにおける再計算媒介中心性 (RB) 攻撃に対するロバスト性指標 ( $R^{RB}$ ) および臨界割合 ( $q_c^{RB}$ ) . 値が大きいほど連結ロバスト性が高いことを示す.  $\nabla$  の付いた値は, RNG および GG のいずれにおいても, Pop.-based および Inv.-based のネットワークが Uni.-based のネットワークよりロバスト性が低いことを示す. . . . . 132
- 9  $N = 10000$  のネットワークにおける再計算媒介中心性 (RB) 攻撃に対するロバスト性指標 ( $R^{RB}$ ) および臨界割合 ( $q_c^{RB}$ ) . 値が大きいほど連結ロバスト性が高いことを示す.  $\nabla$  の付いた値は, RNG および GG のいずれにおいても, Pop.-based および Inv.-based のネットワークが Uni.-based のネットワークよりロバスト性が低いことを示す. . . . . 133
- 10  $N = 100$  のネットワークにおける平均次数  $\langle k \rangle$ . 値が大きいほど, 各ノードが持つリンク数が多いことを示す.  $\Delta$  の付いた値は, RNG および GG のいずれにおいても, Pop.-based および Inv.-based のネットワークが Uni.-based のネットワークより高い平均次数を持つことを示す. . . . . 133
- 11  $N = 10000$  のネットワークにおける平均次数  $\langle k \rangle$ . 値が大きいほど, 各ノードが持つリンク数が多いことを示す.  $\Delta$  の付いた値は, RNG および GG のいずれにおいても, Pop.-based および Inv.-based のネットワークが Uni.-based のネットワークより高い平均次数を持つことを示す. . . . . 134
- 12  $N = 100$  のネットワークにおけるモジュラリティ  $Q$ . 値が大きいほどコミュニティ構造がより強いことを示す.  $\Delta$  および  $\nabla$  の付いた値は, RNG および GG のいずれにおいても, Pop.-based および Inv.-based のネットワークが Uni.-based のネットワークよりモジュラリティが高い ( $\Delta$ ) あるいは低い ( $\nabla$ ) ことを示す. 一般に, Pop.-based および Inv.-based のネットワークは, Uni.-based のネットワークと比較してより高いモジュラリティを示す傾向がある. . . . . 134
- 13  $N = 10000$  のネットワークにおけるモジュラリティ  $Q$ . 値が大きいほどコミュニティ構造がより強いことを示す.  $\Delta$  の付いた値は, RNG および GG のいずれにおいても, Pop.-based および Inv.-based のネットワークが Uni.-based のネットワークより高いモジュラリティを持つことを示す. 一般に, Pop.-based および Inv.-based のネットワークは, Uni.-based のネットワークと比較してより高いモジュラリティを示す傾向がある. . . . . 135
- 14 ノード分布 (人口分布, 逆人口分布, および均一分布) が再計算媒介中心性 (RB) 攻撃に対するロバスト性指標 ( $R$ ) および臨界割合 ( $q_c$ ) に与える影響を評価した一元配置分散分析 (One-way ANOVA) の結果 ( $N = 1024$ ) . **F 値** は群間分散と群内分散の比を示す. **p 値** は観測された群間差が偶然によるものである確率を示し, 一般に  $p < 0.05$  は統計的に有意とみなされる.  $\eta^2$  は効果量を示し, 群要因によって説明される分散の割合を示す. 慣例的に,  $\eta^2 > 0.14$  は大きな効果を示すとされる. . . . . 135

- 15 ノード配置 (人口分布, 逆人口分布, および均一分布) が初期次数 (ID) 攻撃に対するロバスト性指標 ( $R$ ) および臨界割合 ( $q_c$ ) に与える影響を評価した一元配置分散分析 (One-way ANOVA) の結果 ( $N = 1024$ ). **F 値**は群間分散と群内分散の比を示し, **p 値**は観測された群間差が偶然によるものである確率を示す (一般に  $p < 0.05$  は統計的に有意とされる).  $\eta^2$  は効果量を示し, 群要因によって説明される分散の割合を表す. 慣例的に,  $\eta^2 > 0.14$  は大きな効果を示すとされる, 本表において, RNG ネットワークの  $q_c$  については有意差が見られなかった ( $p = 0.249$ ). この理由としては, 次の2点が考えられる: (1) RNG における Pop.-based のネットワークは平均次数  $\langle k \rangle$  が高く (表 5 参照), ノード除去後にも代替経路が存在しやすいこと; (2) Pop.-based のネットワークには格子状部分が存在し, 局所的なコミュニティ構造が強化されることで臨界的な断片化の発生が遅延すること. . . . . 136
- 16 ノード配置 (人口分布, 逆人口分布, および均一分布) がランダム故障 (RF) に対するロバスト性指標 ( $R$ ) および臨界割合 ( $q_c$ ) に与える影響を評価した一元配置分散分析 (One-way ANOVA) の結果 ( $N = 1024$ ). **F 値**は群間分散と群内分散の比を示し, **p 値**は観測された群間差が偶然によるものである確率を示す (一般に  $p < 0.05$  は統計的に有意とされる).  $\eta^2$  は効果量を示し, 群要因によって説明される分散の割合を表す. 慣例的に,  $\eta^2 > 0.14$  は大きな効果とみなされる, 特に, RNG ネットワークにおける  $R$  については有意差が認められなかった ( $p = 0.104$ ). また,  $q_c$  の結果は境界的な有意性を示した ( $p = 0.028$ ). これらの結果は, 次の2点により説明できる: (1) 平均次数  $\langle k \rangle$  が高い場合, ノード除去後にも代替経路が確保されやすいこと (表 5 参照); (2) ネットワーク内の一部に格子状部分が存在することで, 局所的なコミュニティ構造が強化され, 臨界的断片化の発生が遅延すること. . . . . 137
- 17 1024 ノードのネットワークにおけるコミュニティ数 (オリジナル構造および 2D 格子上への再配置後). 本表は, オリジナルのネットワークおよび 2D 格子上へのノード再配置後に推定されたコミュニティ数.  $\Delta$  は, Pop.-based または Inv.-based のネットワークが Uni.-based のネットワークより多くのコミュニティを持つことを示す. 太字は, RNG と GG の両方において Uni.-based より少ないコミュニティ数を示す. . . . . 138
- 18 日本の各都市における RNG および GG のスパース性指数  $SI(G_w)$  ( $N = 1024$ ). 値は正規化されたリンク距離に基づいて算出され, 各ネットワーク構造の空間的スパース性を表す. Uniform および 2D Lattice はスパース性の比較基準として用いる. 特に 2D Lattice が最も高い  $SI(G_w)$  を示すが, これは遠方ノード間に長いリンクが形成されるためと考えられる. . . . . 138
- 19 スパース性指数 (SI) とロバスト性指標 ( $R$  および  $q_c$ ) との間のピアソン相関係数 ( $r$ ) および有意確率 ( $p$  値) を示す結果. 対象は RNG および GG に対し, 再計算媒介中心性 (RB) 攻撃, 初期次数 (ID) 攻撃, およびランダム故障 (RF) の3種類の攻撃戦略である. **太字の値**は統計的に有意な結果 ( $p < 0.05$ ) を示す. 負の相関 ( $r < 0$ ) は, スパース性 (SI) が高いほどロバスト性が低くなることを示し, 空間的にスパースなネットワークは脆弱になりやすいことを意味する. 一方, 正の相関 ( $r > 0$ ) は, 格子状構造や冗長リンクがスパース性を補償する場合など, スパース性がロバスト性向上に寄与しうることを示す. . . . . 139

- 20 RNG および GG におけるモジュラリティ  $Q$  とスパース性指数  $SI(G_w)$  のピアソン相関係数 ( $r$ ) および有意確率 ( $p$  値). 相関係数  $r > 0$  は, モジュラリティ  $Q$  が空間的スパース性  $SI(G_w)$  と単調増加の関係にあることを示す. 特に GG においては統計的に有意な相関が認められる ( $p < 0.05$ ). . . 139

# 第1章 緒言

## 1.1 節 研究背景と目的

現代社会を支える情報、通信、交通、エネルギー供給、さらには社会的あるいは生物的なつながりは全くランダムでも完全に規則的でもなく、ある種の共通するつながり構造存在することから、重要な研究対象となっている [6, 7, 8, 9], つながりの基本的性質を理解するため、現実世界のこれらのシステムを抽象化すると、ノードとリンクはそれぞれ個体および相互作用関係に対応する。例えば、インターネットやソーシャルネットワークは人々のコミュニケーションと情報伝達の複雑な関係性、電力ネットワークや交通ネットワークは基盤施設間の空間的分布特性、タンパク質相互作用ネットワークは生命活動における分子生物学的な関係性を調べることができる。

複雑ネットワーク研究における中心的課題の一つは、その連結ロバスト性である。なぜなら、ネットワークが自然災害、機器故障、または悪意ある攻撃を受けた場合、ノードやリンクの喪失はネットワーク全体の連結性を低下させ、場合によってはシステムが広域にわたって機能不全に陥り、ネットワークとしての基本機能を失う。すなわち、情報や物質の伝達や運搬が不可能になる。したがって、このような外的衝撃下におけるネットワークのロバスト性を理解して、それを向上させることは理論的意義および実用的価値の両面から重要である。

現実世界のネットワークシステムは、非空間ネットワークと空間ネットワークという2つの主要な種類に分けられる。非空間ネットワークは、ノード間の接続が主にトポロジ的なルールによって決定されて、ノードの物理的な位置を明示的に考慮しないことを特徴とする。これらのネットワークでは、ノード間の「距離」は通常、ホップ数で測定されて、実際の幾何学的または物理的な距離は考慮されない。代表的な例としては、ソーシャルネットワーク、引用ネットワーク、WWWなどが挙げられ、接続は空間的な近接性ではなく、社会的相互作用、情報依存、知識の伝播といった抽象的な関係を反映している。非空間ネットワークの研究において、スケールフリー (SF) ネットワークは、次数分布がべき乗則に従うという統計的性質を通じて、多くの実ネットワークの構造的異質性を表現

できるため、代表的な研究対象となっている。

一方、空間ネットワークは、ノードとリンクが地球表面に埋め込まれていることを特徴として、地理的位置、空間距離、環境条件などの要因によって大きく制約される。典型的な空間ネットワークには、送配電網、交通網、無線通信網などが挙げられる。これらのネットワークでは、ノード間の関係はトポロジ的な意味だけでなく、物理的な意味も持っている。例えば、リンク長、建設コスト、伝送損失、保守の難易度などは、ノード間の幾何学的な距離に依存すると考えられる。そのため、空間ネットワークの構造特性は、地形と経済活動による人口分布と道路の交差点や通信の基地局を表すノード配置とが一般に強い空間的相関を示す。

先行研究によれば、多くの実ネットワークはスケールフリー (Scale-Free, SF) 特性を示し、その次数分布はべき乗則  $P(k) \sim k^{-\gamma}$  に従うことが知られている [10]。ここで、べき指数  $\gamma$  は一般的に  $2 < \gamma < 3$  の範囲にあることが多い [7, 11, 12, 13, 14]。この特性は、ネットワーク中に少数のハブノードと多数の低次数ノードが存在することを意味し、その結果、スケールフリーネットワークはランダム故障に対しては高い頑健性を示す一方、次数順攻撃に対しては極めて脆弱となる [15, 16, 17]。また、パーコレーション理論により、SF ネットワークにおいて臨界閾値  $p_c$  はべき指数  $\gamma$  と密接に関連することが示されている [18, 19]。さらに、次数順攻撃に加えて媒介中心性に基づく攻撃に関する分析 [20, 21, 22] も行われており、BP (belief propagation) 攻撃は、ネットワーク中のループ構造を破壊することで、最も強力な破壊効果を近似的に実現することが示されている [23, 24]。

スケールフリーネットワークにおける連結ロバスト性を向上させるために、これまで多様な戦略が提案されてきた。例えば、ループ構造を強化する再配線によって次数分布の分散  $\sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$  を小さくして、ロバスト性を大幅に改善できることが示されている [2, 3, 4]。また、分散  $\sigma^2$  が小さいほど、最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  が長くなり、いわゆる「大きなホール (holes)」が形成され、これがネットワークの連結ロバスト性向上に寄与することを報告されている [5]。

さらに、近年の研究では、モジュラ構造がネットワークの連結ロバスト性に大きく影響することも明らかにされている。ネットワーク内の次数分布が不均一な場合、各モジュ

ール内部には intra-links が多く存在し, モジュール間の inter-links は相対的に少なくなる. その結果, 全体のモジュラリティ (modularity,  $Q$ ) が高くなり, このような構造は全体的な連結ロバスト性を低下させる傾向がある. 一方で, 適度な再配線 (rewiring) 操作によって一部の intra-links を inter-links に変換して, 接続分布をより均一にすることで, モジュラリティを低下させることができる. その結果, ネットワークの連結ロバスト性が大幅に向上することが示されている [25, 26, 27].

現実のネットワークの中には, 空間埋め込み (Spatial embedding) による強い制約を受けてモジュールを形成するものも存在する. 代表例として, 道路ネットワークや通信ネットワークでは, ノードの位置およびリンクの形成が地理的近接性によって支配される [28, 29]. この制約により, 特定領域内における密集したモジュール (すなわち局所コミュニティ) が形成されて, 異なるモジュール間は少数のリンクによってのみ接続される [8, 9]. コミュニティ抽出に関しては, モジュラリティ最大化, 確率ブロックモデル推定, エネルギー関数最小化, 非バックトラック行列に基づくスペクトル法など, 多数の手法が提案されている [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37]. しかしながら, 「コミュニティ構造が連結ロバスト性にどのような影響を与えるのか」という問題については, 体系的な理解が未だ十分ではない. 既存研究では, 純粋なトポロジー的観点から, 人工的にコミュニティ構造を導入すると SF ネットワークおよび ER ランダムグラフのロバスト性が顕著に低下することが指摘されている [38, 39]. また, 地理制約下の小規模ループが連結性低下を引き起こし得ることも報告されているが [40], そのメカニズムは明らかになっていない.

非空間ネットワークと空間ネットワークでは, モデリングの前提と構造特性が大きく異なるが, どちらも複雑な現実世界のシステムに由来して, 情報伝達, 資源配分, サービス提供において重要な役割を果たしている. したがって, 連結ロバスト性という共通の観点からこれら2種類のネットワークを体系的に分析することで, 異なる構造的制約下におけるネットワーク脆弱性の共通のメカニズムを明らかにする. すなわち, 本研究が比較の軸として重視するのは, ノードの局所的集中と効率化に基づくそれらの密な結合 (互いに少ない仲介で繋がること) がネットワークの連結性を脆弱化させるという共通の構造的メカニズムである. 空間ネットワークでは, ノードの非均一な空間配置と近接統合に

よって、領域内の結合が過度に強化される一方で、領域間を結ぶ橋渡しリンク (bridging links) が相対的に不足しやすい。その結果、局所的に密な結合と希薄な結合が併存する構造 (局所コミュニティ/ボトルネック構造) が生じ、ノード除去や攻撃に対して分断が起こりやすくなる。一方、スケールフリーネットワークでは、三角形を含む短いループが多く形成され、最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  が小さくなり、 $\langle l \rangle$  の低下が連結ロバスト性を弱めること明らかにする。本研究では、スケールフリーネットワークと空間ネットワークに対して共通の攻撃戦略およびロバスト性指標を適用して評価する。SF ネットワークについては、既存研究 (図 4 参照) [4, 5] を拡張して、べき指数を制御可能としたランダム化モデルの実験結果を示す。その結果、次数分布分散の低下は最短ループ平均長  $\langle l \rangle$  の増加とロバスト性の向上をもたらすが、その効果はべき指数  $\gamma > 3.0$  で限定的となることが明らかとなる。一方、空間ネットワークについては、人口密集地域における交差点密度の上昇や [41], 無線通信ネットワークにおける基地局高密度配置の必要性 [42] といった地理的制約を考慮する。しかしながら、現実ネットワークのノードおよびリンク情報は安全上の理由から取得が難しいため、本研究では合理的抽象として、相対近傍グラフ (RNG) [43] および Gabriel グラフ (GG) [44] をモデルに採用し、統計人口データに基づいてノード配置を決定する。この枠組みの下、局所コミュニティの形成メカニズムおよびその連結ロバスト性への影響を分析して、空間中のノード集中および短距離リンクが局所コミュニティを誘発すること多い、これがノード除去時の脆弱性を増大させることを示す。

本論文は、SF ネットワークと空間ネットワークを共通視点から比較して、異なる構造特性をもつネットワークにおいて連結ロバスト性が低下する要因が存在することを明らかにする。

## 1.2 節 論文の構成

本論文は全 5 章から構成され、各章の内容は以下のとおりである。

第 1 章では緒論として、研究の背景・動機および関連分野における既往成果を概説して、ノード故障や悪意ある攻撃に直面した際に複雑ネットワークが抱える連結性の脆弱性を指摘する。続いて、本研究の目的を明確化して、得られた結論の概要を提示する。

第2章では、複雑ネットワークの基本概念と代表的な構造指標（次数, 媒介中心性, フィードバック頂点集合など）を紹介する。あわせて、ネットワーク連結性を評価するための主要なロバスト性指標, すなわちロバスト性指数  $R$  と臨界閾値  $q_c$  の定義と意義を説明する。

第3章では、スケールフリーネットワークにおける連結ロバスト性を検討する。平均次数を揃えた上で、べき指数を調整可能なランダム化ネットワークモデルを用いて、異なる攻撃戦略（次数優先攻撃, 媒介中心性攻撃, Belief Propagation (BP) 攻撃）に対してのロバスト性に次数分布の分散および最短ループ長が与える影響を分析する。実験結果から、「次数分布の分散が縮小する→ループが長くなる→連結性が向上する」という関係が示され、さらにべき指数が大きい場合にはロバスト性向上に上限が存在することを明らかにする。

第4章では、地理的制約を受ける空間ネットワークの連結性の脆弱性を扱う、都市人口分布の統計データに基づいてノードの空間配置を定めて、相対近傍グラフ (Relative Neighborhood Graph, RNG) および Gabriel グラフ (Gabriel Graph, GG) によりリンクを構成する。これにより人口集中域において局所コミュニティが自然に形成されることを示す。さらに、これらのネットワークに対するシミュレーション攻撃の結果、局所コミュニティ構造がネットワーク全体の連結安定性を著しく低下させることを示す。以上の知見は、ノードの空間分布・コミュニティ形成過程と、ネットワークの連結ロバスト性の強弱との関係を明確にするものである。

第5章では、全体の総括と考察を行い、スケールフリーネットワークと空間ネットワークにおけるロバスト性機構の共通点と相違点を整理する。そのうえで、連結ロバスト性を高めるための構造設計指針を提案する。例えば、次数分布の分散を低減することや、空間ネットワークにおいて適度にコミュニティ間を跨ぐ長距離リンクを導入することにより、攻撃耐性の改善が期待できる。最後に、本研究の限界や、マルチレイヤネットワーク、動的ネットワーク、およびコスト制約下での再配線戦略に関する今後の研究方向を展望する。

## 第2章 ネットワークの基本的な用語や既存の解析指標

### 2.1 節 基本的な用語

#### 2.1.1 次数

$N$  個のノードと  $M$  本のリンクから構成されるネットワークにおいて、ノード  $i$  の次数 (degree) は、当該ノードに接続しているリンクの本数として定義される。ノード  $i$  とノード  $j$  の接続関係を隣接行列  $A_{ij}$  で表すと、ノード  $i$  の次数  $k_i$  は次式で与えられる：

$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}. \quad (1)$$

ここで、ノード  $i$  とノード  $j$  の間にリンクが存在する場合は  $A_{ij} = 1$ 、存在しない場合は  $A_{ij} = 0$  とする。また、各リンクは2つのノードを接続するため、ネットワーク中の全ノードの次数の総和はリンク数の2倍となる：

$$\sum_{i=1}^N k_i = 2M. \quad (2)$$

ネットワークの全体的な接続特性を記述するために、次数分布 (degree distribution)  $P(k)$  [6] を定義する。これは、ランダムに選んだノードの次数が  $k$  である確率を表す。次数分布は、ネットワークにおけるノード間の接続のばらつきを反映する指標であり、ネットワーク構造を特徴付ける上で重要である。例えば、ランダムネットワークでは  $P(k)$  はポアソン分布に従う。一方、スケールフリーネットワーク (Scale-Free Network) では、 $P(k) \sim k^{-\gamma}$  のべき乗則に近似的に従い、少数のノードが極めて高い次数を持つ一方で、多くのノードは少数の隣接ノードしか持たないことを示す。

#### 2.1.2 媒介中心性

ネットワークにおけるノードの重要性を分析する際には、ノードが直接持つ接続数 (次数) だけでなく、ネットワーク全体の情報伝達における仲介的役割も評価する必要がある。

る. 媒介中心性 (Betweenness Centrality) は, Freeman によって 1977 年に提案された指標であり, ノードが最短経路上で果たす媒介的機能の強さを測定する [45]. 媒介中心性が高いノード (またはリンク) は, 異なるノード間の情報流通経路において「橋」あるいは「ボトルネック」として機能し, 通信, 伝搬, 制御において重要性が高い.

媒介中心性には, ノード媒介中心性 (node betweenness) とリンク媒介中心性 (link betweenness) の 2 種類がある. 前者はノードが最短経路に登場する頻度, 後者はリンクが最短経路に登場する頻度を表す. 高い媒介中心性を持つノードやリンクの喪失は, ネットワークの全体的な連結性に大きな影響を及ぼす可能性がある.

$N$  個のノードからなるネットワークにおいて, ノード  $v_i$  の媒介中心性は次式で定義される:

$$C_b(v_i) = \sum_{\substack{i \neq j \neq v_i \\ i < j}} \frac{g_{ij}(v_i)}{g_{ij}}, \quad (3)$$

ここで,  $g_{ij}$  はノード  $i$  からノード  $j$  への最短経路の総数,  $g_{ij}(v_i)$  はそのうちノード  $v_i$  を通過する経路数を表す.

比較を容易にするため, 媒介中心性は次式によって標準化される:

$$C'_b(v_i) = \frac{2C_b(v_i)}{(N-1)(N-2)}. \quad (4)$$

媒介中心性は, 社会ネットワーク分析, 情報伝搬, 交通流制御など, 多くの分野で広く利用されている. 例えば, 通信ネットワークにおける高媒介中心性ノードは主要なルータや交換機に対応し, 社会ネットワークでは影響力の大きい個人に対応する. そのため, 媒介中心性はノード重要性の評価における中核的な指標であり, ロバスト性評価および攻撃戦略設計においても基盤となる.

### 2.1.3 フィードバック頂点集合

無向グラフ  $G = (V, E)$  において, ノード集合  $F \subseteq V$  を削除したとき, 得られる部分グラフにいかなるループも含まれない (すなわち森林となる) 場合,  $F$  をフィードバック頂点集合 (Feedback Vertex Set, FVS) と呼ぶ.  $|F|$  を最小化する問題は最小フィードバック頂

点集合問題 (Minimum FVS Problem) と呼ばれ, これは典型的な NP-hard 問題である [46]. FVS の削除はループ構造を破壊して, ネットワークの全域的な連結性を急速に低下させるため, この問題はネットワークのロバスト性と密接に関連する, 正確な最適解を求めることは計算的に困難であるため, 様々な近似アルゴリズムが提案されている. 例えば, 2-近似アルゴリズム [47] では, 各反復で, まず現在のグラフにおける各頂点の「重みと次数の比」 $\omega(v)/\deg(v)$  を計算して, その比が最も小さい頂点の比を  $c$  とする. つぎにこの  $c$  を用いて全頂点の重みを一斉に  $\deg(v)$  に比例して減らして, 重みが 0 になった頂点をグラフから削除する. この操作をグラフが森になるまで繰り返すことで, 2 倍以内に抑えられた FVS を得ることができる.

近年では, 統計物理に基づく近似法が FVS の求解に用いられている. その中でも, 信頼伝播 Belief Propagation (BP) は Cavity Method に基づき, 各ノードが FVS に含まれる確率を推定する [48]. ここで, 自由エネルギーを最小化して値高速に収束する信頼伝播とは, ネットワーク上の隣接ノード間で FVS に属するあるいは属さず根となる確率を反復的に相互作用させることにより, 各ノード  $i$  が FVS に属する確率  $q_i$  を推定する手法である. BP 攻撃アルゴリズムでは, 各ノードが FVS に属する確率  $q_i$  を計算して, 最も  $q_i$  が大きいノードを優先的に削除し, 無ループになるまでこれを繰り返す. その疑似コードは以下のとおりである:

---

**Algorithm 1** Belief Propagation-based Attacks Based on Feedback Vertex Set

---

**Require:** Undirected graph  $G = (V, E)$

**Ensure:** Feedback Vertex Set  $F_0$

$H \leftarrow G$

**while**  $H$  is not acyclic **do**

    Compute probability  $q_i$  for each node  $v_i$  to belong to FVS

$v^* \leftarrow \arg \max_i q_i$

    Remove  $v^*$  from  $H$

**end while**

**return**  $F_0$

---

従来の組合せ最適化手法と比較して, BP 法は高いスケーラビリティと低い計算コストを持ち, 最悪攻撃に近いネットワーク崩壊過程を効率的に近似することができる. したがって, BP 攻撃は近似的な最小 FVS に基づく「最強攻撃」モデルとして, 複雑ネットワ

ークのロバスト性解析に用いられている。

## 2.2 節 ロバスト性指標の評価

### 2.2.1 ロバスト性指標 $R$

複雑ネットワーク研究において、連結ロバスト性 (robustness of connectivity) は、ノード故障あるいは攻撃を受けた際にネットワークが全体機能を維持できる能力を測定する重要な指標である。ネットワーク内のノードまたはリンクが順次除去されると、ネットワークの連結性は強連結状態から断片化状態へと徐々に崩壊していく。そのため、各除去割合における最大連結成分 (Largest Connected Component, LCC) の相対規模の変化を定量的に評価することで、ネットワーク全体のロバスト性を評価することができる。

ロバスト性指標  $R$  は Schneider らによって提案された代表的な測度である [49]。この指標は、最大連結成分の相対規模  $S(q)/N$  がノード除去割合  $q$  に応じてどのように変化するかを表す曲線の下側面積として定義される。ここで、 $S(q)$  は除去割合  $q$  において最大連結成分に含まれるノード数、 $N$  はネットワーク全体のノード数を表す。数学的には次式で与えられる：

$$R = \frac{1}{N} \sum_{q=1/N}^1 S(q), \quad q = \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, \frac{N}{N}, \quad (5)$$

ここで  $q = 1/N, 2/N, \dots, 1$  はノード除去割合を離散的に変化させたものである。

直観的には、 $R$  は図 1 (a) に示される  $S(q)/N-q$  曲線の下にある面積として理解できる。除去に対して連結性の低下が緩やかなネットワークでは、曲線下の面積が大きくなるため  $R$  の値が高くなり、ネットワークのロバスト性が高いことを意味する。一方、少量のノード除去で急激に断裂が生じるネットワークでは  $R$  は小さく、連結性が脆弱であると判断される。同じ臨界閾値  $q_c$  を持つネットワークであっても、 $S(q)/N$  の低下速度が異なれば  $R$  には明確な差が生じる。そのため、 $R$  はより包括的かつ精確なロバスト性指標として広く用いられている。

### 2.2.2 臨界閾値 $q_c$

ロバスト性指標  $R$  に加えて、臨界閾値  $q_c$  もネットワーク崩壊特性を記述する重要なパラメータである。  $q_c$  は最大連結成分 (LCC) が急激に崩壊するノード除去割合として定義され、ネットワークが連結状態から断片化状態へと転移する境界点に相当する。計算上は、第二大連結成分 (Second Largest Connected Component, SLCC) の相対規模  $S^{2nd}(q)/N$  が最大値をとる点として定義される [16]。これは、ネットワークが臨界断点に達した際、元の最大連結成分が分割されることで、第二大連結成分の規模が一時的に最大となるためである。よって、

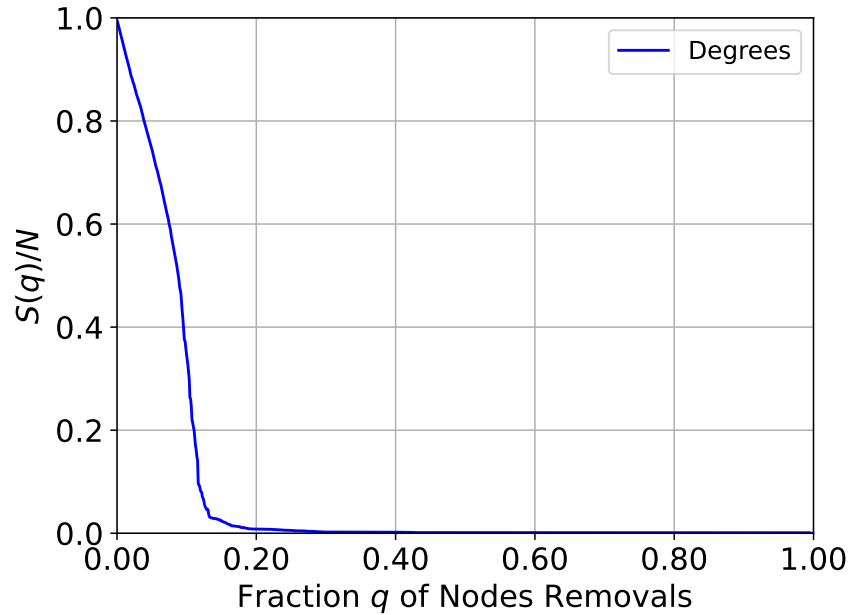
$$q_c = \arg \max_q \left( \frac{S^{2nd}(q)}{N} \right). \quad (6)$$

$q_c$  が大きいほど、ネットワークは多くのノードが除去されても依然として連結性を保持できることを意味し、断裂耐性が高いことを示す。逆に、 $q_c$  が小さい場合、ネットワークは攻撃初期段階ですでに主要な連結構造を失う。図 1 では、次数優先攻撃下における最大連結成分と第二大連結成分の相対規模の変化が示されている、(a) は  $S^{1st}(q)/N$  の低下過程を、(b) は  $S^{2nd}(q)/N$  のピーク形成過程を示している。最大連結成分曲線の下側面積がロバスト性指標  $R$  に対応し、第二大連結成分曲線のピーク位置が臨界閾値  $q_c$  に対応する。

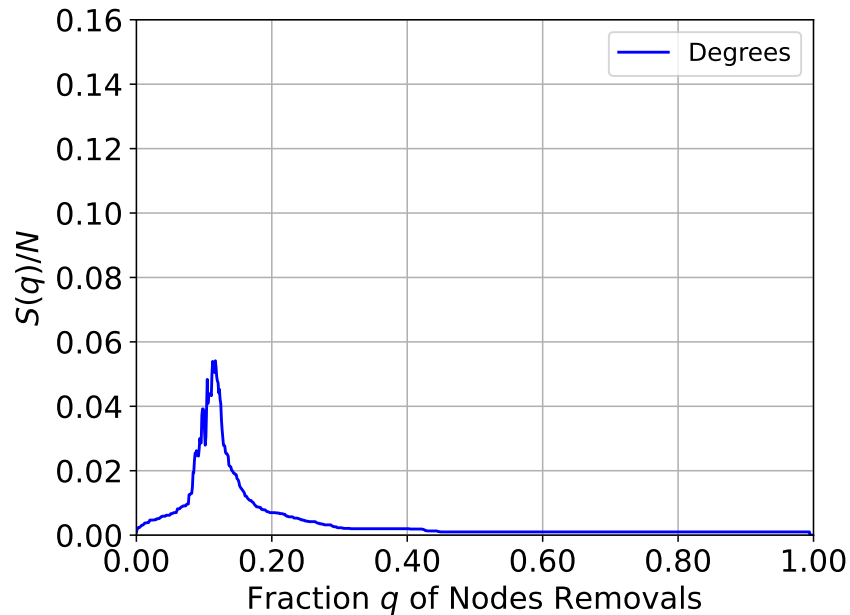
ここで重要なのは、 $R$  と  $q_c$  が測定する観点が異なる点である。 $R$  はネットワークが全体としてどれだけ「平均的に強い」かを表し、 $q_c$  は連結構造が崩壊する「臨界の瞬間」を示す。両者を併用することで、ネットワークの攻撃過程における連結性の推移をより総合的に評価することが可能となる。

### 2.2.3 疎密度指数 (Sparsity Index, SI)

ネットワーク科学において、スパース性 (sparsity) はネットワーク構造の特徴を定量化する上で重要な属性の一つである。従来、スパース性の測定にはリンク密度 (link density) が一般的に用いられ、これは実際のリンク数と完全グラフにおける可能なリンク数との比として定義される。しかしながら、この単純な比率指標はリンクの総量しか反映せず、ノード間の接続分布の不均衡性や、ネットワーク内部の接続集中度を正確に評価するこ



(a)



(b)

図1：本図は次数に基づく攻撃（次数優先攻撃）に対する (a) 最大連結成分および (b) 第2連結成分  $S(q)/N$  の変化例を示す.  $R$  値は (a) の曲線下の面積として定義され,  $q_c$  は (b) の曲線が最大となる点の横軸値として定義される. ノード除去率がおおよそ  $q \approx 0.17$  に達すると, 第2連結成分の規模がピークに達し, ネットワーク連結性が急速に崩壊し始めることが分かる. また,  $R$  の値が相対的に小さいことから, 本ネットワークは次数優先攻撃に対して弱いロバスト性を示している. <sup>27</sup>

とはできない [1]. この限界を克服するため, 論文 [1] では, 経済学で資源分配の不平等を測る指標として用いられるジニ係数 (Gini Index) の概念を応用し, ネットワーク構造解析のための疎密度指数 (Sparsity Index, SI) が提案された. 本指標は, ノード次数分布の不均一性に着目し, ネットワークが完全グラフに比べてどの程度「疎」であるかを定量化することで, 構造的特徴をより包括的に捉えることができる. その後, 論文 [50] ではこの手法が加重ネットワークへと拡張され, リンク重みの分布不均衡およびネットワーク全体の連結特性を同時に表現できるようになった.

疎密度指数の定義は以下の通りである. ネットワーク  $G = (V, E)$  が  $N$  個のノードを有し, ノード次数列を昇順に  $\{k_1, k_2, \dots, k_N\}$  とする. また, 参照定数を  $T_1 \geq T = \sum_{i=1}^N k_i$  とおく, ローレンツ曲線の定義に基づき, 疎密度指数は次式で表される:

$$SI(G) = 1 - \frac{2}{NT_1} \sum_{i=1}^N \left( n - i + \frac{1}{2} \right) k_i$$

本指標の値域は  $[0, 1]$  に正規化され,  $SI = 0$  はネットワークの接続が均一 (完全グラフや正則グラフなど) であることを示し,  $SI$  が 1 に近づくほど, 少数のノードが多数の接続を占める, すなわちネットワークがより疎であることを意味する. 一般的な正規化方法として, 完全グラフの総次数を基準とする  $T_1 = N(N - 1)$  がよく用いられる. また,  $T_1 = T$  とした場合, 本指標はジニ係数と完全に等価となる (図2参照) [1].

加重ネットワークの場合, リンク重みの値を  $\{w_1 < w_2 < \dots < w_k\}$ , それぞれの出現頻度を  $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$  とすると, 加重ネットワークの疎密度指数  $SI(G_w)$  は次式で定義される:

$$SI(G_w) = 1 - \frac{1}{N^2 T_1} \sum_{j=1}^k w_j f_j (f_j + 2f_{j+1} + 2f_{j+2} + \dots + 2f_k)$$

ここで,  $T_1 = \sum_{e=1}^{M'} w_e f_e$  は全リンク重みの総和を表し,  $M'$  は異なるリンク重みの種類数である. 本指標は, リンク重み分布の累積偏差を算出することで接続の集中度を定量化し, 値が大きいほどリンク長または重み分布の不均衡性が高く, ネットワークが空間的に疎であることを示す [50].

研究により,  $SI$  は Robin Hood, Scaling, Rising Tide, Bill Gates, Babies など, 既存のスパース性指標の有効性基準を多数満たすことが示されている. また, 異なる規模やトポロジ構造をもつネットワークに対しても良好な単調性と正規性を保持することが確認されている. さらに, リンク数が同一の場合, スター型ネットワークの  $SI$  が最大となり, ハミルトンパス構造の  $SI$  が最小となることから,  $SI$  がネットワーク構造における接続集中度の差異を有効に識別できる指標であることが明らかにされている [50].

この特徴を直感的に理解するため, リンク数が同程度の二つの典型的なトポロジ構造 (スター型およびハミルトンパス構造) における累積次数分布を比較した模式図を図 3 に示す. スター型ネットワークでは, 大部分のノードが次数 1 であり, 一部の中心ノードが高次数を持つため, 曲線は後半で急峻に上昇し,  $SI$  値が高くなる. 一方, ハミルトンパス構造ではすべてのノードがほぼ均等に接続しているため, 曲線は均等分配線に近く,  $SI$  値が低い. このように,  $SI$  は接続の集中度の違いを視覚的にも明確に表すことができる.

総じて, 疎密度指数はネットワークのスパース性を測るだけでなく, ノード次数やリンク重み分布の不均衡性も反映する. 無向, 有向, 加重ネットワークに適用可能であり, 計算量が比較的 low (約  $O(n \log n)$ ), 大規模ネットワーク解析において高い実用性を有する. 既存研究では, 社会, 交通, 通信, 生物ネットワークなど多様な分野において, ノード接続の集中化, トポロジのロバスト性, コミュニティ構造特性の分析などに応用されている [50]. 本研究では, 疎密度指数を用いて空間ネットワークにおけるノード分布およびリンク長分布の不均衡性を定量的に評価し, 「コミュニティ構造の強化が連結ロバスト性を低下させる」メカニズムを明らかにするとともに, モジュラリティ  $Q$  およびロバスト性指標  $R$  との関係を実験的に補完するものである.

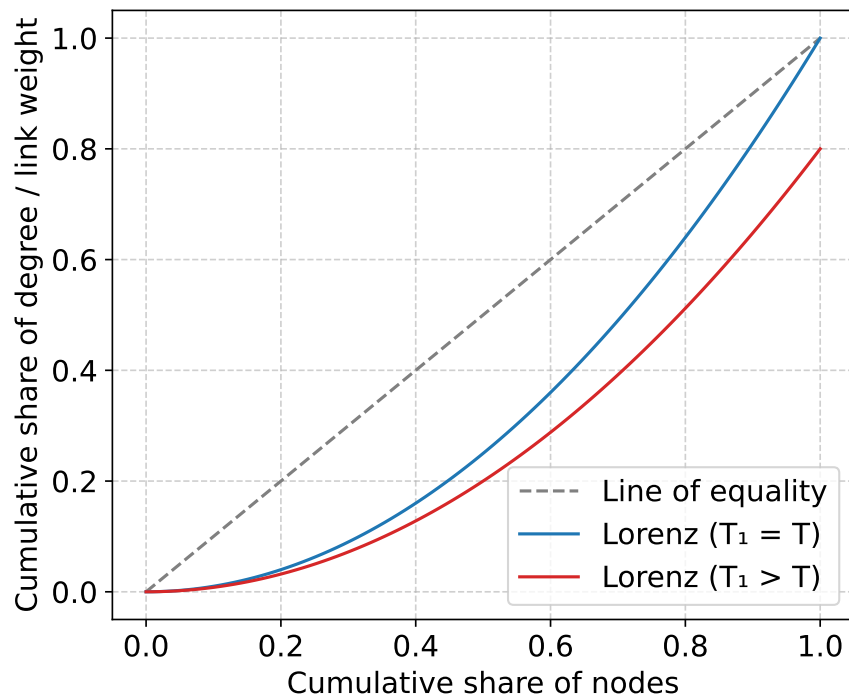


図 2：Lorenz 曲線に基づくスパース性の概念図, 実際の総次数  $T$  に基づいて計算されるジニ係数の曲線（青）と, 潜在的な総次数  $T_1$  を参照とする場合（赤）を比較した.  $T_1 > T$  の場合, 曲線は均等分配線からさらに離れ, より大きな疎密度指数  $SI(G)$  が得られる [1].

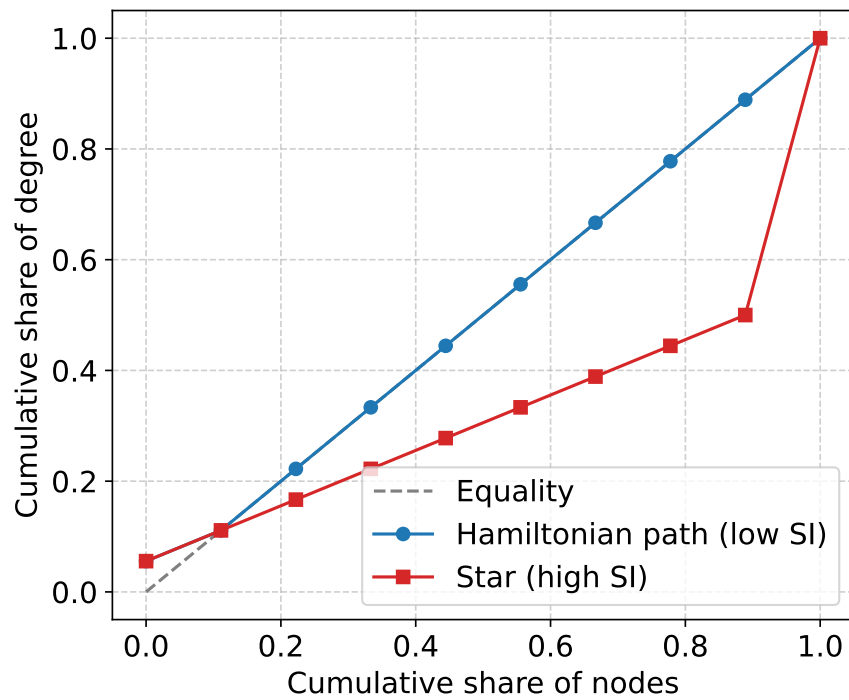


図3：異なるトポロジ構造における累積次数分布の模式図. リンク数が同程度の場合, スター型ネットワーク (赤) は接続が一部ノードに集中しており, 曲線の後半が急峻に上昇するため  $SI$  値が高い. 一方, ハミルトンパス構造 (青) は接続が比較的均一であり, 曲線は均等分配線に近い位置をとるため  $SI$  値が低い.

# 第3章 スケールフリーネットワークにおけるロバスト性の解析

本章では、第1章で述べた研究目的 (図4参照) に基づき、スケールフリーネットワーク (Scale-Free, SF) の連結ロバスト性について分析する。DSM モデル [51] を用いて調整可能なべき指数  $\gamma$  を持つスケールフリーネットワークを生成し、第2.2節で定義したロバスト性指標  $R$  および臨界閾値  $q_c$  と組み合わせることで、次数分布分散  $\sigma^2$  や最短ループの平均長  $\langle l \rangle$  といった構造特性が連結ロバスト性に与える影響を体系的に評価する。また、異なる攻撃戦略に対する脆弱性差異を検討するため、次数優先攻撃、媒介中心性に基づく攻撃、信頼伝播 (BP) 攻撃を比較して、次数分布の分散と最短ループさらにロバスト性の関係を明らかにする。

## 3.1 節 モデル設定とべき指数の可調性

第1.1節で述べたように、本研究は先行研究 (図4) [4, 5] に基づき、ネットワークの連結ロバスト性を拡張的に分析することを目的としている。先行研究では、より広いランダム化ネットワーク (橙色領域) を対象として、次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$  が連結ロバスト性に及ぼす影響を明らかにした。特に、 $\sigma^2$  が小さくなるほどネットワークの連結性は向上して、その要因として、再配線過程における大規模ループ (large loops) の生成・強化が挙げられる。このようなループ構造はネットワーク内部で「ホール (hole)」の役割を果たして、ノードやリンクの喪失による連結性崩壊を緩和する効果をもつことが報告されている [2, 3, 4, 5]。

しかしながら、これらの研究の主な対象は  $\gamma \geq 3$  のスケールフリーネットワークや、より広義のランダム化ネットワーク (例えば Erdős-Rényi グラフや正則ネットワーク) であった。現実世界の多くの複雑ネットワークは  $2 < \gamma < 3$  の範囲にべき指数をもつことから、この領域におけるロバスト性のメカニズムを体系的に解明することは重要な意義をもつ。そこで本研究では、べき指数を可変とするランダム化スケールフリーネットワークモデル (図中の青色領域) を構築して、 $\gamma$  の変化が次数分布の分散、最短ループ構造、およ

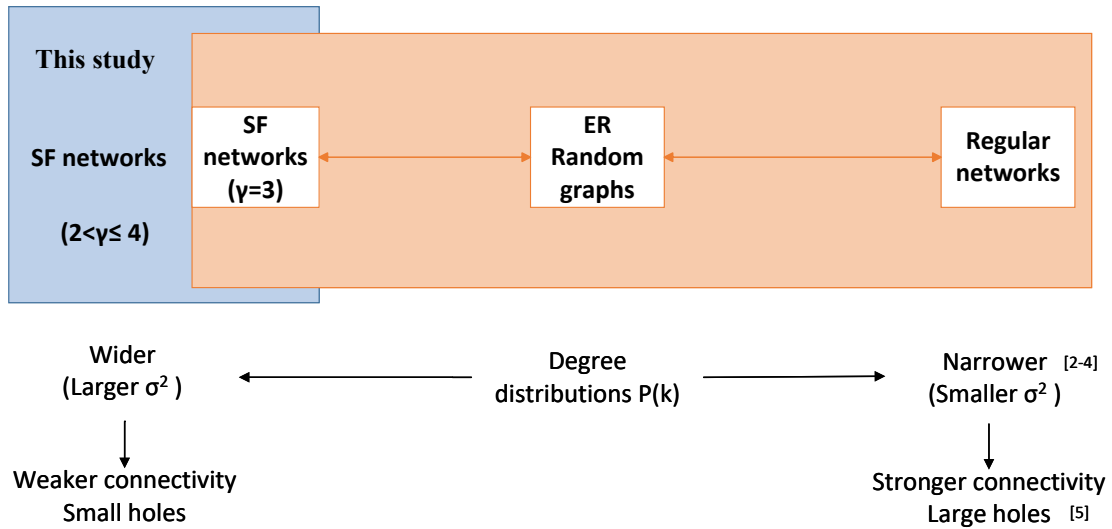


図 4：本図は関連研究の位置付けを示す。青色の領域は本研究の対象範囲を表し、可変べき指数  $2 < \gamma \leq 4$  をもつスケールフリー・ネットワーク（SF networks）に着目する。一方、橙色の領域はより広いランダム化ネットワークに関する先行研究 [2, 3, 4, 5] を表す。これらの研究により、次数分布  $P(k)$  がより狭くなる（すなわち大きなホールが増加する）と、ネットワークは悪意ある攻撃に対してより高いロバスト性を示すことが報告されている。

び連結ロバスト性に与える影響を詳細に解析する。これにより、スケールフリー構造に固有の脆弱性と、その改善可能性をより包括的に明らかにすることを目指す。

スケールフリーネットワークにおいて、ノードの次数分布  $P(k)$  は一般に次のべき乗則に従う：

$$P(k) = Ck^{-\gamma}, \quad k \geq k_{\min}, \quad (7)$$

ここで、 $\gamma$  はべき指数、 $C$  は正規化定数、 $k_{\min}$  は最小次数を表す。 $\gamma$  が小さい場合、高次数ノード（いわゆる「ハブノード」）の割合が増加し、次数分布分散が大きくなる。一方、 $\gamma$  が

大きい場合、ノード次数のばらつきが減少し、分布はより均一に近づく。このように、 $\gamma$  はネットワーク中の次数不均衡を決定するパラメータであり、ロバスト性に大きな影響を与える。

べき分布  $P(k) \sim k^{-\gamma}$  に従う理論モデルでは、平均次数  $\langle k \rangle$  は  $\gamma$  に依存して変化する。式 (7) から、 $k_{\min}$  を固定すると平均次数は次式で与えられる：

$$\langle k \rangle = \sum_k kP(k) \approx \int_{k_{\min}}^{\infty} kP(k) dk = \frac{\gamma - 1}{\gamma - 2} k_{\min}. \quad (8)$$

式 (8) より、べき指数  $\gamma$  を変化させると平均次数  $\langle k \rangle$  も変動するため、異なる  $\gamma$  のネットワーク間でロバスト性を比較する際に平均次数が統一されないという問題が生じる。すると、 $\gamma$  の純粋な影響を評価できない。

そこで本研究では、平均次数  $\langle k \rangle \approx 2m$  をほぼ一定に保ちながら、べき指数を調整可能な **DSM モデル** [51] を採用する。このモデルは、次数分布が  $P(k) \sim k^{-\gamma}$  に従うスケールフリーネットワークを生成可能であり、 $2 < \gamma \leq 4$  の範囲は、多くの現実ネットワークで観測される代表的なべき指数を包含している。例えば、World Wide Web では  $\gamma \approx 2.1$ 、一方で米国西部の電力網では  $\gamma \approx 4.0$  が報告されており [6, 7, 11, 12]、この  $\gamma$  の範囲は、情報ネットワークから基盤インフラネットワークまでを横断的にカバーする。DSM モデルでは、各ステップで新しいノードを追加し、既存ノードの次数に定数項を加えたものに比例した確率でリンクを形成する。新ノードが  $m$  本のリンクを生成する場合、ノード  $i$  に接続される確率は次式で表される：

$$\Pi_i = \frac{k_i + c}{\sum_j (k_j + c)}, \quad (9)$$

ここで  $c$  は調整パラメータである。 $c/m$  を変化させることでべき指数  $\gamma$  は次式に従って変化する：

$$\gamma = 3 + \frac{c}{m}, \quad c > -m. \quad (10)$$

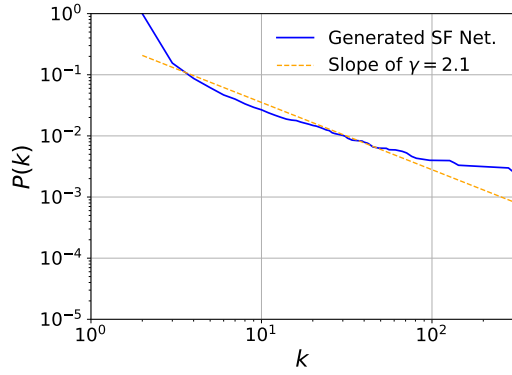
したがって、最小次数  $k_{\min} = m$  を固定したまま  $c/m$  の比率のみを変更することで、異なるべき指数を持つスケールフリーネットワークを生成できる。本手法により、平均次数を一定に保ちつつ  $\gamma$  の影響を分析できる。

しかしながら, DSM モデルから直接得られるネットワークには次数相関や高次構造の偏りが残存する可能性がある. 例えば, 次数相関 (degree-degree correlation) とは, あるノードの次数が隣接ノードの次数と相関をもつ傾向を指し, 同種選好的混合 (assortative mixing) では高次数ノード同士が互いに接続しやすく [52, 53], 異種選好的混合 (disassortative mixing) では高次数ノードが低次数ノードと接続しやすいことを意味する. 同種は社会的ネットワーク, 異種は技術的あるいは生物的ネットワークに観察されることがある. さらに, 高次相関 (higher-order correlations) は, 3 つ以上のノードから構成される特徴的な次数の接続パターンを指す. そこで本研究では, べき指数の影響のみを純粹に評価するため, Configuration model を用いてネットワークをランダム化する. 具体的には: (1) DSM モデルで生成したネットワークのすべてのリンクを一旦自由端に分解する; (2) ノードの次数に応じて自由端のペアをランダムに選ぶ; (3) 自己ループと重複リンクを禁止しながら自由端同士を再接続する. この操作により次数分布  $P(k)$  は保持される一方, 次数相関は除去される.

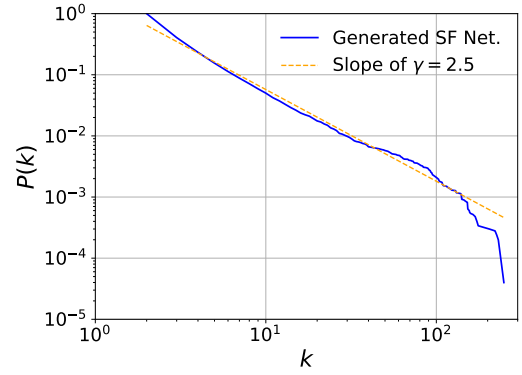
本研究の実験設定では, 最小次数  $k_{\min} = m = 2$ , ノード総数  $N = 1000$  として, べき指数  $\gamma$  を  $2.1 \leq \gamma \leq 4.0$  の範囲で 0.1 刻みに変化させる. 各パラメータに対して 100 個の独立ネットワークを生成して, 平均値を計算して統計的に調べる. 図 5 に示すように, DSM モデルで生成されたネットワークは両対数プロット上で明瞭なべき乗則を示す. べき指数  $\gamma$  が大きくなるにつれて分布曲線の傾きは急になり, 高次数ノードが減少して次数分布はより均一化する. 図 6(a)(b) は, べき指数の増加に伴い次数分布分散  $\sigma^2$  と最大次数  $k_{\max}$  がいずれも減少することを示している. 特に  $\gamma > 3.0$  では  $\sigma^2$  は有限値に収束して, 次数分布のばらつきがほぼ安定する. この傾向はロバスト性指標  $R$  および最短ループ平均長  $\langle l \rangle$  に直接影響して, その詳細は 3.2 節および 3.3 節にて議論する.

### 3.2 節 攻撃手法の概要

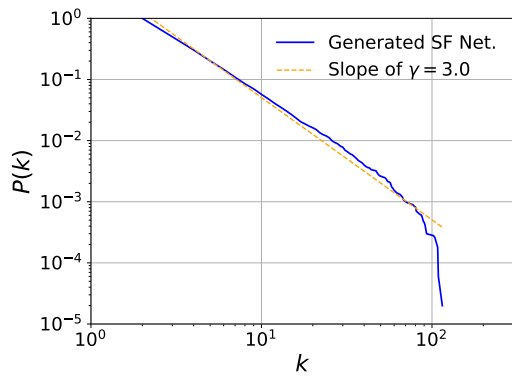
ネットワークが異なる攻撃戦略に対してどのように連結性を維持あるいは喪失するかを評価するために, 本研究では以下の 3 つの代表的なノード除去手法を用いる: (1) 次数優先攻撃 (Degrees attack), (2) 媒介中心性攻撃 (Betweenness centrality attack), (3) Belief



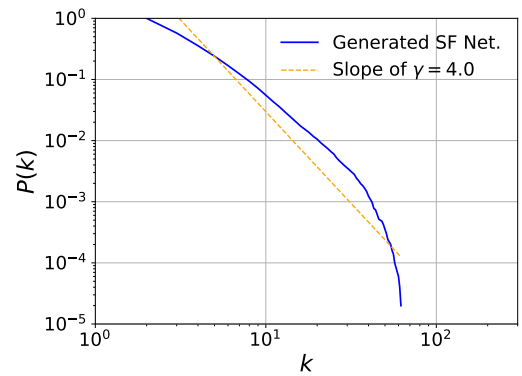
(a)  $\gamma = 2.1$



(b)  $\gamma = 2.5$



(c)  $\gamma = 3.0$

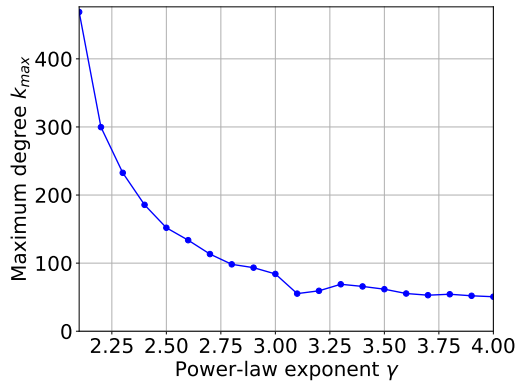


(d)  $\gamma = 4.0$

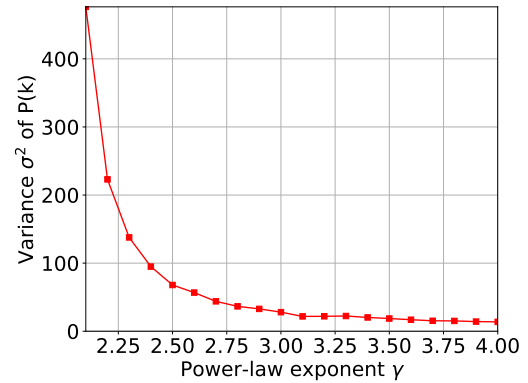
図5：本図は異なるべき指数  $\gamma$  によって生成したスケールフリーネットワークの次数分布  $P(k) \sim k^{-\gamma}$  を示す. (a)  $\gamma = 2.1$ , (b)  $\gamma = 2.5$ , (c)  $\gamma = 3.0$ , (d)  $\gamma = 4.0$ . 破線は両対数軸におけるべき指数  $\gamma$  の推定された傾きを示している.

Propagation (BP) 攻撃 (Belief Propagation attack), これら3つの手法はいずれも逐次再計算型 (recalculated attacks) に分類される. すなわち, 各ステップでノードを一つ除去するたびに, 残存ノードの指標値を再計算して, ネットワーク構造の動的変化を反映させる.

(1) 次数優先攻撃 (Degrees attack) では, ネットワーク中の全ノードの次数  $k_i$  を計算し (定義は 2.1.1 節参照), 最も次数の大きいノードから順に除去する. この手法は「高次数ノード (ハブノード)」が標的として破壊される状況を模擬しており, スケールフリーネットワークがハブ喪失に対して脆弱であることを評価する際に広く用いられる [15]. ノード除去のたびにネットワークを更新し, 再度次数を計算する操作を, ネットワークが



(a)



(b)

図6：本図はべき指数  $\gamma$  の増加に伴う (a) 最大次数  $k_{max}$  および (b) 次数分布  $P(k)$  の分散  $\sigma^2$  の単調減少関係を示す。

崩壊するまで繰り返す。

(2) 媒介中心性攻撃では、ノードがネットワークにおける最短経路の媒介役として担う機能に着目する（定義は2.1.2節参照）。本手法では、各ステップで媒介中心性の最も高いノードを除去する。媒介中心性はネットワーク全体の最短経路構造に依存するため、情報流通における「ボトルネック」ノードを効果的に特定できる一方、計算コストは比較的高い [20]。

(3) BP 攻撃（Belief Propagation attack）は、最少フィードバック頂点集合（Feedback Vertex Set, FVS）問題に対する近似求解に基づく攻撃手法である [23, 48]。信頼伝播（Belief Propagation, BP）アルゴリズムにより、各ノードが FVS に含まれる確率  $q_i$  を推定し（定義は2.1.3節参照）、 $q_i$  の最大値を持つノードを優先的に除去することで、ネットワーク中のループ構造が効率的に破壊される。FVS の除去はネットワークを無ループ構造（森構造）へと直接変化させるため、BP 攻撃は理論的に最悪攻撃に最も近いアプローチとみなされる [24]。

### 3.3 節 三種の攻撃手法が連結ロバスト性に与える影響

以下、べき指数  $\gamma$  が 2.1 から 4.0 へ増加するにつれて、ネットワークの連結ロバスト性が緩やかに向上することを確認する。図7(a)–(d) に示されるように、 $\gamma$  の増加に伴い曲線下

側の面積が増大しており, (a) から (d) へとロバスト性が高くなることを意味している. また, BP 攻撃および媒介中心性攻撃は, 次数優先攻撃よりも破壊効果が強い点にも留意する必要がある.

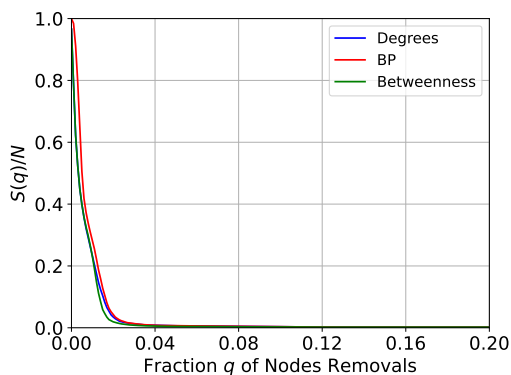
より詳細な結果を図 8 に示す. (a) 次数優先攻撃, (b) 媒介中心性攻撃, (c) BP 攻撃のいずれにおいても,  $\gamma$  が 2.1 (深紫) から 4.0 (赤) へ増加するにつれ, ロバスト性曲線は全体として右方向にシフトする. 特に  $\gamma < 3.0$  の領域では曲線間の差異が大きい一方,  $\gamma > 3.0$  においては差異が小さくなる. これは図 6(b) に示される次数分布の分散  $\sigma^2$  の収束と一致している. 深紫から赤への推移に伴い曲線下の面積が増加するため, べき指数が大きいスケールフリーネットワークはこれら三種の攻撃に対して相対的にロバストであると言える.

すなわち, スケールフリーネットワークは一般に脆弱とされるものの, 次数分布が狭くなる場合 (図 5 および図 6 参照) には, ロバスト性が緩やかに向上する. 本結果は, 次数分布  $P(k)$  が連続的に変化するランダム化ネットワークに関する先行研究 ( $\gamma = 3$  の SF ネットワーク, ER ランダムグラフ, および規則ネットワークを含む [2, 3, 4, 5]) とも一致している.

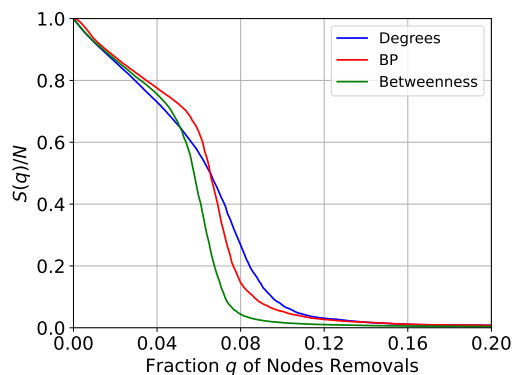
図 9(a)–(d) は, ロバスト性指標  $R$  と次数分布の分散  $\sigma^2$  (べき指数  $\gamma$  によって制御) の関係を示している. 図 9(d) より, 三種の攻撃手法 ((a) 次数優先, (b) 媒介中心性, (c) BP) において, 曲線形状にわずかな差異はあるものの, 共通して  $\gamma$  の増加に伴い  $R$  が増加することが分かる. すなわち, ロバスト性は主に次数分布の分散  $\sigma^2$  により決定され, 分布の高次数側における非線形的偏りには依存しない (図 5 参照). ただし,  $\gamma > 3.0$  においてもスケールフリーネットワークはなお脆弱性を保持しており, ロバスト性の向上は限定的である. これはハブノードが依然として存在し,  $k_{\max}$  および  $\sigma^2$  が非零値に収束するためである (図 6).

### 3.4 節 最短ループ平均長 $\langle l \rangle$ がロバスト性に与える影響

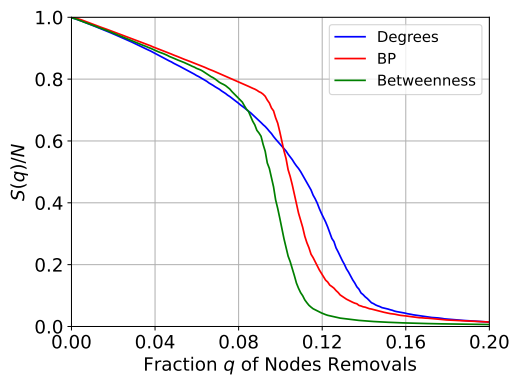
前節では, べき指数  $\gamma$  が増加して, 次数分布の分散  $\sigma^2$  が減少すると, ロバスト性指標  $R$  が増大することを示した. 同様に, ロバスト性と分散の関係は, より広いランダム化ネッ



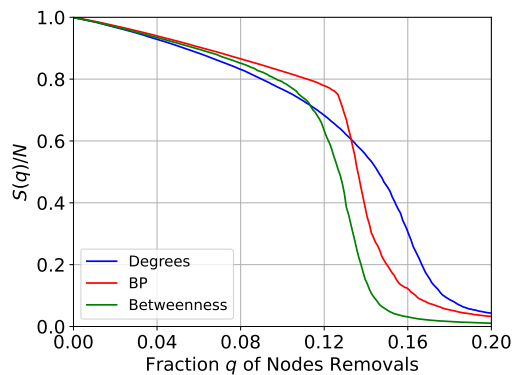
(a)  $\gamma = 2.1$



(b)  $\gamma = 2.5$



(c)  $\gamma = 3.0$



(d)  $\gamma = 4.0$

図7: 本図はランダム化されたスケールフリーネットワークにおける, 異なるべき指数  $\gamma$  に対するロバスト性曲線  $S(q)/N$  を示す. (a)  $\gamma = 2.1$ , (b)  $\gamma = 2.5$ , (c)  $\gamma = 3.0$ , (d)  $\gamma = 4.0$ . 青, 緑, 赤の曲線はそれぞれ再計算次数攻撃, 媒介中心性攻撃および BP 攻撃に対応する. 曲線下の面積を比較すると, 赤 (BP) および緑 (媒介中心性) は青 (次数) よりも面積が小さく, より強い破壊効果を有することが分かる.

トワークの族 ( $\gamma = 3.0$  のスケールフリーネットワーク, ER ランダムグラフ, および規則ネットワークを含む) においても確認されている [4]. 加えて, この広義のクラスでは,  $\sigma^2$  の減少に伴い, 最短ループ平均長  $\langle l \rangle$  が増加することが示されている [5] (図 4 参照). 図10に示すように, 最短ループ (shortest loops) はリンク  $e_{ij}$  と, その両端ノード  $i$  と  $j$  を結ぶ最短経路から構成される. ノード  $i$  と  $j$  の間で最短のループであるため, このループの内部には他のループは存在せず穴を表す.

より具体的には, 文献 [5] は  $\gamma > 3$  のネットワークを対象とした解析により,  $\gamma$  の増加に伴って次数分布がより集中して (すなわち分散  $\sigma^2$  が小さくなり), 平均最短ループ長  $\langle l \rangle$  が長くなることを示した. これはネットワーク内部に存在する「ホール (hole)」が拡大することを意味する. 直感的には, 大きなホールの形成はネットワークの連結性を低下させ, ノードやリンクの除去に対して脆弱化するように思われる. しかしながら, 一人の実験結果では, むしろ大きなホールをもつネットワークの方が連結ロバスト性が高いという, 反直感的な現象が確認された. ホール構造がネットワークの連結性維持において重要な役割を果たしている可能性を示唆している. したがって, 本研究ではこの現象がより典型的な  $2 < \gamma < 3$  のスケールフリーネットワークにおいても現れるかどうかを検証して, その背後にある構造的要因を明らかにすることを目的とする. そのため, ロバスト性指標  $R$  に加えて, 平均最短ループ長  $\langle l \rangle$  を導入し, ループ構造 (ホールの大きさ) と連結ロバスト性との関係を体系的に分析する.

本研究においても, 先行研究 [5] と同様に, べき指数  $\gamma$  の増加に伴って最短ループ長分布  $P(l)$  が長いループ方向へシフトする傾向が確認された. これは,  $\gamma$  の増大によってネットワーク内部のホール構造が拡大することを示唆している. 図 11 は,  $\gamma$  が 2.1 (深紫) から 4.0 (赤) へ増加するにつれ,  $P(l)$  の分布が右方向へシフトする様子を示している. この傾向は, 図 6(b) における次数分布分散  $\sigma^2$  の収束と整合的である.

さらに, 図 12 は  $\langle l \rangle$  と  $\sigma^2$  の単調減少関係を示している. すなわち,  $\sigma^2$  が小さいほど,  $\langle l \rangle$  は大きい.  $\langle l \rangle$  の増加は, ネットワーク内部により大きな「ホール構造」が存在することを意味するが, これらの大きなループは連結ロバスト性の向上に寄与することが確認された. これは [5] の結論と一致する.

ただし、図中の深紫から赤への遷移点に示されるように、 $\gamma$  の増加に伴い  $\sigma^2$  が収束するため、 $\langle l \rangle$  の成長にも上限が存在する。この現象は、第 3.3 節で示した「 $\gamma > 3.0$  においてロバスト性改善が頭打ちになる」結果と整合する。

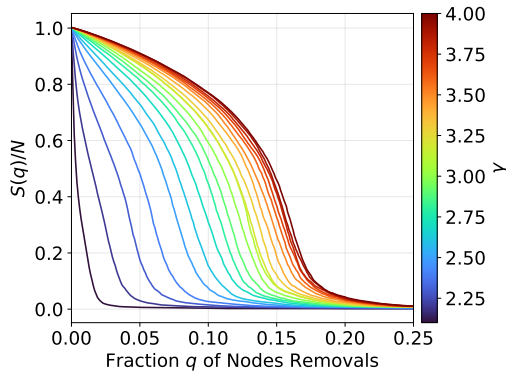
### 3.5 節 本章のまとめ

本章では、平均次数  $\langle k \rangle$  を一定に保った条件下で、べき指数  $\gamma$  が可変なスケールフリーネットワークに対し、3 種の攻撃手法に対する連結ロバスト性を評価した。次数間相関や高次構造に起因する影響を除去するため、本研究ではコンフィギュレーションモデル (configuration model) に基づきランダム化を行い、次数分布  $P(k)$  の効果のみを純粹に検証した。

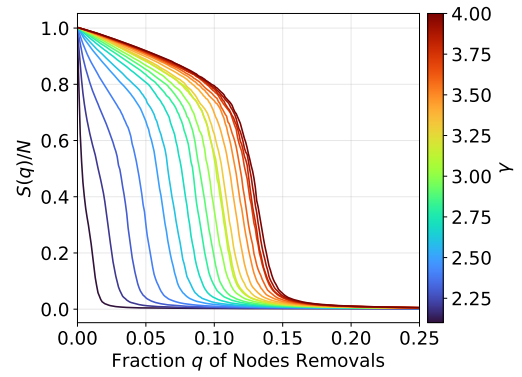
数値結果から、べき指数  $\gamma$  の増加に伴い次数分布  $P(k)$  が狭くなり、ロバスト性指標  $R$  が上昇することが確認された。すなわち、次数分布の分散  $\sigma^2$  が小さいほどネットワークはより安定である。また、最短ループ平均長  $\langle l \rangle$  も  $\gamma$  の増加に伴い長くなり、内部により大きなホール構造が形成される。これらの長いループは、ノード除去時における連結性維持に寄与する。これらの傾向は、スケールフリー、ER、および規則ネットワークにまたがった広義のランダム化ネットワーク族における先行研究 [4, 5] と整合している。

しかしながら、一方で  $\gamma > 3.0$  の領域では、ロバスト性指標  $R$  の増加は次第に飽和する。この飽和は、図 6 に示されたように、次数分布の分散  $\sigma^2$  および最大次数  $k_{\max}$  が非零値に収束することに起因する。すなわち、ハブノードが完全には消失しないため、スケールフリーネットワーク固有の脆弱性は解消されない。

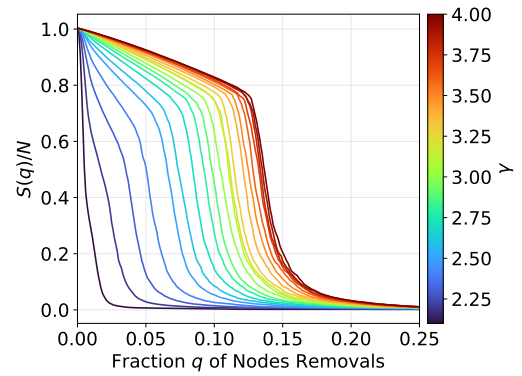
以上より、本章では「次数分布の分散-ループ構造-ロバスト性」の定量的関係を明らかにした。すなわち、 $\sigma^2$  が小さいほど  $\langle l \rangle$  は大きくなり、連結ロバスト性は向上するが、その向上には構造的な上限が存在する。さらなるロバスト性の改善には、ネットワーク構造自体を再設計する接続戦略が必要であり、これについては第 5 章で議論する。



(a) 次数攻撃

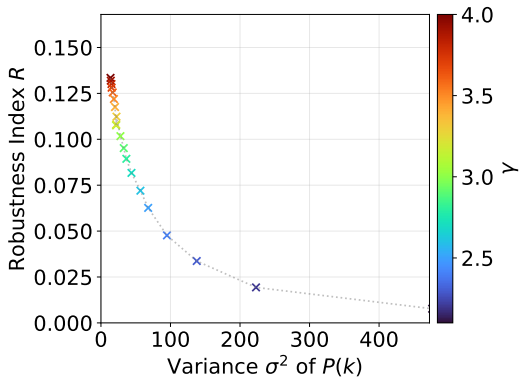


(b) 媒介中心性攻撃

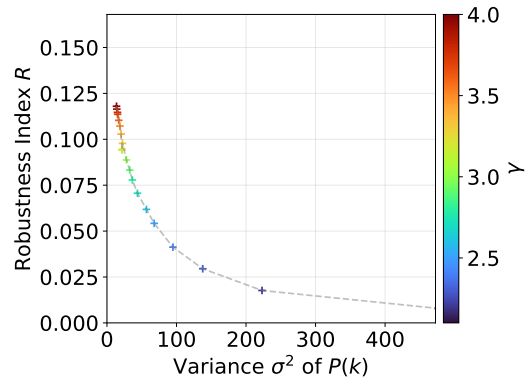


(c) BP 攻撃

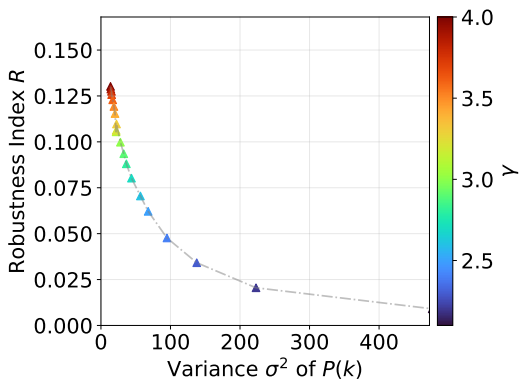
図 8：本図は 3 種類の攻撃下におけるロバスト性曲線  $S(q)/N$  を示す。色付き曲線は深紫から赤へ、べき指数  $\gamma = 2.1$  から  $\gamma = 4.0$  の増加に対応する。各曲線下の面積がロバスト性指標  $R$  に相当する。 $\gamma$  の増加に伴い曲線は右方向に移動し、 $R$  も増大することが分かる。また、 $\gamma > 3.0$  では曲線間隔が縮小し、分散  $\sigma^2$  の収束効果が反映されている。



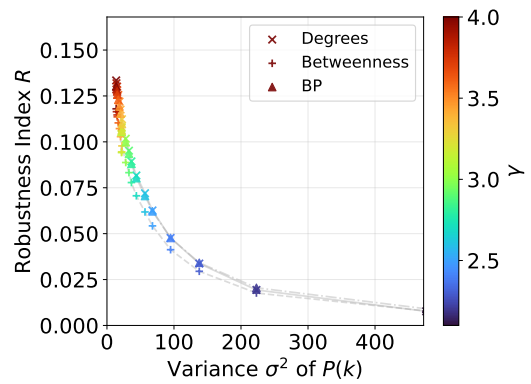
(a) 次数攻撃



(b) 媒介中心性攻撃



(c) BP 攻撃



(d) 三攻撃の比較

図9：本図はランダム化されたスケールフリー・ネットワークにおけるロバスト性指標  $R$  と次数分布の分散  $\sigma^2$  の関係を示す。(a) 次数攻撃, (b) 媒介中心性攻撃, (c) BP 攻撃, (d) 各攻撃手法の比較. 色付き点は深紫から赤へ, べき指数  $\gamma = 2.1$  から  $\gamma = 4.0$  を表す. 一般に,  $\gamma$  の増加に伴い  $R$  は増加するが,  $\gamma > 3$  では  $R$  の増加が頭打ちとなる傾向が見られる.

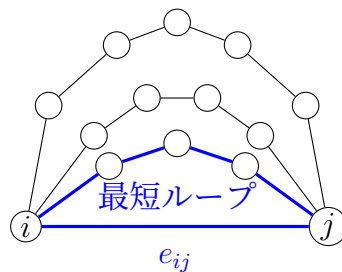


図10：最短ループ（青い線）の模式図. こうしたループは穴を表し, リンク  $e_{ij}$  と, リンク  $e_{ij}$  を除いたネットワーク上でのノード  $i$  と  $j$  の間の最短経路から構成される.

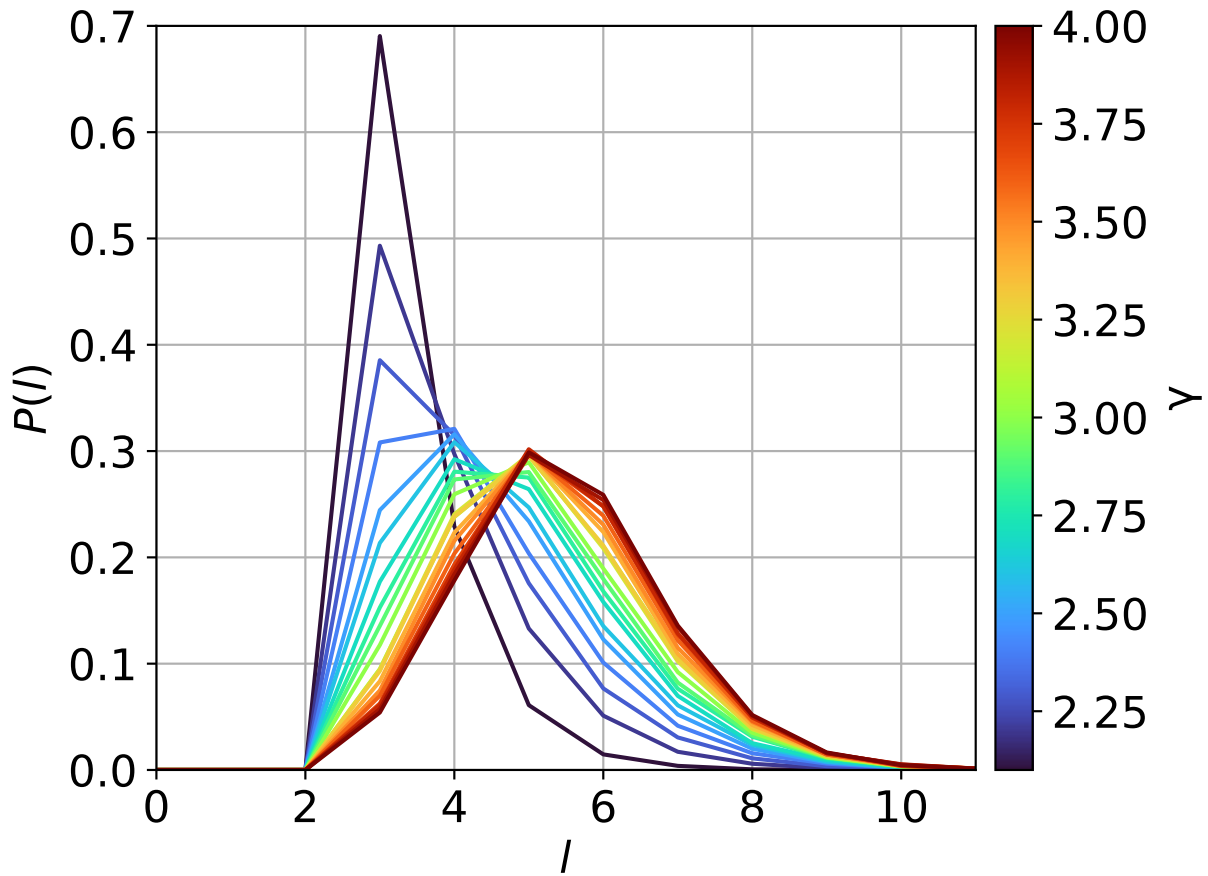


図 11：本図はランダム化されたスケールフリーネットワークにおける最短ループ長の分布  $P(l)$  を示す。色付き曲線は深紫から赤へ、べき指数  $\gamma = 2.1$  から  $\gamma = 4.0$  の増加に対応する。 $\gamma$  の増加に伴い  $P(l)$  全体が右方向へシフトしており、長いループがより多く出現することを示している。

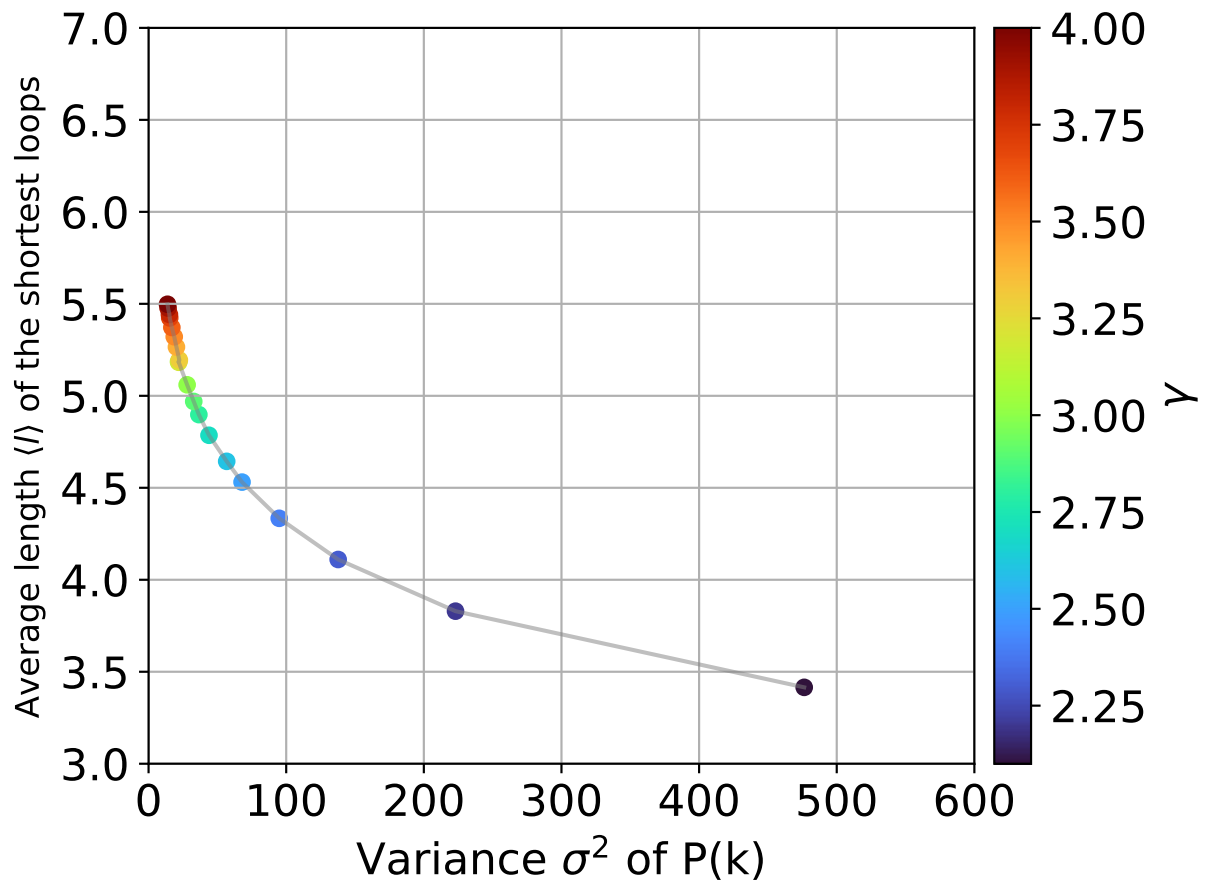


図 12：本図はランダム化されたスケールフリーネットワークにおける最短ループ平均長  $\langle l \rangle$  と次数分布の分散  $\sigma^2$  の単調減少関係を示す。色付き点は深紫から赤へ、べき指数  $\gamma = 2.1$  から  $\gamma = 4.0$  を表す。べき指数  $\gamma$  が増加し、図 6(b) に示されるように  $\sigma^2$  が減少するにつれて、 $\langle l \rangle$  は増加する。

## 第4章 空間ネットワークにおけるロバスト性機構の解析

本章では、第1章で述べた研究目的における、地理的制約を受ける空間ネットワーク (Spatial Networks) の連結ロバスト性を分析する。スケールフリーネットワークとは異なり、空間ネットワークではノード位置とリンク形態が物理的距離や平面構造によって制約され、道路・通信などの実世界インフラに近い連結特性を示す。本章では、このような空間制約を特徴付けるため、相対近傍グラフ (Relative Neighborhood Graph, RNG) と Gabriel グラフ (Gabriel Graph, GG) を用いる。両者はいずれも地理的近傍規則に基づき、短いリンクと平面性を有するネットワーク構造を生成する。また、ノード位置の分布は人口統計データに基づく (Population, Inverse Population, Uniform, および二次元格子分布) ことで、インフラネットワークの構築が都市の人口疎密の影響を受けることを反映する。

数値実験により、空間的に集中したノード分布と短リンク特性が局所コミュニティを形成するメカニズムを明らかにして、このような局所構造がネットワーク全体のロバスト性をどのように低下させるかを示す。結果として、空間制約下におけるネットワークの脆弱性はノードの空間分布の疎密と密接に関連することが分かり、空間制限条件下での実インフラシステムのロバスト性理解に重要な示唆を与える。

### 4.1 節 広く存在するモジュール構造によるネットワークの脆弱化

近年、モジュール構造 (またはコミュニティ構造) がネットワークの連結ロバスト性に与える影響が、異なる次数分布をもつ多様なネットワークにおいて体系的に明らかにされつつある。たとえば、文献 [25] は、モジュール構造を有する  $d$  正則グラフを対象として、モジュラリティ (modularity,  $Q$ ) を制御しながらネットワークのロバスト性を評価した。その結果、モジュラリティの高いネットワークでは、異なるモジュールを結ぶ inter-link (モジュール間リンク) の数が限られるため、攻撃や障害によってこれらのノードが除去されると、ネットワークが急速に分断されることが示された。さらに、適度な再配線操作 (anti-modularization) によって、一部の intra-link (モジュール内リンク) を inter-link に変換することで、モジュラリティ  $Q$  を効果的に低下させ、ネットワークのロバスト性と経路

効率性を同時に向上させることが可能であると報告している。

一方、文献 [26] は、べき乗分布型から正則型まで、異なる次数分布をもつ広範なネットワークを対象として、人工的に強いモジュール構造を付与した場合に生じる普遍的な脆弱化現象を明らかにした。彼らは、次数分布の形式に依らず、モジュラリティ  $Q > 0.8$ 、すなわち強く結合したモジュールをもつネットワークでは、ラプラシアン行列の第二固有値（代数的連結度、 $\mu_2$ ）が急激に低下し、それに伴ってロバストネス指標  $R$  も顕著に減少することを示した。これは、過度に強いモジュール構造がネットワーク全体の拡張性や拡散能力を制限し、大規模な断片化（fragmentation）を誘発することを意味し、この現象は「普遍的脆弱性（universal vulnerability）」と呼ばれている。

本章で扱う空間ネットワークにおける局所コミュニティ（local community）の形成も、このような「モジュール構造による脆弱化」の具体的な一形態として位置づけることができる。すなわち、局所的な高密度結合が過度に発達すると、ネットワークのモジュール化程度が上昇し、結果として全体的なロバスト性が損なわれる。

## 4.2 節 モデル構築とノード分布の設定

空間ネットワーク（Spatial Networks）は、道路交通、通信、エネルギー供給など多様なインフラシステムに広く見られる。この種のネットワークは一般に平面ネットワーク（Planar Network）で近似できることが多い [54]。例えば文献 [55] は、平面性比率  $\phi$  と辺長比率  $\lambda$  という指標を用いて、世界 50 都市の街路ネットワークの平面性を分析している。ここで  $\phi$  は実際の交差点と見かけ上の交差点の比率、 $\lambda$  は平面表現と非平面表現における平均辺長の比を表す。分析の結果、ヨーロッパ（例：フィレンツェ、パリ）や中国（例：西安、広州）の都市は概して高い平面性を示す一方、米国の一部都市（例：ロサンゼルス、ダラス）は平面性が低いことが示された。しかしながら、多くの都市で  $\phi$  と  $\lambda$  は 0.80 を上回り、平面ネットワークモデルが都市街路ネットワーク構造を良好に近似できることが示唆される。同様に、通信ネットワークの一部主幹構造も平面近似が妥当な場合があり、光ファイバー回線はしばしば都市の幹線道路に沿って敷設される。

現実のインフラはしばしば多層的に相互作用して（例えば電力ネットワークと通信

ネットワークの相互依存 [56, 57]) , その影響は無視できない. しかしながら, 本研究の焦点を明確にするため, ここでは単層の空間ネットワークモデルに限定する. この単純化により, ノードの空間配置に起因する局所コミュニティ構造が連結ロバスト性に及ぼす影響を独立に検証できる. 多層ネットワーク間の依存関係とその動学的影響は本研究の範囲を超えるため, 将来の課題とする.

相対近傍グラフ (RNG) は, 日本および米国の都市道路ネットワークの近似に有効であることが報告されている. 具体的には, 日本の主要都市中心部を対象とした解析では, RNG によって実道路辺の約 65% ~ 85% が再現され, 特に格子状道路が卓越する地区において高い一致率が報告されている [58]. また, 米国主要都市を対象とした研究では, RNG と実道路網との一致率が約 70% ~ 90% に達し, デンバーやニューヨークマンハッタンなどの格子状道路に対して特に高い再現性が確認されている [59]. 一方, GG モデル [44] は, 光ファイバー通信やアドホック無線ネットワーク (ad-hoc wireless networks) の近似に広く用いられる. 無線ネットワークでは, 電波の到達範囲がノード間距離に依存すると考えられることから, ネットワークトポロジを unit disk graph (UDG) として表すことが多い. このとき GG は UDG から抽出可能な平面部分グラフであり, UDG が連結であれば  $GG \cap UDG$  も連結性を保持することが示されている [60, 61]. そのため, 平面性を仮定する地理ルーティングやトポロジ制御において, 連結性を維持したままリンクを間引く (spatial thinning) ための標準的な構造として利用される. さらに, GG は局所情報に基づく分散的手続きで構成可能であり [62], 無線ネットワークの実装要請とも整合する.

この平面性は, 物理空間の制約, 建設コストの最適化, および近傍ノードに基づく逐次接続という成長機構に起因する. 空間ネットワークが一般に平面ネットワークで良く近似できることを踏まえ, 本研究では RNG を道路ネットワーク, Gabriel グラフ (GG) を通信ネットワークのモデルとして採用する. RNG は GG の部分グラフであり, 両者はいずれも平面近傍グラフ (planar proximity graphs) に属し, 短リンクかつ局所的な接続という特徴を有する.

コンピューターサイエンスや空間ネットワーク分析には, 他にもドロネー三角形分割 [63],  $k$ -近傍グラフ ( $k$ -NN) [43], ボロノイ図 [64] など様々な近傍グラフが存在するが, 本

研究は GG とその部分グラフである RNG に焦点を当てる。得られた結果は都市道路・通信ネットワークのみならず、電力網、上下水道網、ガスパ網、鉄道網などの広義の平面近傍ネットワークにも適用可能である。

図 13 に示すように、RNG と GG の接続規則はノード間の幾何学的制約に基づく。RNG (図 13(a)) では、二つのノード間の相互レンズ領域 (交差する二円弧の重なり領域：陰影部) に第三のノードが存在しない場合に、両ノードを接続する。GG (図 13(b)) では、二つのノードを直径とする円の内部に他ノードが存在しないときに接続する。したがって、RNG の辺数は GG を超えず、よりスパースな近傍グラフとなる。

空間通信の文脈では、図 14 に二つの基地局間の信号カバレッジ例を示す。青と橙の領域はそれぞれ二つの送信方向における強信号域を表し、中間の重なり領域は干渉域に相当する。干渉域に他の基地局が存在する場合、干渉回避のために当該二基地局間の接続は行わない。ノード間距離はすべてユークリッド距離に基づいて計算する。

都市の人口密度とノード分布には強い相関がある。道路ネットワークでは人口密集地において交差点が多く形成され [41]、通信ネットワークでは十分なカバレッジを維持するために人口密集地により多くの基地局が必要となる [65, 66, 67]。したがって、人口分布は空間ネットワークにおけるノード位置設定の重要な根拠となる。

本研究では、人口密度とノード分布の関係を踏まえて、空間中におけるノード配置の不均一性がネットワーク構造に与える影響を系統的に検討するため、Population (Pop.), Inverse Population (Inv.), Uniform (Uni.), および二次元格子 (Two-Dimensional Lattice, 2DL) の 4 種類のノード配置を設定する (表??参照)。Pop. と Inv. では人口がゼロのエリア (グリッドに分割する) を除外して、ノードはグリッド中心に配置する。Pop. では人口密度の高い順にノードを選択して、アクセス拠点が人口密集域に集中することを表す。逆に、Inv. では人口密度の低い順にノードを選択して、安い土地にノードを配置することで建設コストを抑制する状況を表す。Uni. ではノードを一様ランダムに配置して、上記 2 つの中間状態を表現するが、Poisson 分布により多少の疎密は生じる [68]。そこで、疎密混在を全く含まない参照モデルとして、第 4 のノード分布の二次元格子 (2DL) を導入する。2DL モデルではノードが規則正しく正方格子上に配置され、次数分布  $P(k)$  を揃えた条件で先の 3 種

分布のネットワークとロバスト性を比較できる。

実験領域は  $240\text{km} \times 240\text{km}$  を  $480 \times 480$  のグリッドに分割して、実際の居住人口データを含む各グリッドのサイズは  $500\text{m} \times 500\text{m}$  となる。これは、本研究で用いる人口統計データの公開 [69] では、その空間解像度の最小単位が  $500\text{m} \times 500\text{m}$  に制限されていることによる。

ノード位置を確定した後、図 13 に示した RNG と GG の接続規則に従い、Pop.-based, Inv.-based, Uni.-based の 3 種の空間ネットワークを生成する。これら 3 種類の空間ネットワークに対して、各ノードの次数を保持したまま、ノード位置のみを二次元の規則格子上に再配置することで、対応する 2DL ネットワークを構成する。Pop.-based, Inv.-based, Uni.-based では次数分布がわずかに異なるため、2DL 上では対応する本数のリンクをランダムに割り当てる。ノードの可接続端 (free-end) が近傍ノード間でマッチングできない場合には、二回目の試行としてより遠方のノードとの接続を許容して本数を満たす。なお、この二回目の接続試行を行うと 2DL は厳密な平面性を保持しない点に留意する。

以上のモデル化により、ノード位置 (人口駆動またはランダム生成) とノード間の接続様式 (空間近傍制約に基づく RNG と GG) を組み合わせ、Pop.-based, Inv.-based, Uni.-based, および 2DL の四種の空間ネットワークモデルを構築した。これらのモデルが、本研究における空間ネットワークのロバスト性解析の基盤となる。

ノード配置	概念的意味
Pop.	人口密集地域にノードを集中配置することで、空間中に強い位置的不均一性を導入して、局所的に高密度なノード集団が形成される極端事例を表す。
Inv.	人口希薄地域を優先してノードを配置することで、Pop. とは異なる形態の空間的不均一性を与えて、ノード間距離のばらつきが大きい配置を表す。
Uni.	ノードを一様ランダムに配置するが、所与領域では空間ポアソン点過程に従うため、局所的なノード集中および空隙が自然に生じる。
2DL	ノード間距離が完全に等しい二次元格子配置であり、局所的なノード密度変動を排除した理想的な均一分布を表す。

表 1：人口分布に基づくノード配置戦略の概念的意味

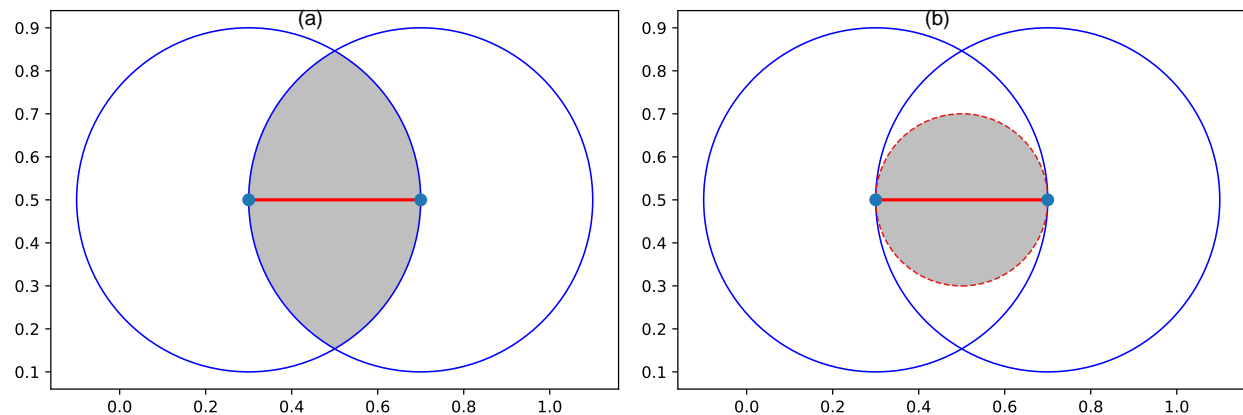


図 13：本図は (a) RNG および (b) GG における接続制約の概念図を示す。陰影領域内に他のノードが存在しない場合、赤色の線分が2つの青色ノード間にリンクとして形成される。

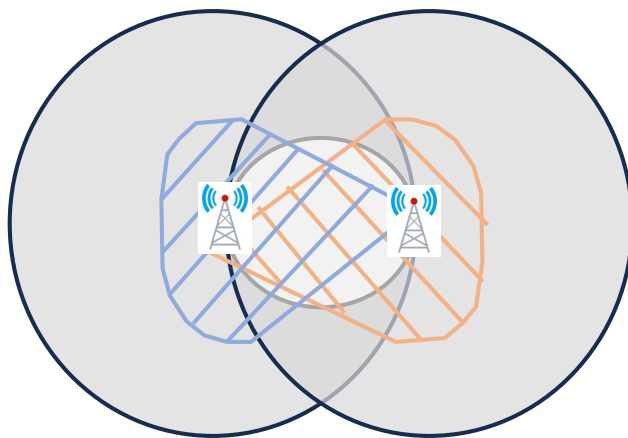


図 14：本図は無線通信における2つの基地局間の電波ビームカバレッジを示す。青色および橙色の陰影領域は強い信号ビームの到達範囲を表す。中央の円形領域は干渉領域を示して、この領域内に別の基地局が存在する場合は、2つの基地局間には接続が形成されない。

### 4.3 節 攻撃手法の概要

現実のインフラシステムにおいては、ネットワークのノードは多様な攪乱の影響を受け得る。例えば、自然災害（地震・洪水）、悪意ある攻撃（通信システムへの侵入、交通ハブの閉鎖）、運用上の故障（交通渋滞や通信過負荷）などである。これらの事象はいずれもノードの機能不全を引き起こして、ネットワーク全体の連結性を損なう可能性がある。本研究では、このような攪乱が構造的ロバスト性に与える影響を模擬するため、代表的な3つのノード除去戦略を採用する。すなわち、再計算する媒介中心性攻撃（Recalculated Betweenness, RB）[20]、初期次数攻撃（Initial Degree, ID）[6]、およびランダム故障（Random Failure, RF）[15]である。

RB 攻撃は、高流量あるいは高い媒介中心性を持つノードに対する標的型破壊を模擬する。例えば、都市道路における最大交通流の交差点や、通信ネットワークで大量の情報伝送を担う中核ノードが該当する。本手法ではノードを一つ除去するたびにネットワークの媒介中心性を再計算して、連結性の変化が以後のノード重要度に与える動的影響を反映する。ID 攻撃はノードの初期の次数に基づいて順位付けして、高次数ノードを優先的に除去することで、多数の接続を持つため負荷が大きく故障しやすいハブの喪失を模擬する。RF 攻撃は非標的型のランダム攪乱（機器故障、局所工事による断線、偶発的切断など）を表して、RB や ID と比較することで、意図的攻撃と偶発故障の差異を際立たせることができる。

上記3戦略では、ノード（およびその接続リンク）を規則に従って逐次除去し、除去割合が  $q/N$  に達するまで繰り返す。ここで  $q$  は除去ノード数、 $N$  は総ノード数である。

なお、上記の静的ノード除去以外にも、学術的にはカスケード故障（Cascading Failures）や局所化攻撃（Localized Attacks, LA）といった動的攪乱モデルが提案されている。カスケード故障は負荷再配分と連鎖崩壊を通じて流量ネットワークの故障伝播を模擬する [70, 71, 72]。局所化攻撃は空間的に限定された領域内の破壊を記述し、影響半径が臨界値を超えると系統的崩壊を誘発し得る [73]。しかしながら、これらは流量閾値や空間半径などの追加仮定を要し、本研究の焦点である静的な構造脆弱性の比較という目的から外れる。ゆえに本稿では RB・ID・RF の3つの静的除去戦略に限定し、動的・空間依存型攻撃

は今後の課題とする.

本節の攻撃手法は, 第2.2章で定義したロバスト性指標  $R$  と臨界閾値  $q_c$  と組み合わせて評価し, 異なる攪乱機構の下で空間ネットワークの連結性がどのように変化するかを明らかにする.

#### 4.4 節 局所コミュニティの形成

本研究で用いる実人口データは, 日本の7地域(福岡, 広島, 京阪圏〔京都-大阪〕, 名古屋, 東京, 仙台, 札幌)とする [69]. 各地域は  $500\text{ m} \times 500\text{ m}$  のグリッドに分割して, 総セル数は  $(8 \times 10 \times 2 \times 3)^2 = 230,400$  である.  $500\text{ m} \times 500\text{ m}$  を採用するのは, 日本の国勢調査における利用可能な最高の空間分解能であるためであり, 全ノードは各グリッドの中心に配置する.

第4.2節で述べたとおり, ノード位置は Pop.-based, Inv.-based, Uni.-based の三方式に基づき  $N$  個を選定する. 後続の二次元格子 (2DL) ネットワークとの比較で  $\sqrt{N}$  を整数に保つため,  $N = 100, 1024, 10000$  とする. ノード間のリンクは図13の RNG と GG の接続規則に従って構成する. この種の空間ネットワークでは, 局所コミュニティ構造が自然に生じる. 本稿では, 局所コミュニティをコミュニティ検出手法で推定されるモジュール構造として定義する.

例えば, 図15aは, 東京地域の RNG に基づくネットワークのコミュニティ分割結果を示す. 青のコミュニティは千代田区や中央区を覆い, 皇居や中央省庁を含む日本の行政・政治中枢に相当する. 緑のコミュニティは南側の港区や品川区へ広がり, これらは高次商業地区や国際交通ハブ(新橋駅・品川駅など)として知られる. この分割は, 近接規則に基づく空間ネットワークにおいて, コミュニティ検出で得られる局所コミュニティが実際の都市機能分区をよく反映していることを示す. すなわち, それは行政区画のみで決まるのではなく, 人口分布と地理的連結性の相互作用により形成される.

コミュニティ構造の強さを測るため, モジュラリティ (modularity)  $Q$  [74] を導入する:

$$Q = \frac{1}{2M} \sum_{ij} \left[ A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2M} \right] \delta(c_i, c_j),$$

ここで  $A_{ij}$  は隣接行列の  $(i, j)$  成分であり, ノード  $i$  と  $j$  の間にリンクがあるとき  $A_{ij} = 1$ , なければ 0 とする.  $k_i, k_j$  はそれぞれノード  $i, j$  の次数,  $M$  は総リンク数,  $c_i$  はノード  $i$  のコミュニティ番号,  $\delta(c_i, c_j)$  は同一コミュニティなら 1, それ以外は 0 を返す指示関数である.

ノードのコミュニティ識別  $c_i$  には広く用いられる Louvain 法 [75, 76, 77] を用いる. 同法は基本的に局所情報 (次数など) のみを利用して, モジュラリティ  $Q$  を最大化することでコミュニティを同定する. ただし  $Q$  は重なり合うコミュニティや階層的構造の検出には適さず [33], その最大化は NP-hard であることが知られている [78]. もっとも, 本研究の目的は厳密な分割ではなく, 異なる空間ネットワーク間でのコミュニティ強度の相对比较である. 補助指標としてスパース性 (sparsity) も分析する. 詳細は次節で述べる.

東京の  $N = 1024$  ノードを例に, Louvain 法で得た典型的なコミュニティ分割を図 15 に示す. 他都市の結果は付録図 37~48 に掲載する. 図 15ab および 16ab は, Pop.-based と Inv.-based のノード分布に対し, RNG と GG の短リンク制約で生成したネットワークのコミュニティ構造を示す. さらに, 図 15cd と 16cd は, RB 攻撃下で 10% のノード (および関連リンク) を除去した後のコミュニティ分割を示す. ノード除去によりネットワークは複数の非連結な部分グラフへと断片化し, とりわけコミュニティ境界で顕著に現れる. この断片化は人口高密度域で最も強く観測される.

表 2 は, 7 地域の原始ネットワークにおける結果を示す. Pop.-based と Inv.-based のいずれでも, モジュラリティ  $Q$  は概して Uni.-based よりわずかに高い. 二次元格子 (2DL) においても, 多くの場合で Pop.-based と Inv.-based の  $Q$  は Uni.-based より高いが, 例外もある. すなわち, RNG に基づく Pop.-based ネットワークでは,  $Q$  が Uni.-based をやや下回る (付表 17 のコミュニティ数を参照). この  $Q$  の序列 (Pop.-based / Inv.-based Uni.-based) は, ネットワーク規模が  $N = 100, 1024, 10000$  と異なっても概ね現れる (付録 12, 13 参照). 両者の差異は, Pop.-based と Inv.-based ではノードの空間的集積効果が働き, 局所コミュニティがわずかに強くなるためである. Uni.-based の  $Q$  は前二者よりやや低いものの, コミュニティ構造自体は明確に維持される. 第 4.2 節で述べた空間点過程 (SPP) 理論により, Uni.-based でも局所的な疎密が自然発生し, コミュニティ形成を促すためである.

さらに, 同一の次数分布条件を保ったまま Pop.-based を二次元格子 (2DL) へ写像す

ると, そのモジュラリティ  $Q$  は RNG に基づく Inv.-based や Uni.-based より小さくなる. これは, 格子上では Pop.-based, Inv.-based, Uni.-based のノード空間密度差が弱まり, 元来のコミュニティ構造が相対的に減衰するためである. 次数分布が連結ロバスト性に与える影響については, 後続の節で詳述する.

Cities	Original				2D lattice			
	RNG		GG		RNG		GG	
	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,
Fukuoka	0.8905 $\Delta$	0.8953 $\Delta$	0.8728 $\Delta$	0.8857 $\Delta$	0.8726 $\Delta$	<b>0.8298</b>	0.7677 $\Delta$	0.8269 $\Delta$
Hiroshima	0.8866 $\Delta$	0.8993 $\Delta$	0.8717 $\Delta$	0.8898 $\Delta$	0.8704 $\Delta$	<b>0.8332</b>	0.7662 $\Delta$	0.8203 $\Delta$
Keihan	0.8903 $\Delta$	0.8924 $\Delta$	0.8651 $\Delta$	0.8777 $\Delta$	0.8693 $\Delta$	<b>0.8302</b>	0.7756 $\Delta$	0.8149 $\Delta$
Nagoya	0.8880 $\Delta$	0.8929 $\Delta$	0.8612 $\Delta$	0.8764 $\Delta$	0.8807 $\Delta$	<b>0.8408</b>	0.7744 $\Delta$	0.8158 $\Delta$
Tokyo	0.8846 $\Delta$	0.8814 $\Delta$	0.8615 $\Delta$	0.8610 $\Delta$	<b>0.8644</b>	<b>0.8301</b>	0.7548 $\Delta$	0.8177 $\Delta$
Sendai	0.8853 $\Delta$	0.8908 $\Delta$	0.8612 $\Delta$	0.8801 $\Delta$	0.8653 $\Delta$	<b>0.8387</b>	0.7648 $\Delta$	0.8184 $\Delta$
Sapporo	0.9017 $\Delta$	0.8775 $\Delta$	0.8875 $\Delta$	0.8722 $\Delta$	0.8745 $\Delta$	<b>0.8187</b>	0.7863 $\Delta$	0.8144 $\Delta$
Uniform	0.8735		0.8557		0.8649		0.7450	

表 2: 1024 ノードを含むネットワークにおける日本の主要 7 地域のモジュラリティ  $Q$ . 元のネットワークと 2 次元格子 (2D lattice) ネットワークの結果を比較する. 元のネットワークと, ノードを 2D 格子上に再配置したネットワークにおけるモジュラリティ  $Q$  の比較. 値が大きいほど, より強いコミュニティ構造を示す. 上付きの三角記号 ( $\Delta$ ) は, Pop.-based または Inv.-based に基づくネットワークが, RNG および GG のいずれにおいても Uni.-based のネットワークより高いモジュラリティを示すことを表す. 太字は対応するモジュラリティが Uni.-based ネットワークより低いことを示す.

#### 4.5 節 再計算媒介中心性攻撃に対する連結ロバスト性

複雑ネットワークにおいて連結ロバスト性は, 第 4.3 節で述べた RB・ID・RF などの意図的攻撃あるいはランダム故障を受けた際に, ネットワークが機能を維持する能力を定量化する上で極めて重要である. 本研究では評価指標として, ロバスト性指数  $R$  [49] と臨界割合  $q_c$  [16] を用いる. ロバスト性指数  $R$  は, 最大連結成分 (LCC) の相対規模  $S^{1st}(q)/N$  がノード除去率  $q$  に応じて変化する曲線下面積として定義され,  $R$  が大きいほどネットワーク全体の連結ロバスト性が高いことを示す. 一方, 臨界割合  $q_c$  は, 第二最大連結成分の相対規模  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点に対応する  $q$  として定義され, ネットワーク構造が

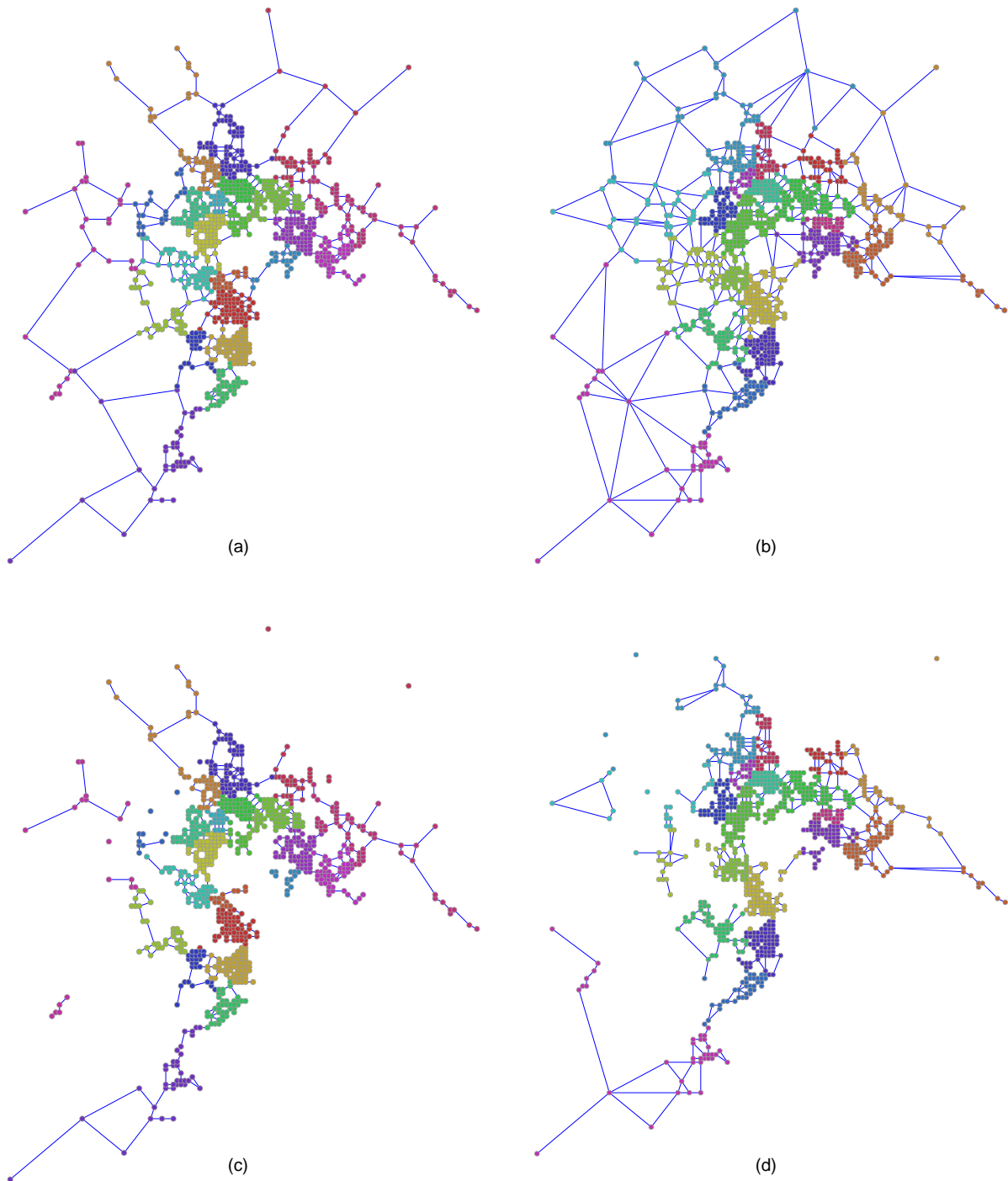


図 15：本図は東京地域におけるコミュニティ構造の可視化結果を示す．（左）RNG，（右）GG．(a)(b) は元のネットワーク，(c)(d) はノードを 10% 除去した後のネットワークである．ネットワークは  $N = 1024$  のノードから構成され，ノードは人口値の降順（Pop.-based）で配置されている．RNG は GG の部分グラフであることに注意する．Louvain 法により検出されたコミュニティは赤・黄・緑・青の 4 色で区別される．各図は 2 次元ユークリッド平面上の空間ネットワークを表し，ノード位置は  $500\text{m} \times 500\text{m}$  の人口メッシュ重心に対応する．横軸および縦軸はこれら重心位置に基づいて算出された平面距離を表す．

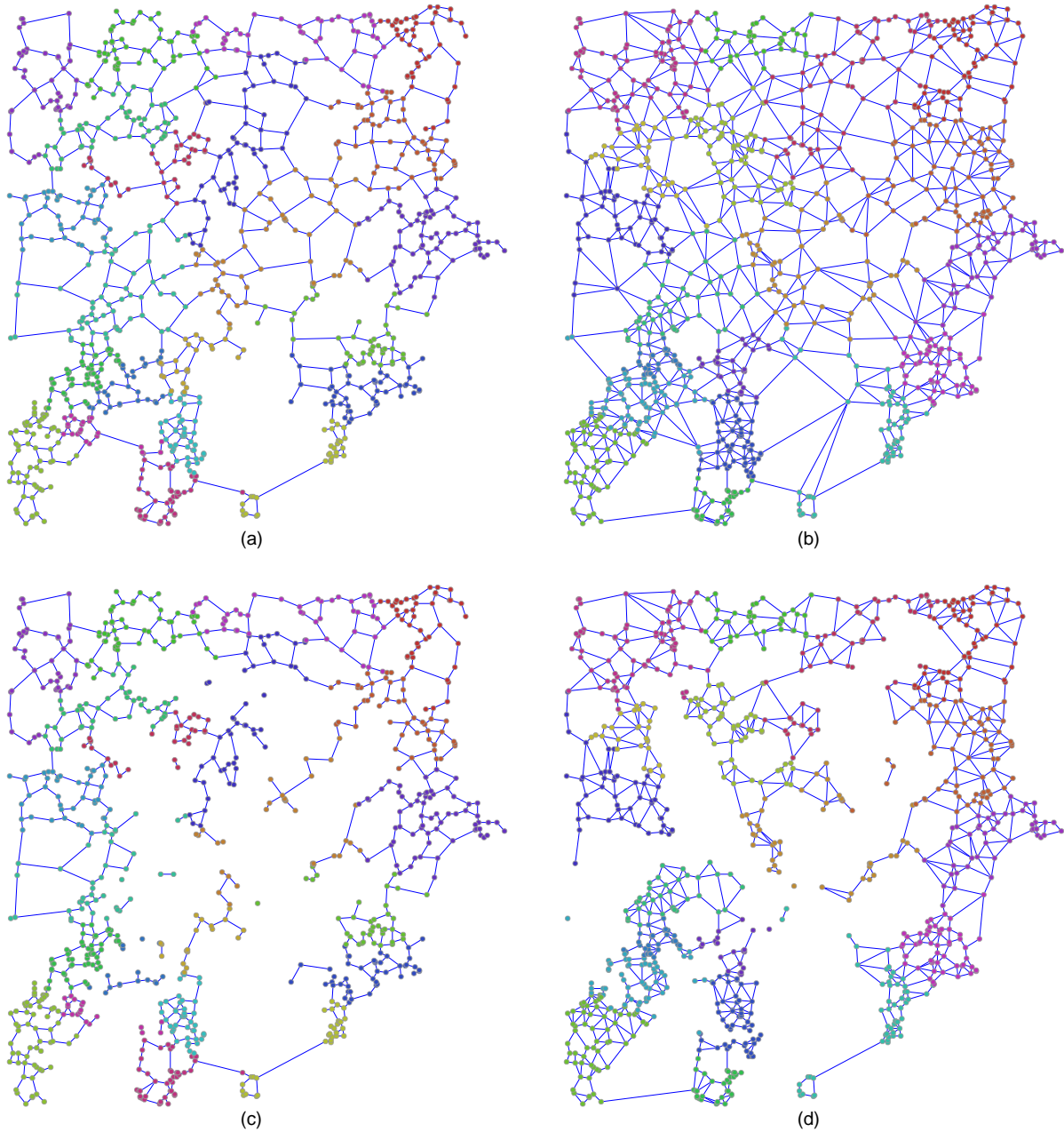


図 16：本図は東京地域におけるコミュニティ構造の可視化結果を示す．（左）RNG，（右）GG．(a)(b) は元のネットワーク，(c)(d) はノードを 10% 除去した後のネットワークである．ネットワークは  $N = 1024$  のノードから構成され，ノードは人口値の逆順（Inv.-based）で配置されている．RNG は GG の部分グラフであることに注意する．Louvain 法により検出されたコミュニティは赤・黄・緑・青の 4 色で区別される．各図は 2 次元ユークリッド平面上の空間ネットワークを表し，ノード位置は  $500\text{m} \times 500\text{m}$  の人口メッシュ重心に対応する．横軸および縦軸はこれら重心位置に基づいて算出された平面距離を表す．

急激に断片化する臨界点を表す。  $q_c$  が大きいほど、顕著な断裂が生じる前により多くのノード除去に耐えられることを意味する。

しかしながら、同一の  $q_c$  を示す場合でも、  $S^{1st}(q)/N$  の減少過程（急激か漸進的か）が異なることにより  $R$  の値は変化し得るため、  $R$  はより精緻なロバスト性指標となる。これら2つの指標を併用することで、攻撃下におけるネットワークの「持続強度」と「破断点」の双方を観察することが可能となる。

コミュニティ構造が連結ロバスト性に与える影響を理解するために、我々は元のネットワーク（三角形マーカー）と二次元格子（2D lattice）ネットワーク（×マーカー）を比較する。2D格子ネットワークは、元のネットワークのノード位置を二次元格子点上に再配置することで空間的集中効果を除去しつつ、次数分布は保持したまま構成したものである。比較は、日本国内の7地域における Pop.-based（緑・黄）、Inv.-based（赤・マゼンタ）、Uni.-based（青・シアン）の3種類のノード配置に対して行った。

図17に示すように、これらのネットワークにおいて、RB攻撃に対するロバスト性指数  $R^{RB}$  はモジュラリティ  $Q$  と明確な単調減少関係を示す。GGモデルおよびRNGモデルのいずれにおいても、Uni.-basedネットワークと比較して、元のPop.-basedおよびInv.-basedネットワークはより高い  $Q$  とより低い  $R^{RB}$  を示す（緑・赤・青の三角形の比較）。この結果は、図18に示されるように、次数分布  $P(k)$  の差異が小さいにもかかわらず、Pop.-based, Inv.-based, Uni.-based間においてノードの空間集中度が異なることによるものである。

さらに、同一の次数分布を維持したまま、各ノード配置（Pop.-based, Inv.-based, Uni.-based）における元のネットワークと2D格子ネットワークを比較すると、2D格子ネットワーク（黄・マゼンタ・シアン×）は元のネットワーク（緑・赤・青の三角形）よりも低い  $Q$  と高い  $R^{RB}$  を示す。これはノードの再配置と長距離再結線によりコミュニティ構造が弱まり、結果として  $R^{RB}$  が向上したためである。ただし、各地域の元のネットワークと2D格子ネットワークにおいては、図18に示すように  $P(k)$  の微細な差異に起因するPop.-basedおよびInv.-basedの小さな変動が存在する。

一つの例外としてRNGでは、2D格子ネットワークにおける  $Q$  が Pop.-based < Uni.-

based < Inv.-based の順序を示し,  $R^{RB}$  はその逆順を示す. この異常は  $P(k)$  のわずかな差異による可能性がある.

以上を総合すると,  $Q$  が高い (すなわちコミュニティが強い) ほど空間ネットワークは脆弱であることがわかる. その根本原因は, コミュニティ間を横断する連結辺が少ないことにあり (特に RB 攻撃では, これら「橋」の端点が選択的に攻撃される), ネットワークが断裂しやすくなるためである. 付録の図 86 および 87 は,  $N = 100$  および  $N = 10000$  のネットワークにおいても同様の関係が成立することを示している.

次に, 「なぜコミュニティが強くなると連結ロバスト性が低下するのか」を明確化するため, 本研究では, 第2.2.3節で定義した疎密度指数 (Sparsity Index,  $SI(G_w)$ ) [1, 50] に着目する. 本研究の空間ネットワーク  $G_w$  では, 各リンクの重み  $w_{ij}$  をノード  $i$  と  $j$  のユークリッド距離 (空間的な距離) として定義しており,  $SI(G_w)$  はこのリンク長 (重み) の分布の不均衡性, すなわち空間上のリンク配置の疎密度を定量的に表す指標である. モジュラリティ  $Q$  がトポロジ的な観点からコミュニティ構造の強さを評価するのに対し,  $SI(G_w)$  は空間幾何的な観点からネットワーク全体のリンク配置を評価する, 強いコミュニティ構造をもつ空間ネットワークでは, ノードが局所的に密集し, コミュニティ間を結ぶ空間的長距離リンクが少なくなる傾向がある. これにより, リンク長分布の偏りが大きくなり,  $SI(G_w)$  の値が増加する, これらの長距離リンクは通常, ネットワーク全体の連結性を維持する「橋渡し」として機能するため, それらが除去されるとネットワークは急速に分断され, 連結ロバスト性が低下する, したがって,  $Q$  は「コミュニティ分割の強度」を示し,  $SI(G_w)$  は「空間的なリンクの疎密度」を示すものであり, 両者は異なる側面からネットワーク構造を補完的に捉えることができる, 本節では, これら二つの指標の関係を分析し, 空間的な疎密度が連結ロバスト性低下にどのように寄与しているかを明らかにする.

図 19 は, RNG および GG において,  $R^{RB}$  が  $SI(G_w)$  に対して単調減少することを示している. 言い換えれば, 空間的疎密度指数  $SI(G_w)$  が高いネットワークほど, ロバスト性指数  $R^{RB}$  は低くなる. すべての RB 攻撃条件においてピアソン相関係数は  $r < 0$  を満たし, 上述の単調減少関係を支持している (付録表 19 を参照). 図中の青・赤・緑の点は, それぞれ日本の 7 地域における Uni.-based, Inv.-based, Pop.-based ネットワークを表す. ここ

で注意すべき点は、縦軸の  $R^{RB}$  の変動範囲が比較的狭い一方で、横軸の  $SI(G_w)$  の変動範囲は広いことである。これは、Pop.-based ネットワークでは、多くのノードが都市域に集中しているものの、一部のノードが都市外縁部に位置しており、これら遠方ノードが都市域と長距離リンクによって接続されるためである。その結果、総リンク重み  $T_1$  が大きくなり、 $SI(G_w)$  が増大する。一方、Inv.-based ネットワークでは、ノード配置が Pop.-based よりも均一であるため（図 15ab および 16ab の比較参照）、長距離リンクが少なく、 $T_1$  および  $SI(G_w)$  はより低い。Uni.-based ネットワークは最も均一なノード配置を持ち、Pop.-based および Inv.-based と比較して最も低い  $T_1$  と  $SI(G_w)$  を示す。

図 17 では、より高いモジュラリティ  $Q$  がより低いロバスト性指数  $R$  と対応することが確認できる。同様に、図 19 は、空間的疎密度指数  $SI(G_w)$  が高いネットワークほど  $R$  が低い傾向を示す。これは  $SI(G_w)$  と  $Q$  の間に関連性が存在する可能性を示唆する。そこで我々は両者の関係をさらに調べた。その結果を図 20 に示す、緑・赤・青の点はそれぞれ、日本の 7 地域における  $N = 1024$  の Pop.-based, Inv.-based, Uni.-based ネットワークを示す。結果として、 $SI(G_w)$  と  $Q$  の間には明確な単調増加関係が見られた。すなわち、 $SI(G_w)$  が高いネットワークほど  $Q$  も高い。RNG および GG におけるピアソン相関検定はこの関係を有意に支持している（付録表 20 を参照）。なお、横軸（ $SI(G_w)$ ）と縦軸（ $Q$ ）のスケール範囲は大きく異なり、 $SI(G_w)$  は広い範囲に分布する一方、 $Q$  の変動範囲は狭い点に注意が必要である。特に注目すべき点は、 $SI(G_w)$  が Pop.-based > Inv.-based > Uni.-based の順序を示し、 $Q$  もほぼ同様の高低関係を示すことである。この  $SI(G_w)$  の並びは、前述のノード位置配置の差異を反映するものである（図 19 の議論参照）。

さらに、東京地域の  $N = 1024$  ネットワークを例に、コミュニティ構造がどのように連結ロバスト性を低下させるかを検討する。結果として、ノードの空間集中は強いコミュニティ構造を形成し、それがロバスト性を低下させることが示された。図 21 および図 22 において、ランダム化ネットワークおよび 2D 格子ネットワークの曲線は、いずれも元のネットワークと比較して右方向に移動しており、これはロバスト性が向上していることを意味する。 $S^{2nd}(q)/N$  が  $q_c$  で最大となるとき、対応する  $S^{1st}(q)/N$  は急速に低下する。以下では、 $R$  を  $S^{1st}(q)/N$  の曲線下面積、 $q_c$  を  $S^{2nd}(q)/N$  のピーク位置として、より詳細な比較

を行う。

図 21 は、同一の次数分布  $P(k)$  を保ったまま、原始ネットワーク (Pop.-based, Inv.-based, Uni.-based のノード配置) とランダム化ネットワークのロバスト性を比較したものである。RNG (図 21ac) と GG (図 21bd) を比較すると、同一の色と線型において GG の曲線は全体的に RNG より右側に位置しており、GG の方がより高いロバスト性を有することが分かる。これは、 $S^{1st}(q)/N$  の曲線下面積がより大きい ( $R$  が高い)、かつ  $S^{2nd}(q)/N$  のピークがより遅く現れる ( $q_c$  が高い) ことに対応する。

コミュニティ構造が連結ロバスト性に与える影響を検討するため、図 21a-d において、原始ネットワーク (RGB 実線) とそのランダム化ネットワーク (RGB 破線) を比較する。図 18 に示されるように、三種のノード配置 (Pop.-based, Inv.-based, Uni.-based) における原始ネットワークは、いずれもピークが  $k = 2$  から  $k = 4$  付近にある鐘形の次数分布を示す。この鐘形分布は、高度にハブを持つスケールフリーネットワーク (SF) とは異なる。SF ネットワークでは、優先的接続によりノード間の経路長を最小化する傾向がある [79]。一方、本研究で扱うネットワークは RNG および GG といった近傍グラフに基づいて構成され、ノードは空間的に近いノードとのみ接続され、長距離のショートカットは存在しない。また、平面グラフにおいてノードの次数には上限があり、多くの場合 6 を超えないことが知られている [54, page 10]。したがって、次数分布は制約され、SF ネットワークに見られる重い裾の分布ではなく、より鐘形に近いものとなる。

図 21 において、緑および赤の破線 (ランダム化された Inv.-based ネットワーク) は、対応する実線 (元の Pop.-based および Inv.-based ネットワーク) より右側へ移動しており、コミュニティが弱まることでロバスト性が向上したことを示す。同様に、青の破線 (ランダム化された Uni.-based ネットワーク) も元の青実線と比較してロバスト性が高い。各サブ図 a-d の元のネットワーク (RGB 実線) を見ると、緑 (Pop.-based) および赤 (Inv.-based) の曲線は、全体的に青 (Uni.-based) の曲線より左側に位置し、Uni.-based ネットワークがより高いロバスト性を有することが示される。これらの比較結果は一貫して、「コミュニティ構造が強い (モジュラリティ  $Q$  が高い) ほどロバスト性が低い」ことを示している (表 2 の原始ネットワークとランダム化ネットワークの  $Q$  の差異も参照)。言い換えれば、

コミュニティ間リンクが少ないことが潜在的な脆弱性を生む。

ただし、ランダム化ネットワークではこの関係が一部複雑になる場合がある。RNGにおいて（図 21a）、緑破線（ランダム化 Pop.-based）のロバスト性は青破線（ランダム化 Uni.-based）より高く、赤破線（ランダム化 Inv.-based）は低い。一方、GG（図 21b）では、緑破線および赤破線はいずれも青破線より低い。RNG のランダム化ネットワークを除けば、これらの結果は概ね「より均一なノード配置がロバスト性を向上させる」ことを示している（図 21ab 参照）。

図 22 は、同一の次数分布  $P(k)$  を保ったまま、原始ネットワーク（Pop.-based, Inv.-based, Uni.-based）のノードを二次元格子に再配置した場合のロバスト性を比較したものである。この比較は、ノードの空間集中が連結ロバスト性に与える影響を評価することを目的とする。図 22 a-d に示されるように、シアン実線（2DL-Uni.）は青実線（Ori-Uni.）よりロバスト性が高く、これは  $S^{1st}(q)/N$  の曲線下面積が大きい（ $R$  が高い）ことと、 $S^{2nd}(q)/N$  のピークがより遅く現れる（ $q_c$  が高い）ことに対応する。同様のロバスト性向上は、黄実線（2DL-Pop.）と緑実線（Ori-Pop.）、およびマゼンタ実線（2DL-Inv.）と赤実線（Ori-Inv.）の比較にも見られる。これらの結果から、ロバスト性とコミュニティ強度の間には明確な階層関係が存在することがわかる：原始ネットワークではコミュニティが強く、2DL ネットワークではコミュニティが弱い（表 2 を参照）。

また、RNG における Pop.-based（太線）は Uni.-based より低いモジュラリティ  $Q$  を示すが、これは Pop.-based ネットワークが Uni.-based より集中した次数分布を持つためである可能性がある。

図 21 および図 22 を総合すると、コミュニティ構造を含まないランダム化ネットワーク（RGB 破線）が最も高いロバスト性を示し、次に二次元格子ネットワーク（青-黄-マゼンタ, CYM 実線）、そして強いコミュニティを持つ原始ネットワーク（RGB 実線）が最も低いロバスト性を示す。例えば、青破線（Randomized Uni.）は青実線（Ori-Uni.）より高いロバスト性を持ち、シアン実線はさらに青実線（Ori-Uni.）よりも高いロバスト性を示す。同様の関係は、緑実線と黄破線（Pop.-based）、赤実線とマゼンタ破線（Inv.-based）の比較にも見られる。これらの比較結果は、ノード配置をより均一化することでコミュニテ

ィ構造が弱まり、ロバスト性が向上することを示している（CYM 実線が原始ネットワークより右側に移動することとして観察される）。総じて、コミュニティ構造が弱い空間ネットワークは、RB 攻撃に対してより高いロバスト性を示す。

さらに、我々は IBM SPSS [80] の単要因分散分析（one-way ANOVA）[81, 82] を用いて、RNG および GG における三種のノード配置（Pop.-based, Inv.-based, Uni.-based）に対するロバスト性指数  $R^{RB}$  および臨界割合  $q_c^{RB}$  の差異について有意性検定を行った。結果は付録表 14 に示されており、Uni.-based ネットワークは、他のネットワークと比較してモジュラリティ  $Q$  および疎密度指数  $SI(G_w)$  が低い（図 20 参照）ため、連結ロバスト性において統計的に有意に優れていることが明らかとなった。

#### 4.6 節 初期次数攻撃およびランダム故障に対する連結ロバスト性

本節では、ネットワークが典型的な初期次数（Initial Degree, ID）攻撃およびランダム故障（Random Failures, RF）を受けた場合の連結ロバスト性についてさらに考察する。Uni.-based ネットワークに関しては、その  $q_c$  の値が解析的結果とほぼ一致することが確認できる [83]（表 3 および表 4 を参照）。表 3 には ID 攻撃に対するロバスト性指数  $R$  と臨界割合  $q_c$  を、表 4 には RF に対する対応する  $R$  と  $q_c$  を示す。

注目すべき点として、攻撃戦略の違いによってロバスト性の挙動には明確な階層関係が存在する：

$$R^{RB} < R^{ID} < R^{RF} \quad \text{かつ} \quad q_c^{RB} < q_c^{ID} < q_c^{RF},$$

より詳細な比較については付録表 8 を参照されたい。

ID および RF のいずれの状況においても、少数の例外を除けば、Pop.-based および Inv.-based ネットワークの  $R$  および  $q_c$  は一般に Uni.-based ネットワークより低く、この傾向は RB 攻撃下で得られた結果と一致する。一方で、表 3 および表 4 中で上向き三角記号（ $\Delta$ ）が付された値が示すように、特定の条件下では Pop.-based および Inv.-based ネットワークのロバスト性が Uni.-based ネットワークを上回る場合も存在する。

また、IBM SPSS [80] による単要因分散分析（one-way ANOVA）[81, 82] によっても、空間ノード配置に基づくネットワークにおける RB 攻撃下の大多数の結果において、有意な

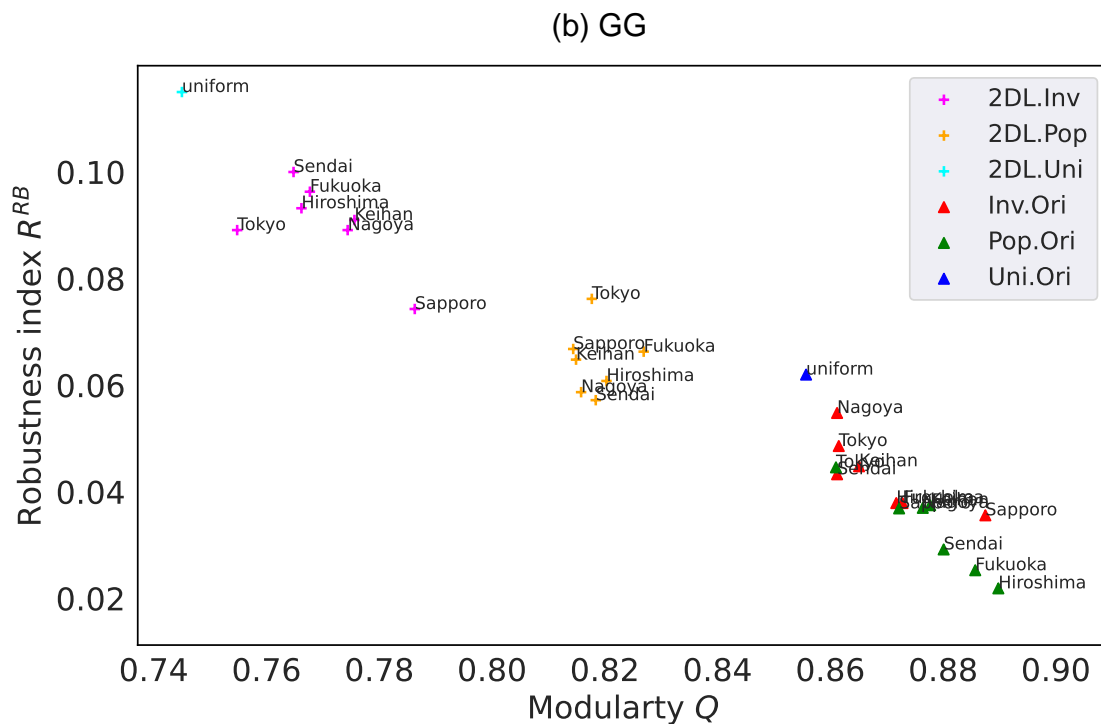
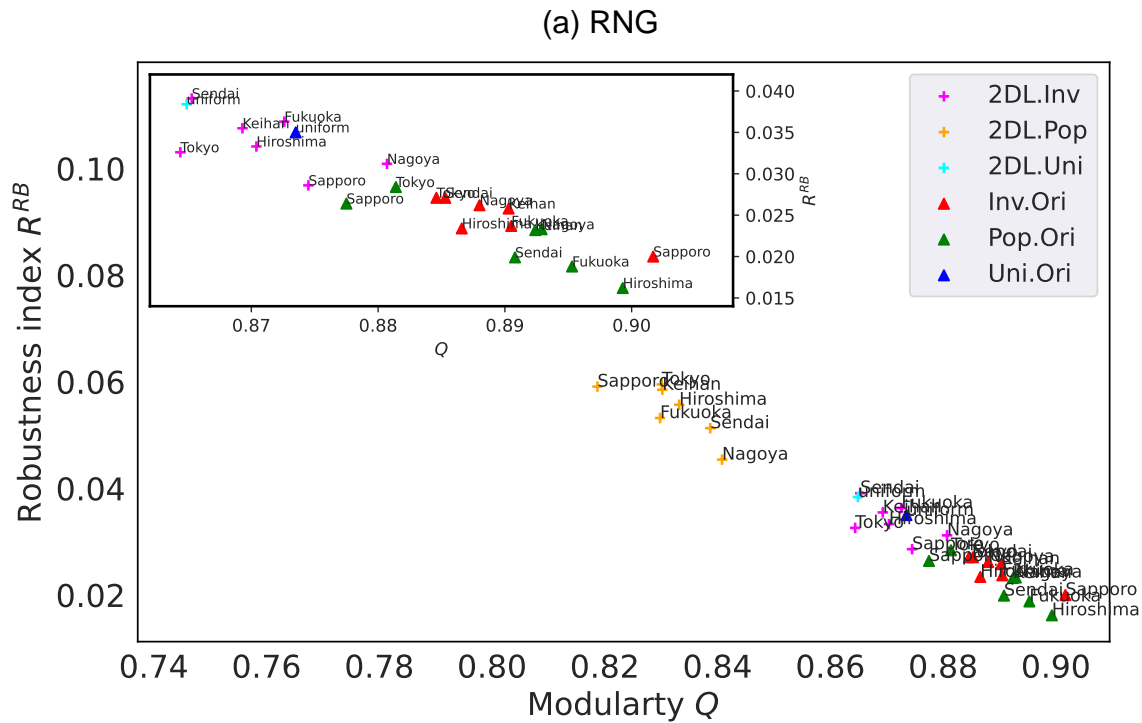


図 17：本図は日本の 7 地域における  $N = 1024$  ノードのネットワークに対し、モジュラリティ  $Q$  とロバスト性指標  $R^{RB}$  (RB 攻撃下) の関係を示す. (a) RNG および (b) GG ネットワークにおいて、各点は元のネットワーク (三角形) および 2 次元格子に再配置したネットワーク (十字形) の  $R^{RB}$  と  $Q$  を表す. ノード位置は Pop.-based (緑/黄), Inv.-based (赤/マゼンタ), Uni.-based (青/シアン) に基づいて生成されている. (a) の挿入図は右下領域の高密度部分を拡大したものである.

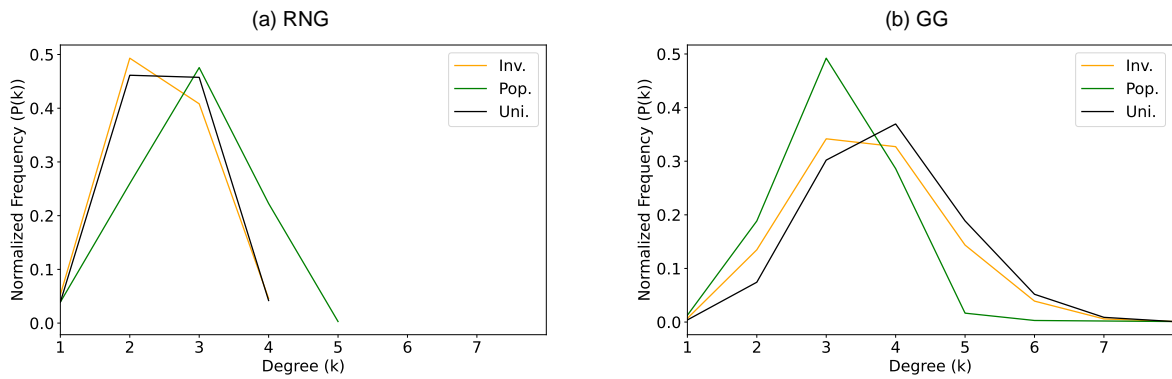


図 18：本図は東京地域の元のネットワークにおける次数分布  $P(k)$  を示す ( $N = 1024$ ) . ノード位置は Pop.-based, Inv.-based, Uni.-based の 3 種類の分布に基づく. いずれの場合も  $P(k)$  は鐘形の分布を呈し, ピークは概ね  $k = 2$  から  $k = 4$  の範囲に位置する.

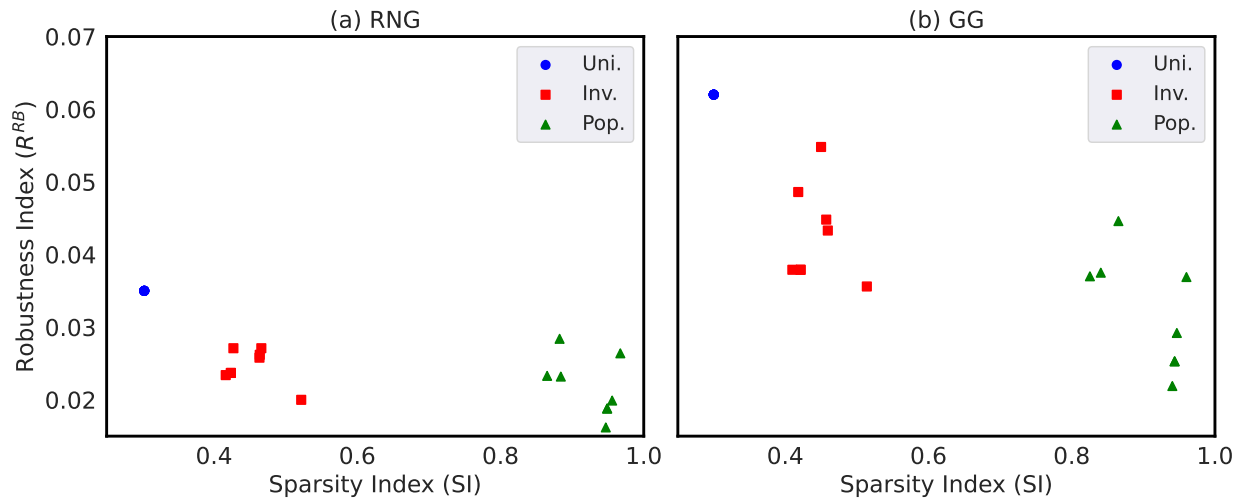


図 19：本図は日本の 7 地域における  $N = 1024$  ノードのネットワークに対し, ロバスト性指標  $R^{RB}$  と稀疏性指数  $SI(G_w)$  の関係を示す. (a) RNG および (b) GG の結果は, Pop.-based (緑), Inv.-based (赤), Uni.-based (青) に基づくノード配置の場合をそれぞれ表す. 色付き点は明瞭な単調減少傾向を示し, 稀疏性指数  $SI(G_w)$  が大きいネットワークほどロバスト性指標  $R^{RB}$  が低くなることを示している. 縦軸 ( $R^{RB}$ ) の変動範囲は比較的狭い一方で, 横軸 ( $SI(G_w)$ ) の変動範囲はより広いことに留意されたい.

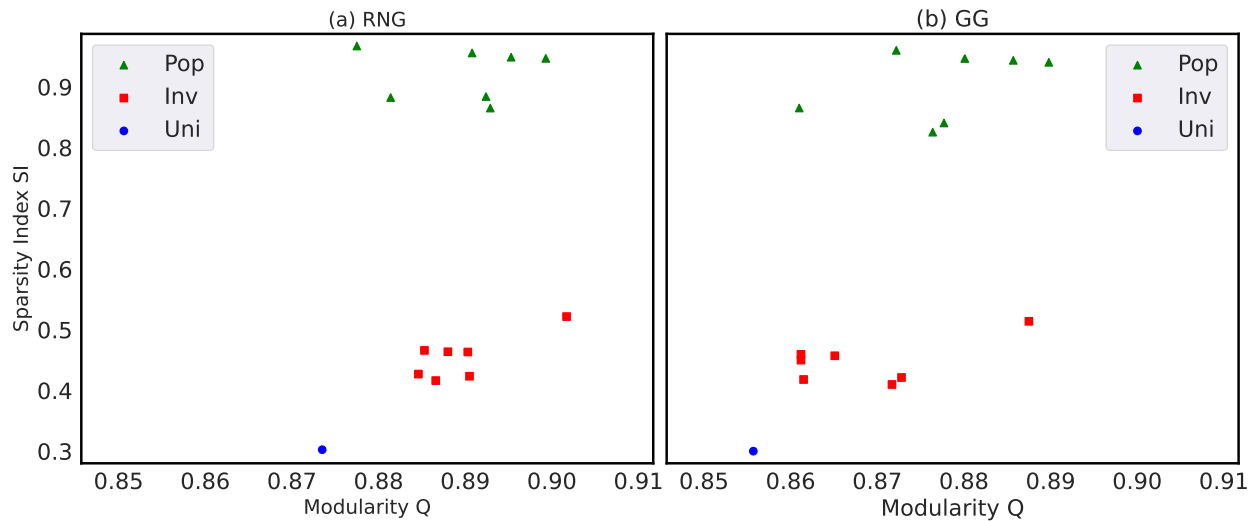


図 20：本図は日本の 7 地域における  $N = 1024$  ノードのネットワークに対し、稀疏性指数  $SI(G_w)$  とモジュラリティ  $Q$  の関係を示す。(a) RNG および (b) GG の結果は、Pop.-based (緑の三角形)、Inv.-based (赤の四角形)、Uni.-based (青の円) に基づくノード配置の場合をそれぞれ表す。色付き点は明瞭な単調増加傾向を示し、空間的稀疏性指数  $SI(G_w)$  が高いネットワークほどモジュラリティ  $Q$  が高い傾向にあることが分かる。Pop. に基づくネットワーク (緑の三角形) は、都市中心部と周縁部の間に長距離接続が存在するため  $SI$  が最大となる。一方、Uni. に基づくネットワーク (青の円) はノード配置が均一であるため  $SI$  が最小となる。なお、縦軸と横軸のスケール差が大きいため、縦方向の差異は相対的に小さいことに留意されたい。

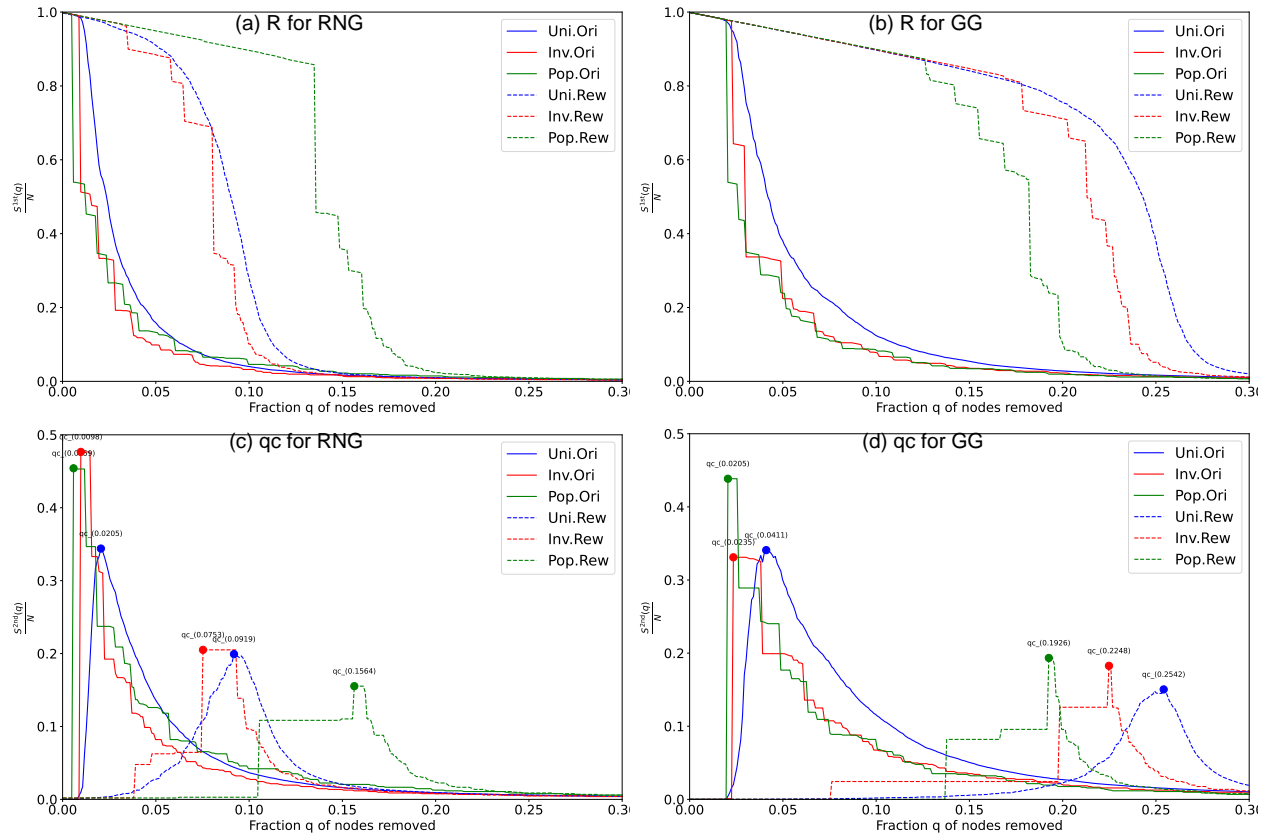


図 21：本図は東京地域における  $N = 1024$  ノードのネットワークに対し、再計算媒介中心性（RB）攻撃下でのロバスト性分析を示す。再配線（ランダム化ネットワーク）においては、元の次数分布が保持されている。評価指標として、(a)(b) 最大連結成分の相対規模  $S^{1st}(q)/N$  と、(c)(d) 第 2 連結成分の相対規模  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点の臨界割合  $q_c$  を用いる。

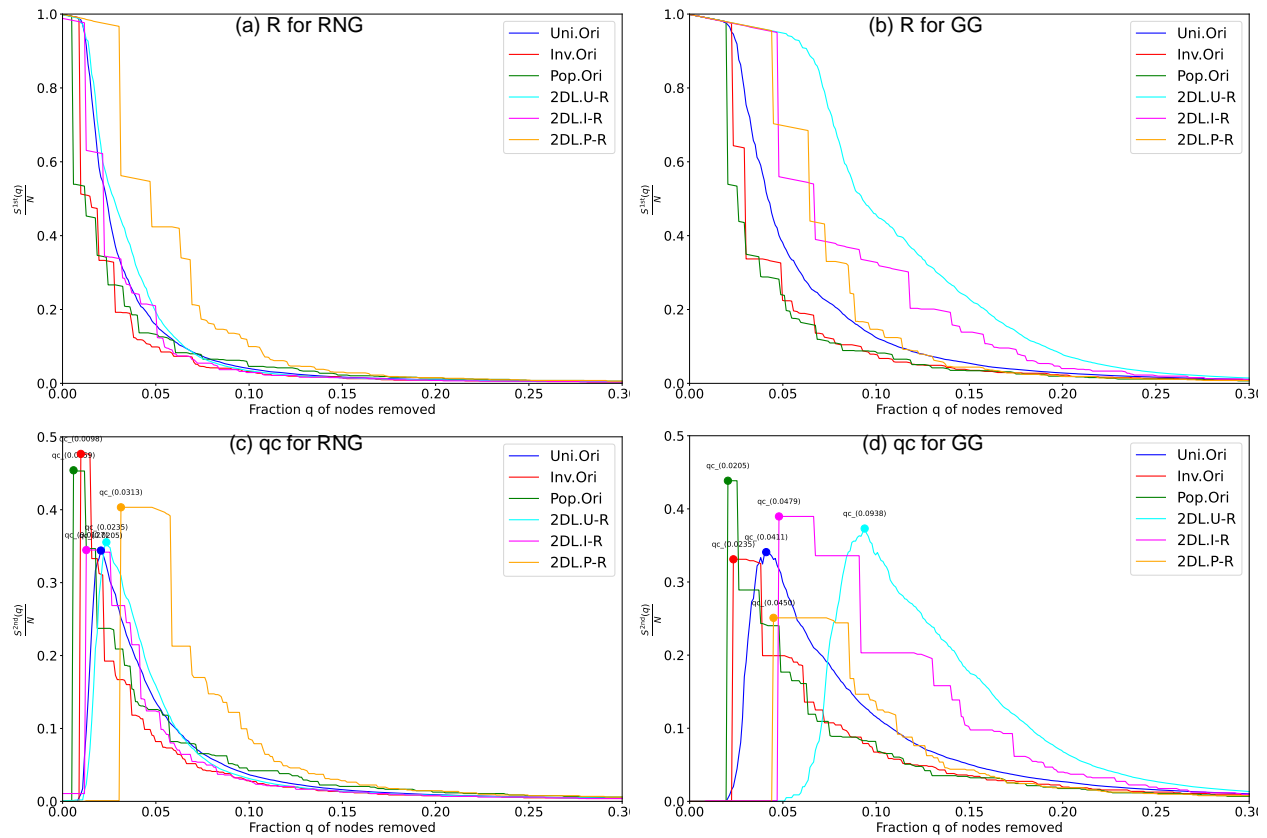


図 22：本図は東京地域における  $N = 1024$  ノードのネットワークに対し、再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性分析を示す. 2次元格子 (2DL) へのノード再配置においても、元の次数分布は保持されている. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対規模  $S^{1st}(q)/N$  と, (c)(d) 第 2 連結成分の相対規模  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点の臨界割合  $q_c$  を用いる.

Cities	$R^{ID}$				$q_c^{ID}$			
	RNG		GG		RNG		GG	
	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,
Fukuoka	0.1264	0.2541 $\Delta$	0.2171	0.2693 $\Delta$	0.0901	0.2172 $\Delta$	0.1832	0.2202
Hiroshima	0.1162	0.1319 $\Delta$	0.2332	0.1606	0.0821	0.0981	0.2032	0.1051
Keihan	0.1531 $\Delta$	0.1765 $\Delta$	0.1998	0.1758	0.1692 $\Delta$	0.0751	0.1712	0.1782
Nagoya	0.1404 $\Delta$	0.1943 $\Delta$	0.2238	0.2084	0.1552 $\Delta$	0.1772 $\Delta$	0.2392	0.0631
Tokyo	0.1363 $\Delta$	0.2191 $\Delta$	0.2250	0.2083	0.1361 $\Delta$	0.2412 $\Delta$	0.2362	0.1512
Sendai	0.1240	0.1801 $\Delta$	0.2132	0.1257	0.0591	0.1061	0.1882	0.0170
Sapporo	0.1055	0.1646 $\Delta$	0.1890	0.2042	0.0851	0.1441 $\Delta$	0.1301	0.1522
Uniform	0.132		0.247		0.1351		0.2643	
Analytical	-				0.12		0.263	

表3：元のネットワークにおける初期次数（ID）攻撃下のロバスト性指標  $R^{ID}$  と臨界割合  $q_c^{ID}$ . 本表は  $N = 1024$  の元のネットワークにおいて、日本の主要7地域に対する初期次数（ID）攻撃下でのロバスト性指標  $R^{ID}$  および臨界割合  $q_c^{ID}$  を示す. 数値が大きいほど高いロバスト性を示す. 上付き三角記号（ $\Delta$ ）は、Pop. または Inv. に基づくネットワークが、Uni. に基づくネットワークより高いロバスト性を示すことを表す.

Cities	$R^{RF}$				$q_c^{RF}$			
	RNG		GG		RNG		GG	
	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,
Fukuoka	0.1573	0.1338	0.2820	0.1902	0.1191	0.0911	0.3724 $\Delta$	0.1682
Hiroshima	0.1476	0.1227	0.2627	0.1510	0.1832	0.0320	0.3093	0.0601
Keihan	0.2040 $\Delta$	0.2001 $\Delta$	0.2486	0.2421	0.1522	0.2382 $\Delta$	0.3844 $\Delta$	0.2773
Nagoya	0.1711	0.2060 $\Delta$	0.2752	0.2068	0.1692	0.0881	0.2653	0.3093
Tokyo	0.1721	0.2146 $\Delta$	0.2998	0.2614	0.1031	0.2873 $\Delta$	0.2332	0.2513
Sendai	0.1771	0.1407	0.2650	0.1806	0.1131	0.0330	0.2843	0.0541
Sapporo	0.1253	0.2053 $\Delta$	0.2126	0.2345	0.1391	0.0330	0.2302	0.4014
Uniform	0.1972		0.3083		0.2112		0.3694	
Analytical	-				0.205		0.365	

表4：元のネットワークにおけるランダム故障（RF）下のロバスト性指標  $R^{RF}$  と臨界割合  $q_c^{RF}$ . 本表は  $N = 1024$  の元のネットワークにおいて、日本の主要7地域に対するランダム故障（RF）下でのロバスト性指標  $R^{RF}$  および臨界割合  $q_c^{RF}$  を示す. 数値が大きいほど高いロバスト性を示す. 上付き三角記号（ $\Delta$ ）は、Pop.-based または Inv.-based ネットワークが、Uni.-based ネットワークより高いロバスト性を示すことを表す.

差異が一貫して確認された。しかしながら、以下の2つの例外が観測された：RNGにおけるID攻撃時の臨界割合  $q_c^{ID}$  ( $p = 0.249 > 0.05$ )、およびRNGにおけるRF時のロバスト性指数  $R^{RF}$  ( $p = 0.104 > 0.05$ ) である（付録表 15, 表 16 参照）。これらの例外の原因としては、以下の2点が考えられる：(1) 表 5 が示すように、RNGにおいてPop.-basedネットワークはより高い平均次数  $\langle k \rangle$  を持ち、ノード除去後に代替経路をより多く提供できる可能性があること；(2) Pop.-based ネットワークには規則的な「格子状 (grid-like)」局所構造が存在する場合があります、これがRFに対するロバスト性向上に寄与し得ることである（付録図 65 参照）。

本研究における「格子状」効果の説明は以下のとおりである。本研究ではすべてのノードは地理空間上に任意に配置されるのではなく、 $500\text{ m} \times 500\text{ m}$  の格子の中心点に配置される。Pop.-based ネットワークでは、隣接する格子領域内にノードが密集することが多く、「格子状」構造が形成されやすい。この局所格子構造の効果を定量化するために、本研究では「次数が4であり、かつその近傍ノード4つもすべて次数4であるノードの割合」を算出した。表 6 によると、Pop.-based ネットワークのこの割合は、Inv.-based (RNGの多くは0%, GGでも1.17%未満) およびUni.-based (RNGは0%, GGは0.79%) と比較して有意に高く (RNGでは2.05%~15.14%, GGでは2.25%~15.33%; 上向き三角  $\triangle$  にて示す)、Pop.-based ネットワークに特徴的な構造的性質であることが分かる。

渗流理論 [84] によれば、二次元正方格子ネットワークはノードランダム除去率が  $q_c = 0.4073$  (対応する渗流閾値  $p_c = 1 - q_c = 0.5927$ ) に達するまで連結性を保持する。この値  $q_c = 0.4073$  は、表 4 に示される RNG の解析値  $q_c = 0.205$  および GG の解析値  $q_c = 0.365$  より大きい。したがって、本来ランダム位置ネットワーク (RNG, GG) ではより低いはずの臨界割合が、「格子状」局所構造の存在によって押し上げられることが理解できる。

さらに、第 4.5 節と同様に、本研究ではロバスト性指標 ( $R$  または  $q_c$ ) と疎密度指数  $SI(G_w)$  との相関についても調査を行った（付録表 19 を参照）。多くの状況においてロバスト性と疎密度の間には単調減少関係が確認されたが、RNGにおけるIDおよびRFの状況では一部例外が見られた。これらの具体的な要因は現時点では明確ではなく、今後の

研究による解明が期待される.

Cities	RNG		GG	
	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,
Fukuoka	2.4492	2.8223 <sup>△</sup>	3.584	2.9844
Hiroshima	2.4414	2.7852 <sup>△</sup>	3.5996	2.9199
Keihan	2.4395	2.8535 <sup>△</sup>	3.5469	3.1367
Nagoya	2.3945	2.8535 <sup>△</sup>	3.4785	3.1367
Tokyo	2.4473	2.8906 <sup>△</sup>	3.6113	3.1191
Sendai	2.459	2.834 <sup>△</sup>	3.582	3.0195
Sapporo	2.3789	3.0684 <sup>△</sup>	3.3105	3.1563
Uniform	2.5017		3.864	

表5: ネットワークの平均次数. 本表は, 日本の主要7地域における  $N = 1024$  ノードのネットワークの平均次数  $\langle k \rangle$  を示す. 上付き三角記号 ( $\Delta$ ) は, Pop. または Inv. に基づくネットワークが, Uni. に基づくネットワークよりも高い平均次数  $\langle k \rangle$  を示すことを表す.

Cities	RNG		GG	
	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,
Fukuoka	0	0.0771 <sup>△</sup>	0.0039	0.0771 <sup>△</sup>
Hiroshima	0	0.0205 <sup>△</sup>	0.0078	0.0205 <sup>△</sup>
Keihan	0	0.0391 <sup>△</sup>	0.0078	0.0479 <sup>△</sup>
Nagoya	0	0.0391 <sup>△</sup>	0.0088 <sup>△</sup>	0.0479 <sup>△</sup>
Tokyo	0	0.0205 <sup>△</sup>	0.0068	0.0225 <sup>△</sup>
Sendai	0	0.0459 <sup>△</sup>	0.0117 <sup>△</sup>	0.0498 <sup>△</sup>
Sapporo	0	0.1514 <sup>△</sup>	0.001	0.1533 <sup>△</sup>
Uniform	0		0.0079	
Lattice	0.7656			

表6: ネットワークにおける格子状部分の割合. 本表は, 日本の主要7地域における  $N = 1024$  ノードのネットワークに対し, 格子状構造を構成するノードの割合を示す. 次数が4であり, その隣接ノードもすべて次数4であるノードを格子状部分に属するものとして定義する. 上付き三角記号 ( $\Delta$ ) は, Pop.-based または Inv.-based に基づくネットワークが, Uni.-based に基づくネットワークよりも高い割合を示すことを表す. なお, 2次元格子 (Lattice) ネットワークは完全な格子構造を持つため, その割合が最も高い (76.56%)

#### 4.7 節 本章のまとめ

本章では, 実際の人口分布データと平面的な近似モデル (RNG および GG) に基づき, 複数のノード空間配置 (Pop.-based, Inv.-based, Uni.-based) からなる空間ネットワークモデルを構築し, 局所コミュニティ構造が連結ロバスト性に与える影響を体系的に分析した. 結果として, ノード位置の空間的集中は顕著な局所コミュニティ構造を形成し, このコミュニティ構造は典型的な RB, ID, RF といった異なる攻撃戦略において一貫してネットワークの連結ロバスト性を低下させることが示された.

ロバスト性指数  $R$  および臨界割合  $q_c$  の変化を比較した結果, モジュラリティ  $Q$  が高いネットワークほどロバスト性が低い, すなわちコミュニティ構造が強いほどネットワーク全体の断裂耐性が弱まることが明らかとなった. さらに, 空間疎密度指数  $SI(G_w)$  とロバスト性との単調な負の相関関係から, ノード空間配置と連結性能との間に内在する構造的関係が示唆された.

以上より, 本章は空間ネットワークにおける局所コミュニティ構造の形成メカニズムとそのロバスト性低下効果を明確にし, 後続の「ロバスト性向上戦略および総合的考察」に関する議論に対し理論的基盤を提供した.

## 第5章 結論と考察

### 5.1 節 研究の総括

本研究では、スケールフリーネットワークと空間ネットワークにおける実験的観察を比較することで、両者における連結ロバスト性を規定する要因が大きく異なることを明らかにした。すなわち、スケールフリーネットワークにおいては連結ロバスト性は主に次数分布の分散 ( $\sigma^2$ ) と最短閉路の平均長 ( $\langle l \rangle$ ) によって支配されるのに対して、空間ネットワークにおいては局所コミュニティ構造 (local communities) の強度が支配的な要因となる。

スケールフリーネットワークにおいては、平均次数  $\langle k \rangle$  が一定である条件のもとで、べき指数  $\gamma$  の増加に伴い次数分布  $P(k)$  は徐々に狭くなり (すなわち分散  $\sigma^2$  が減少して)、連結ロバスト性は顕著に向上する。これは、 $\sigma^2$  の減少により最短閉路の平均長  $\langle l \rangle$  が増大して、ネットワーク内部により大きな孔洞構造 (large holes) が形成されるためである。言い換えれば、内部に大きな孔洞を有するネットワークほど高いロバスト性を示す。この結果は、連続的な次数分布をもつランダムネットワーク (ER ネットワークや規則ネットワークなど) で得られた先行研究の知見 [4, 5] と整合する。

しかしながら、 $\gamma > 3$  の領域ではロバスト性指数  $R$  の増加が飽和する現象も観測された。この上限効果は  $k_{\max}$  および  $\sigma^2$  の収束に起因する。すなわち、 $\gamma$  を増大させてもネットワーク内には依然として少数のハブノードが存在して、ロバスト性の向上に限界が生じる。したがって、スケールフリーネットワークにおけるロバスト性向上には理論的な上限が存在する。ロバスト性をさらに向上させるには、スケールフリー構造から規則構造への遷移といった、ネットワーク構造そのものの転換が必要となる。この知見は、 $2 < \gamma < 3$  の冪分布構造を有するインターネットや WWW など現実の複雑ネットワークに対して重要な示唆を与える。

一方、空間ネットワークにおいては連結ロバスト性は局所コミュニティ構造の強度に強く依存する。本研究では都市人口分布データと RNG や GG の平面近傍グラフモデルに基づき、Pop.-based (実人口分布)、Inv.-based (反転人口分布)、Uni.-based (均一分布) と

いう異なるノード空間配置により都市基盤ネットワークを再構成し、局所コミュニティ形成とその強度が連結ロバスト性に与える影響を検討した。Pop.-based および Inv.-based ネットワークではノードが空間的に不均一に集中して、強い局所コミュニティが形成されるため、橋渡しリンクが攻撃により失われるとネットワークは急速に分断される。その結果、ロバスト性指数  $R$  と臨界しきい値  $q_c$  はモジュラリティ (modularity)  $Q$  の増加に伴い大幅に低下する。すなわち、局所コミュニティ構造は空間ネットワークの連結ロバスト性を弱体化させる。

この負の影響を緩和するためには、長距離リンクを戦略的に導入して局所コミュニティ効果を弱めることが有効と考えられる。ノード位置を再配置して空間分布を均一化することも理論的には効果があるが、現実の都市では土地利用制約により実行が困難である。そのため、都市間高速道路、都市高架道路、光ファイバ幹線、衛星回線などの少数の長距離接続を追加することは、局所密度を大きく変えずにコミュニティ間連結性を高め、全体ロバスト性を向上させる実践的な方法である。

以上より、本研究はスケールフリーネットワークと空間ネットワークの比較を通じて、連結ロバスト性がネットワーク構造特性に強く依存することを明らかにした。スケールフリーネットワークではロバスト性向上は次数分布の均衡化と最短閉路長の増大によって達成されるが、その効果には理論的境界が存在する。一方、空間ネットワークではノードの空間的集積により強い局所コミュニティが形成され、攻撃に対して脆弱となるが、少数の長距離リンクの導入によりロバスト性を改善できる。これらの知見は、ネットワークの連結ロバスト性がトポロジーだけでなく、地理空間的埋め込み構造にも依存することを示しており、ロバスト性最適化および多層ネットワーク拡張に関する今後の研究に対して重要な基盤を提供する。

## 5.2 節 研究の意義と貢献

本研究の主要な意義と貢献は、以下の2点にまとめられる。

理論的意義として、本研究は「次数分布の分散と閉路構造」から「空間的コミュニティ構造」へと至る統一的な分析枠組みを構築して、異なるネットワーク型におけるロバ

スト性の構造的起源を理解するための新たな視座を提供した。本研究は、ロバスト性の根本的な決定要因が接続分布の均衡性にあることを示して、スケールフリーネットワークに内在する異質性と、空間ネットワークに内在する局所化特性を同一の理論的体系のもとで統合した点で意義深い。これにより、複雑ネットワークにおけるロバスト性研究の概念的拡張が実現された。

応用的価値として、本研究の成果は現実のネットワークシステムの設計と最適化に有用な示唆を与える。都市インフラ、通信システム、エネルギーネットワークなど、空間的制約を受ける実システムにおいては、局所効率を維持しつつ、適度な広域連結を導入することにより、外乱に対する全体の堅牢性を向上させられることが示唆された。この考え方は多層複雑系へも拡張可能であり、Cyber-Physical-Social Systems (CPSS) におけるシステムレジリエンス設計に対しても理論的基盤を提供する。

### 5.3 節 今後の研究展望

本研究では、空間ネットワークにおける局所コミュニティ構造が全体連結ロバスト性に与える影響を中心に分析を行ったが、依然としていくつかの検討すべき課題が残されている。

まず、本研究ではノードやリンクが除去された際の連結性変化に着目して、静的な構造ロバスト性を主に扱ったため、損傷後の回復や適応といった動的過程は対象としていない。今後の研究においては、「レジリエンス (resilience)」の概念を導入して、抵抗・吸収・回復・適応といった多段階プロセスを統合的に評価することが重要となる。

次に、本研究は単層ネットワークを前提として解析を進めたため、多層ネットワーク (multilayer network) における層間相互作用 (interlayer interactions) を考慮していない点が挙げられる。多層ネットワークでは、各層が異なる機能やネットワーク種別 (例えば交通、通信、電力など) を担い、同一ノードが複数の層に存在して相互依存関係を形成することが一般的である。このような層間依存は、一方の層で発生したノードまたはリンクの故障が、他層における機能喪失を誘発するカスケード故障を引き起こす可能性を持つ。また、層を跨いで直接的に連結 (interlayer links) が存在する場合には、情報、負荷、あるいは障害

が層間で伝播し得る。これらの層間相互作用は、単層ネットワークで観測された「局所コミュニティによる脆弱化」のメカニズムを増幅あるいは緩和する可能性がある。そのため、今後は、多層ネットワークモデルを導入して、層間結合の強度やパターン（依存的結合か補完的結合か）によるロバスト性の変化を体系的に評価するとともに、都市インフラなど実システムへの適用可能性を検討する必要がある。

さらに、ロバスト性向上のための介入戦略を検討する際には、最悪の攻撃形態を明確に理解することが重要である。既存研究および本研究の結果が示すように、ネットワーク内のループ構造を破壊することは、全域的連結性を急速に低下させる極めて強力な攻撃手法である。この攻撃は形式的にはデサイクリング (decycling) またはダズマンリング (dismantling) 問題 [24] として定式化でき、最小のノード集合を削除することでループを完全に除去することを目的とする。この問題は最小フィードバック頂点集合 (Minimum Feedback Vertex Set, FVS) 問題に等価であり、典型的な NP-hard 問題として知られている [46]。そのため、厳密解を求めることは計算上困難であり、実際には Belief Propagation (BP) に基づく近似アルゴリズムが広く用いられている、BP 法により得られる FVS 近似解は、「ループ破壊に基づく近似的最悪攻撃 (BP 攻撃)」として位置付けることができる [48]、したがって、将来的なロバスト性向上のためのリンク再配線、ノード再配置、あるいは局所トポロジー最適化などの介入戦略を設計する際には、この BP 攻撃を基準とした耐攻撃性評価を同時に行うことが望ましい。これにより、提案手法が単なるランダム故障や次数攻撃だけでなく、ループ破壊型の高度な攻撃に対しても有効であるかどうかを検証できる。

加えて、今後の具体的な研究課題としては、(1) 多層ネットワークを導入し層間結合様式とロバスト性の関係を体系的に分析すること、(2) 実データに基づいて層間依存性を定量化する手法を構築すること、および (3) FVS / BP に基づく近似的最悪攻撃を想定した防御設計 (再配線ルール・ノード配置最適化) の定式化と評価を行うことである。これらの課題を通じて、本研究で示した「局所コミュニティが全体連結性を脆弱化させる」という知見を、多層複雑システムのロバスト性評価と設計指針へと拡張していく予定である。

総じて、本研究はネットワークロバスト性の構造的起源を明らかにして、多様な複雑システムに適用可能な分析枠組みを提示した。今後は、理論的深化と実装的応用を両輪と

して進め,動的ロバスト性およびシステムレジリエンスに関するより普遍的知見の獲得を目指すことも考えられる.

## 付録

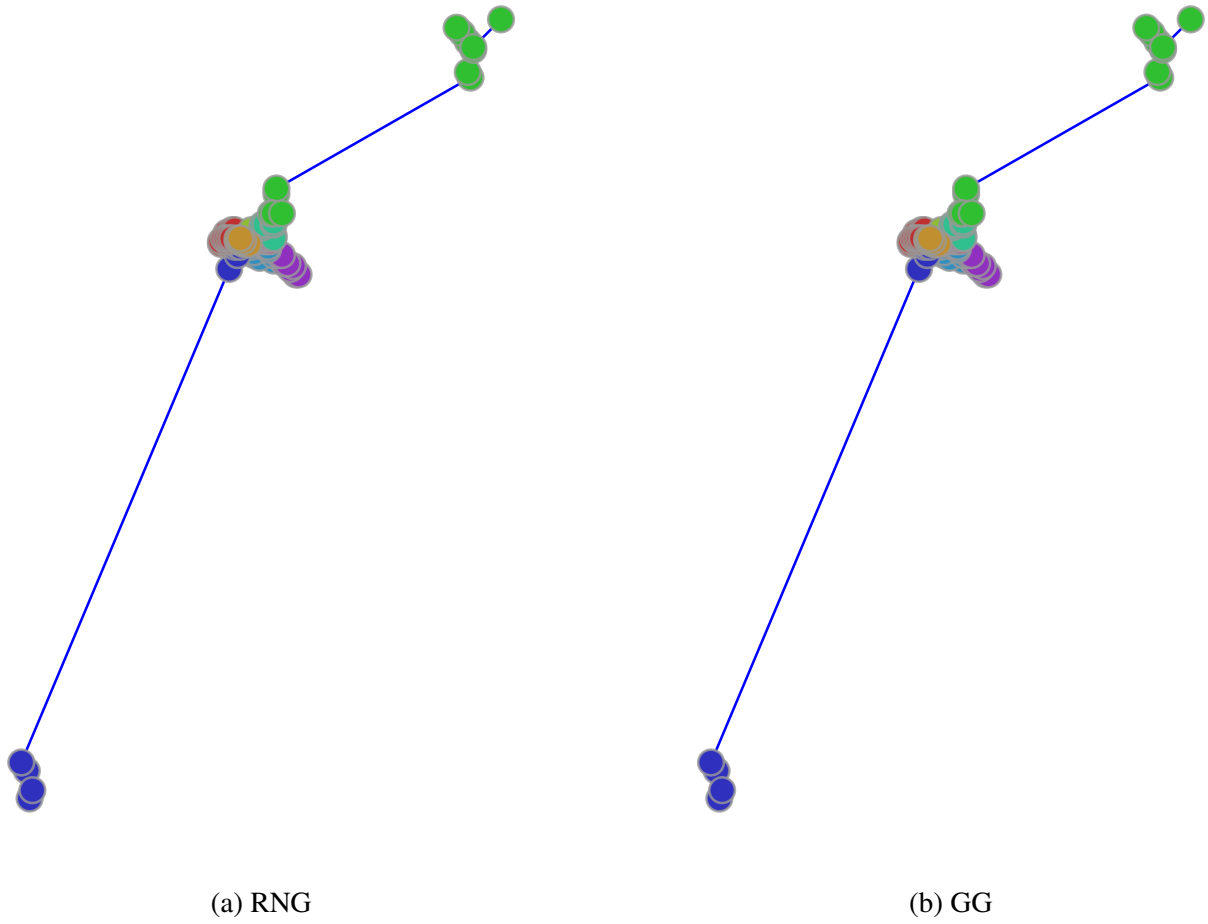
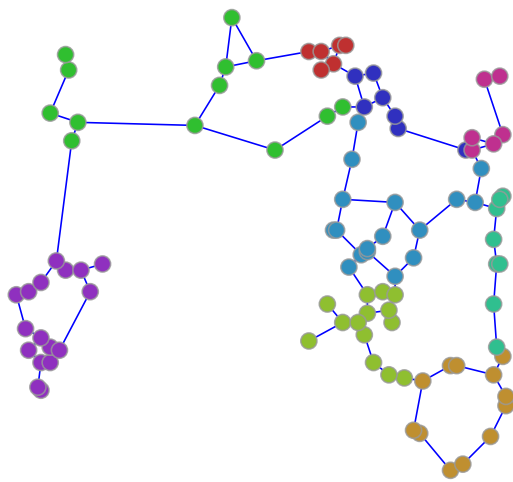
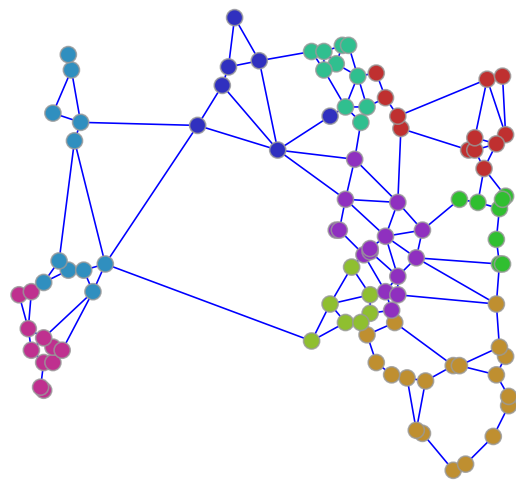


図 23：ノード除去前における福岡のコミュニティ構造の可視化.  $N = 100$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.



(a) RNG



(b) GG

図 24：ノード除去前における福岡のコミュニティ構造の可視化.  $N = 100$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 23 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

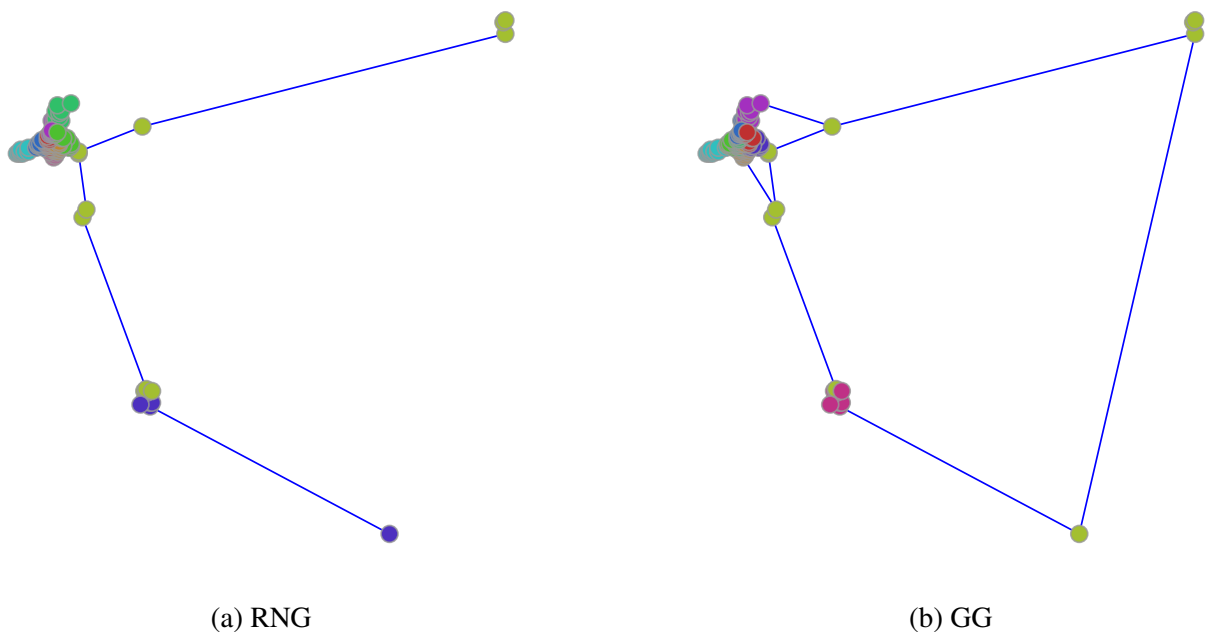


図 25：ノード除去前における広島のコミュニティ構造の可視化.  $N = 100$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

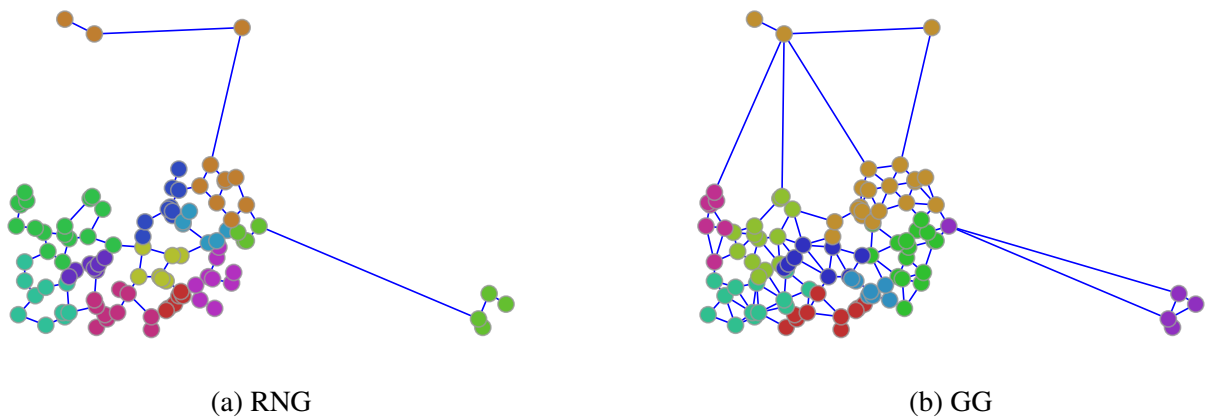
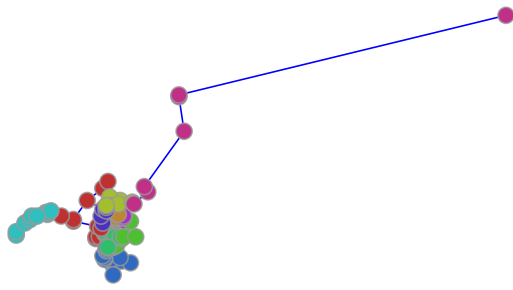
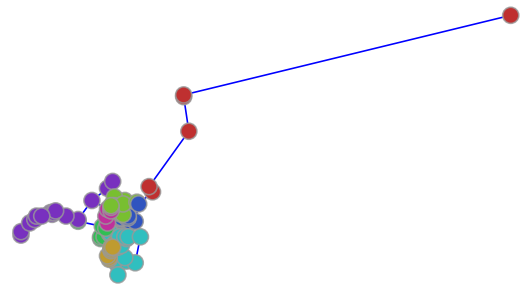


図 26：ノード除去前における広島のコミュニティ構造の可視化.  $N = 100$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 25 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

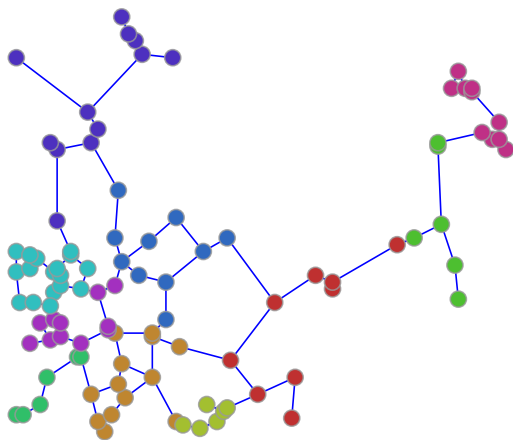


(a) RNG

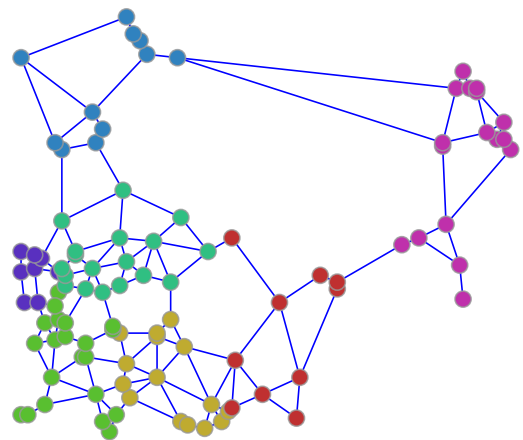


(b) GG

図 27：ノード除去前における京阪のコミュニティ構造の可視化.  $N = 100$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

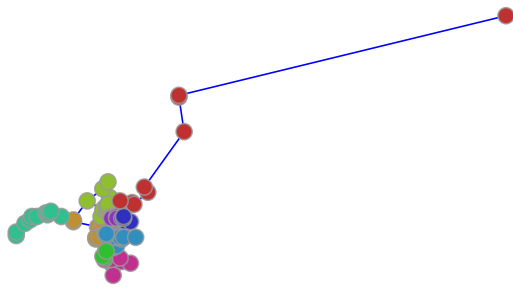


(a) RNG

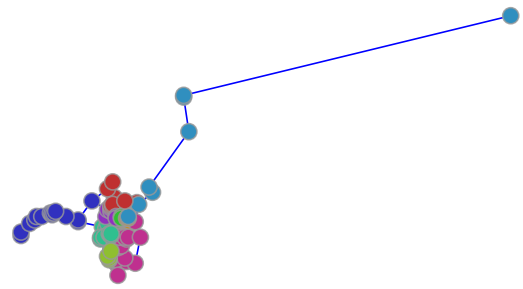


(b) GG

図 28：ノード除去前における京阪のコミュニティ構造の可視化.  $N = 100$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 27 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

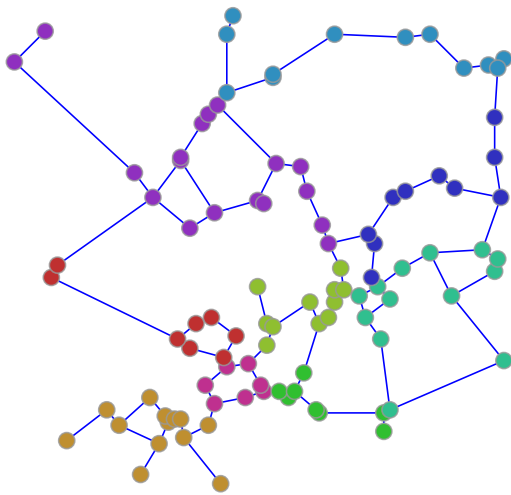


(a) RNG

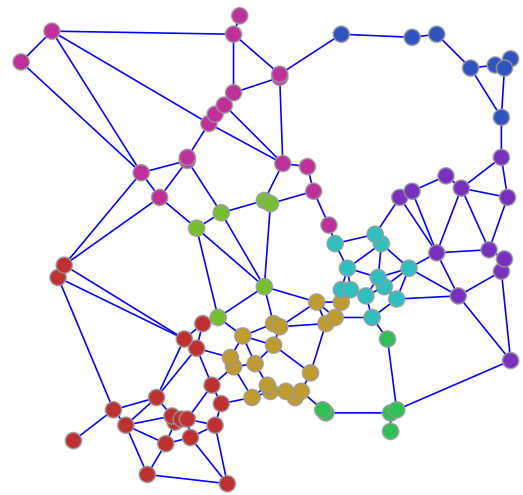


(b) GG

図 29：ノード除去前における名古屋のコミュニティ構造の可視化.  $N = 100$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

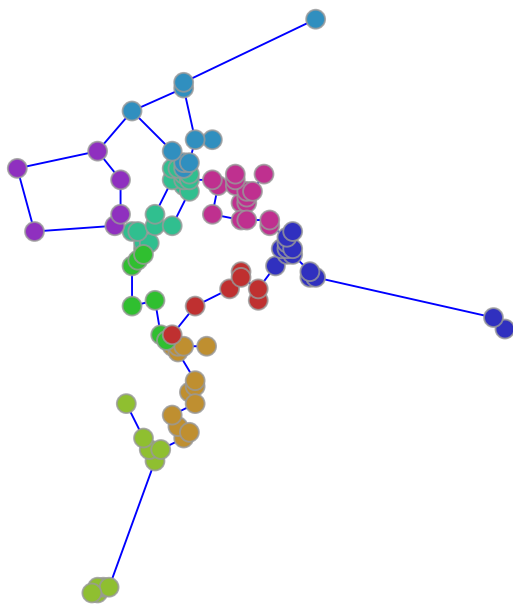


(a) RNG

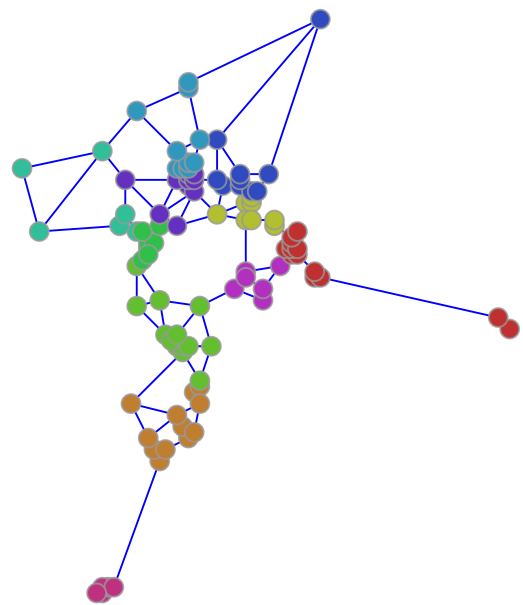


(b) GG

図 30：ノード除去前における名古屋のコミュニティ構造の可視化.  $N = 100$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 29 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

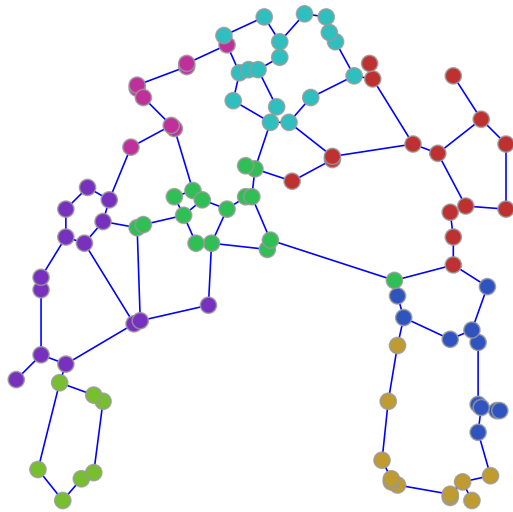


(a) RNG

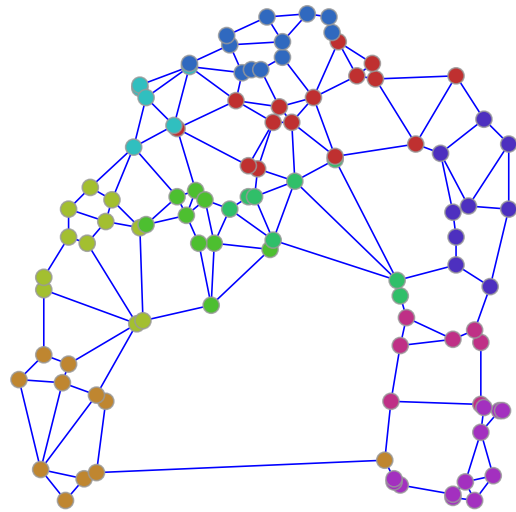


(b) GG

図 31：ノード除去前における東京のコミュニティ構造の可視化.  $N = 100$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

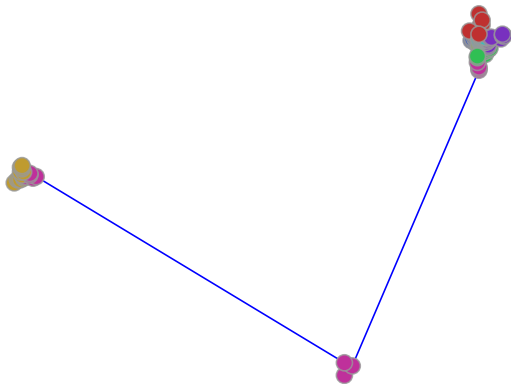


(a) RNG

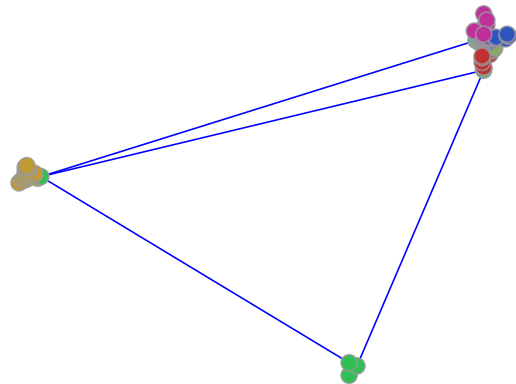


(b) GG

図 32：ノード除去前における東京のコミュニティ構造の可視化.  $N = 100$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 31 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

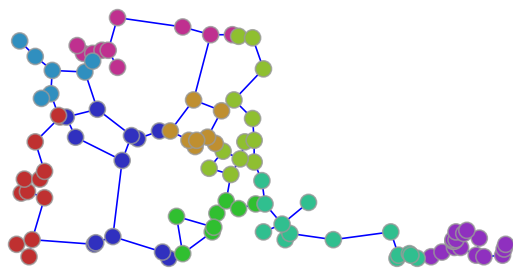


(a) RNG

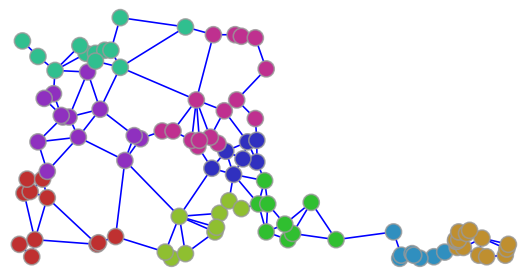


(b) GG

図 33：ノード除去前における仙台のコミュニティ構造の可視化.  $N = 100$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

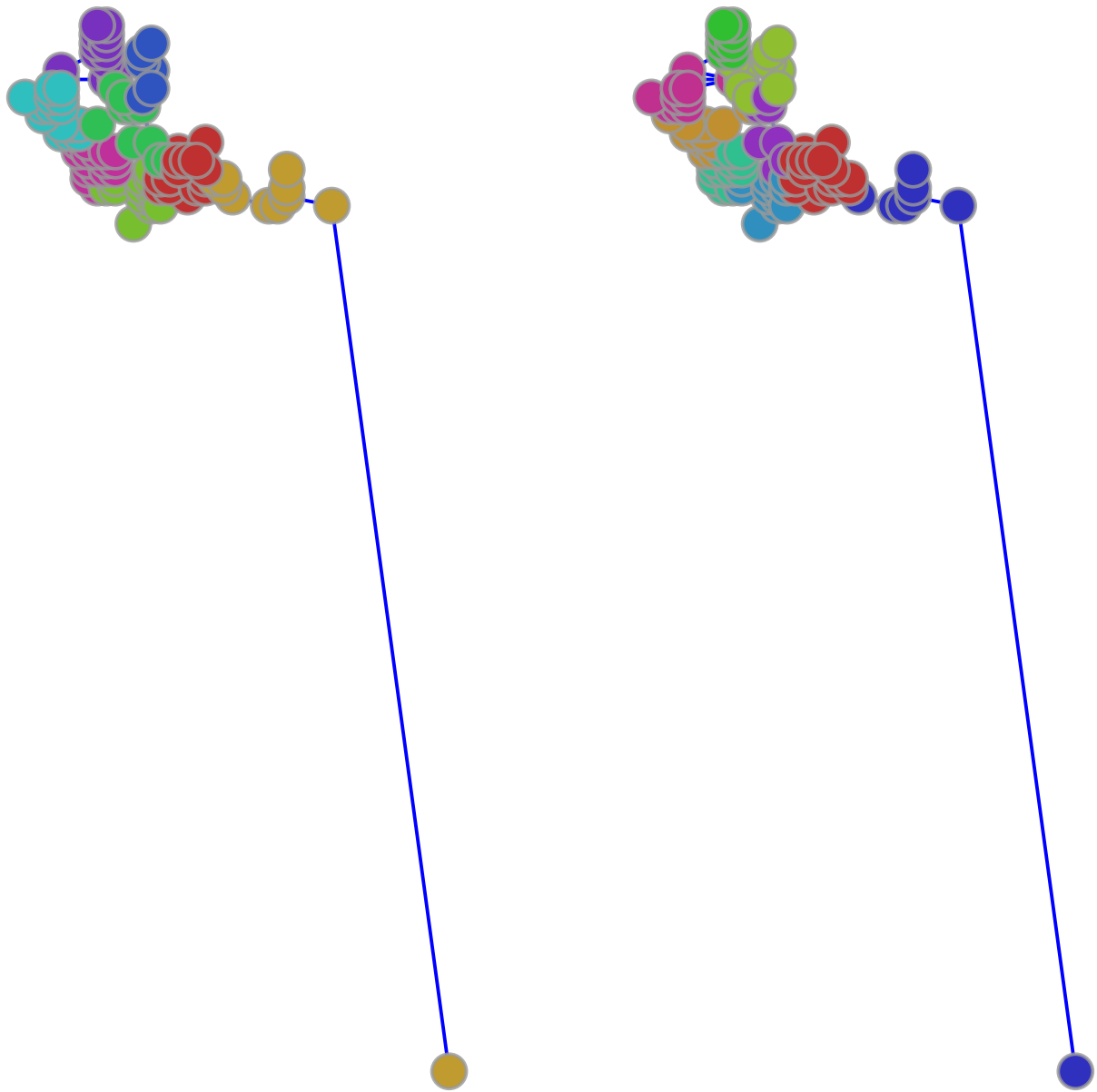


(a) RNG



(b) GG

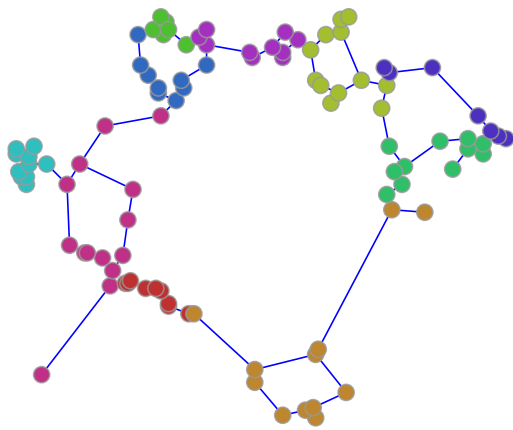
図 34：ノード除去前における仙台のコミュニティ構造の可視化.  $N = 100$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 33 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.



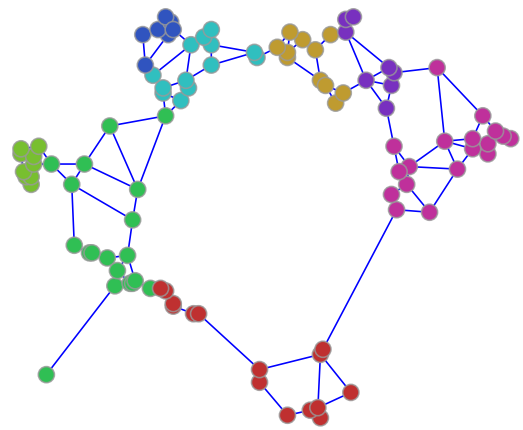
(a) RNG

(b) GG

図 35：ノード除去前における札幌のコミュニティ構造の可視化.  $N = 100$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

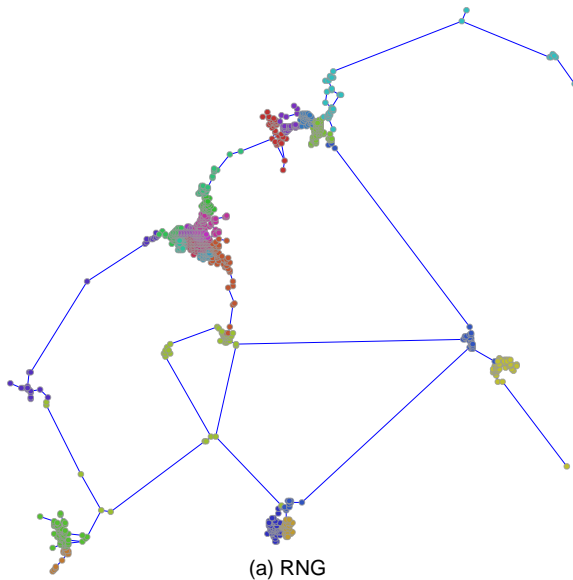


(a) RNG

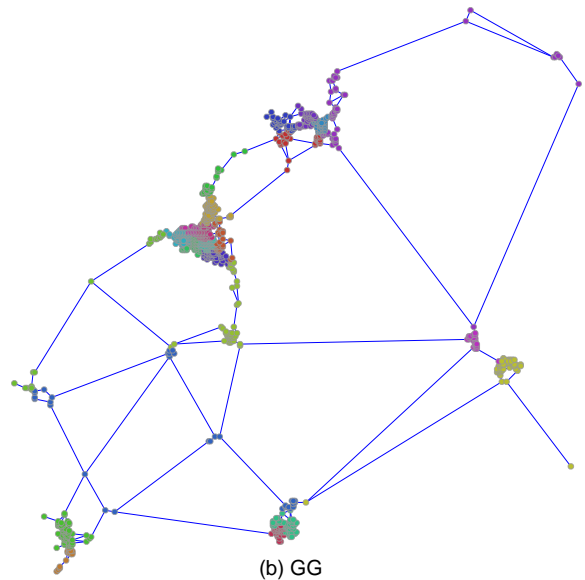


(b) GG

図 36：ノード除去前における札幌のコミュニティ構造の可視化.  $N = 100$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 35 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.



(a) RNG



(b) GG

図 37：ノード除去前における福岡のコミュニティ構造の可視化.  $N = 1024$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

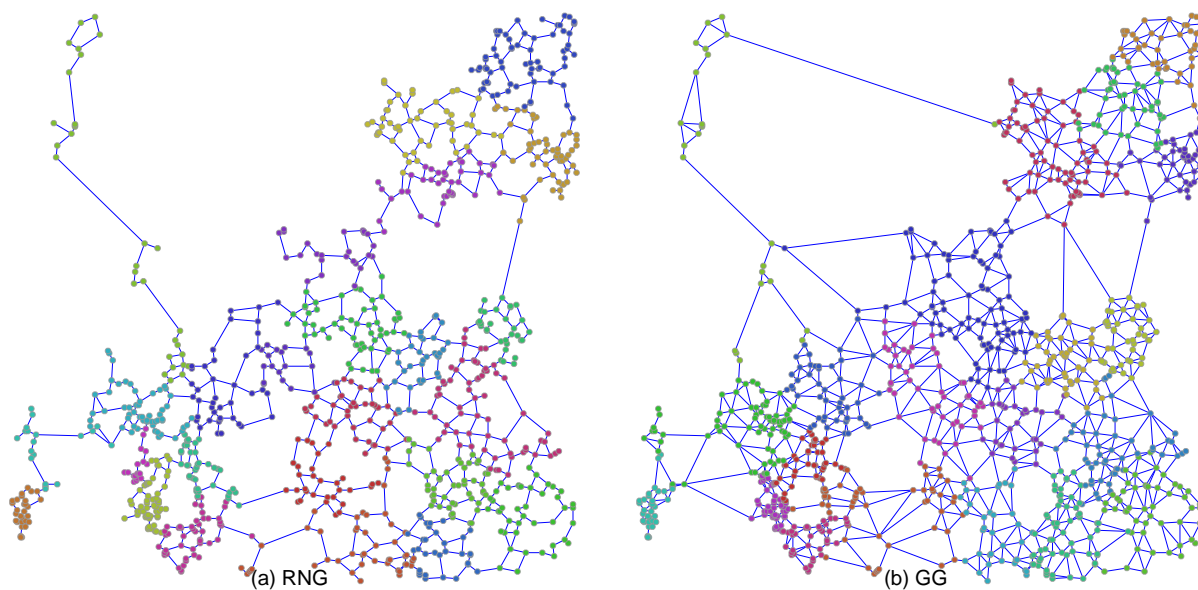


図 38：ノード除去前における福岡のコミュニティ構造の可視化.  $N = 1024$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 37 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

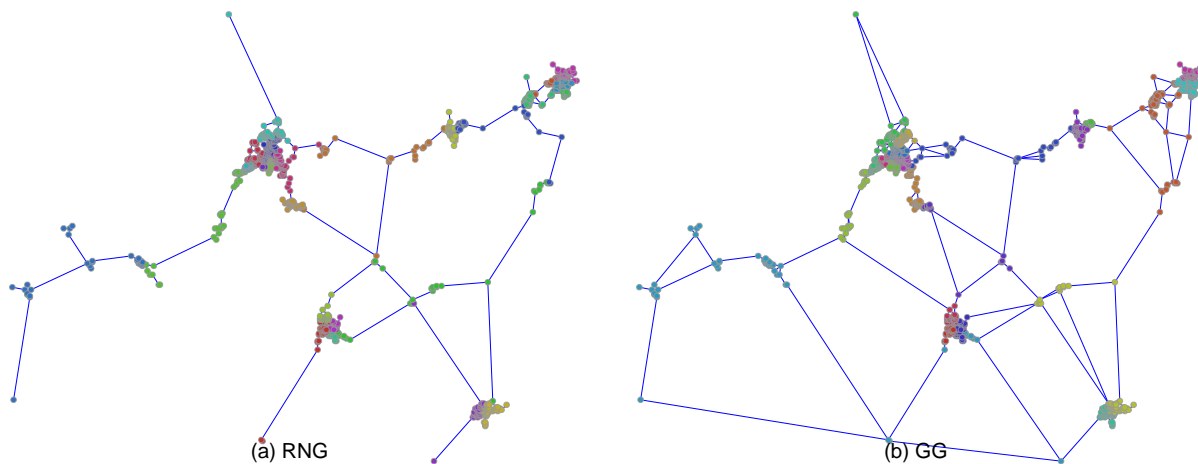


図 39：ノード除去前における広島コミュニティ構造の可視化.  $N = 1024$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

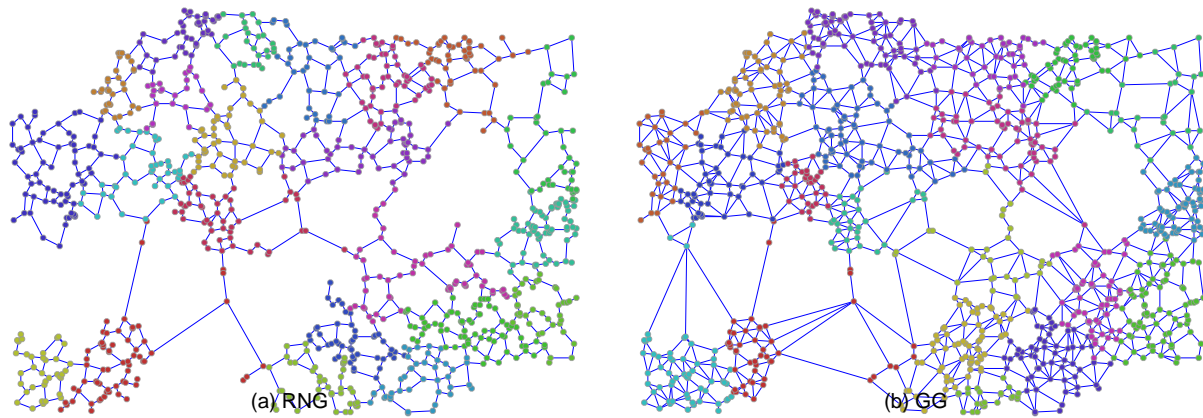


図 40：ノード除去前における広島のコミュニティ構造の可視化.  $N = 1024$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 39 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

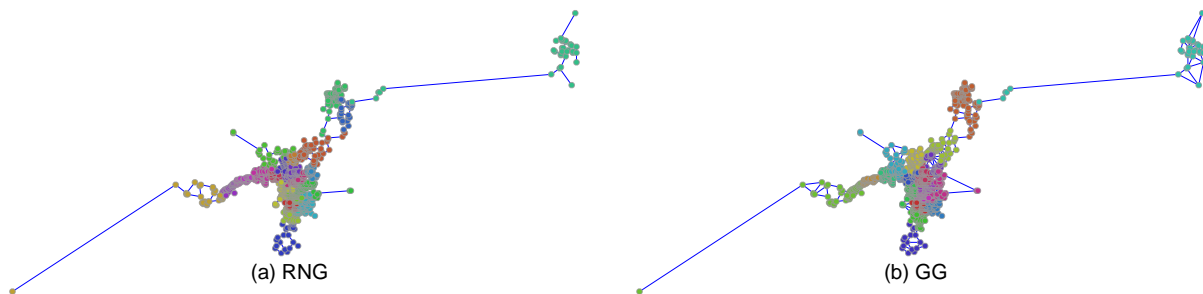


図 41：ノード除去前における京阪のコミュニティ構造の可視化.  $N = 1024$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

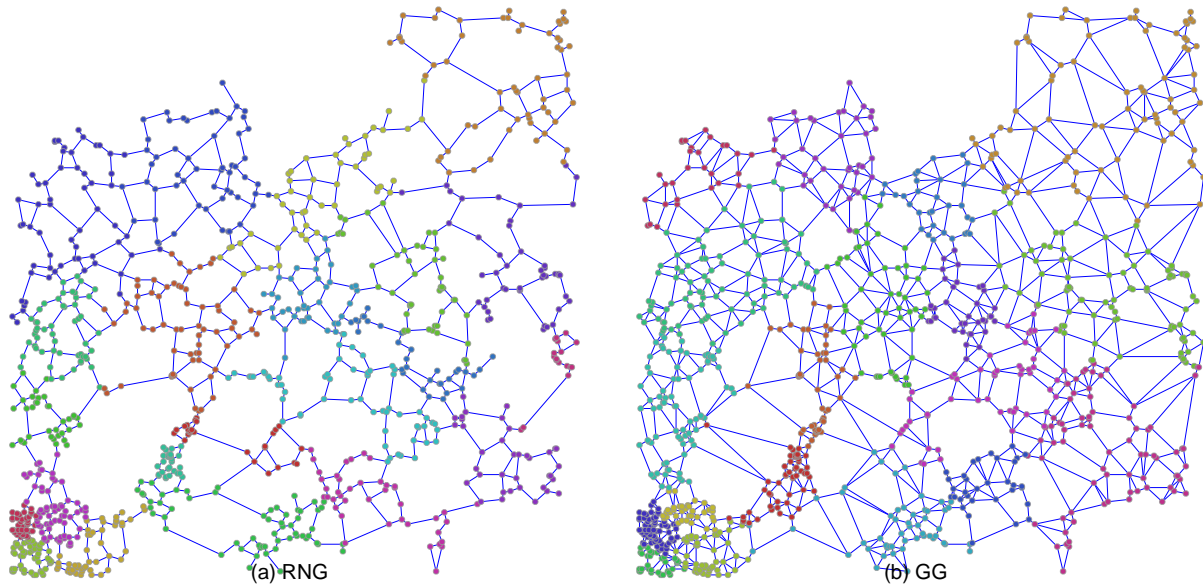


図 42：ノード除去前における京阪のコミュニティ構造の可視化.  $N = 1024$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 41 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

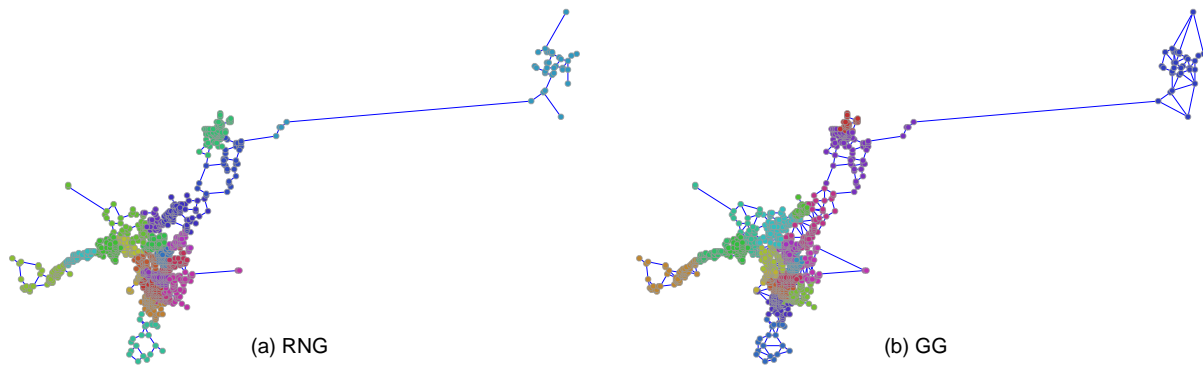


図 43：ノード除去前における名古屋のコミュニティ構造の可視化.  $N = 1024$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

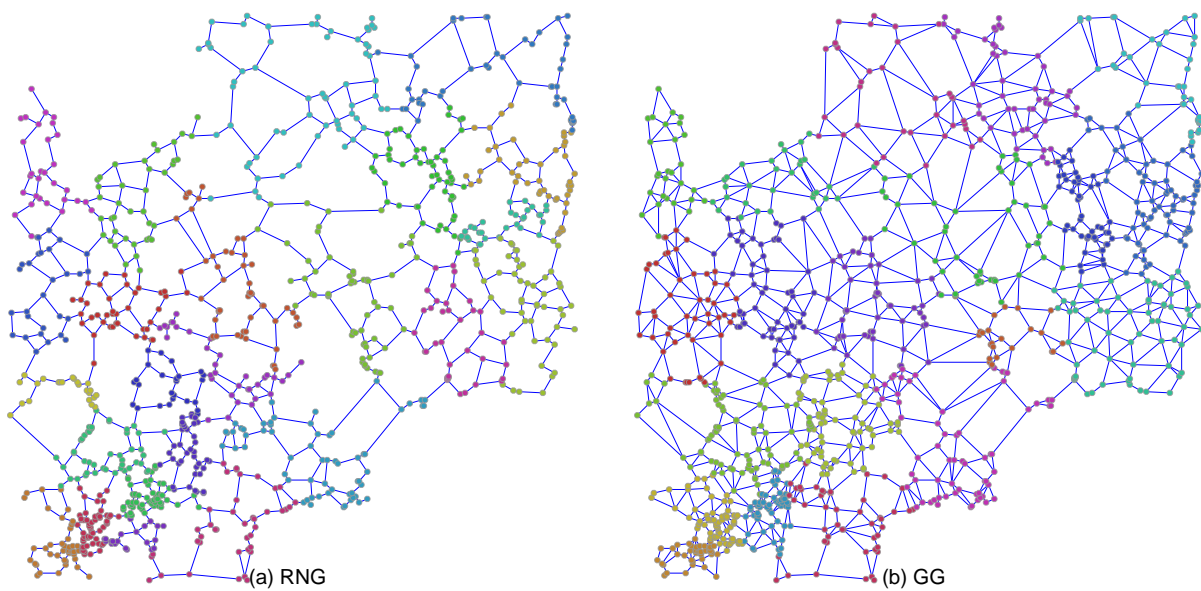


図 44：ノード除去前における名古屋のコミュニティ構造の可視化.  $N = 1024$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 43 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

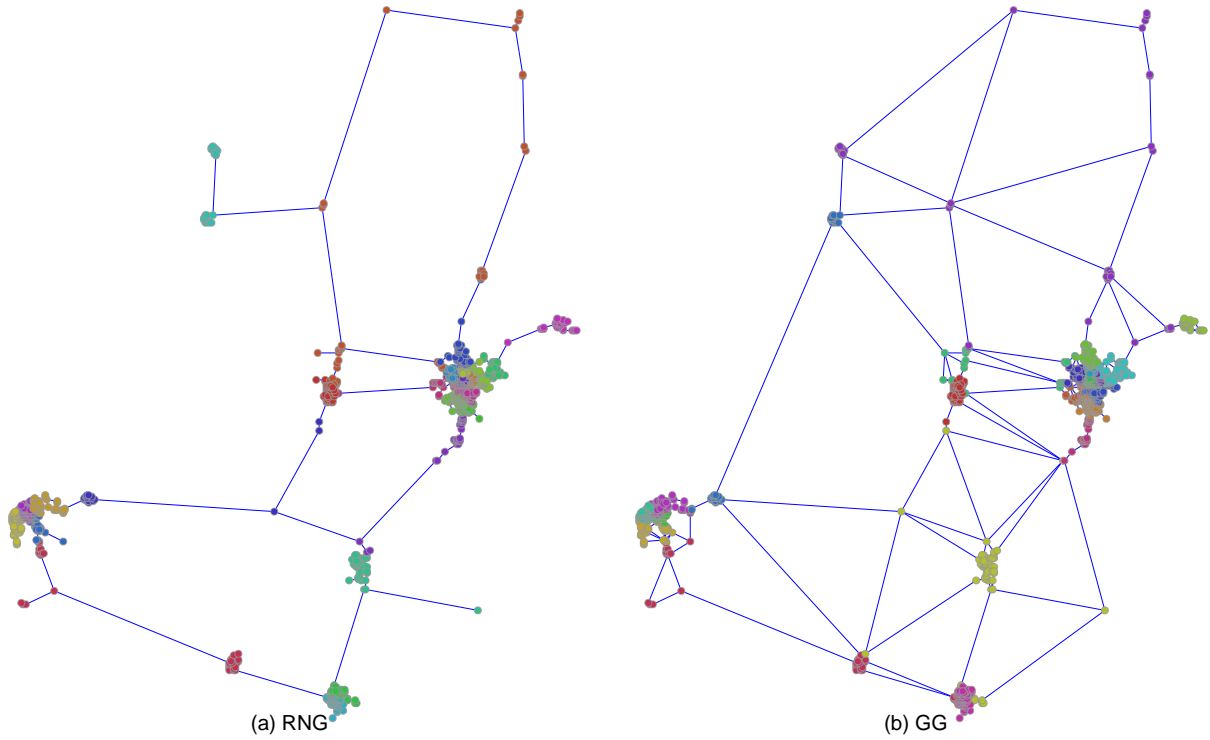


図 45：ノード除去前における仙台のコミュニティ構造の可視化.  $N = 1024$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

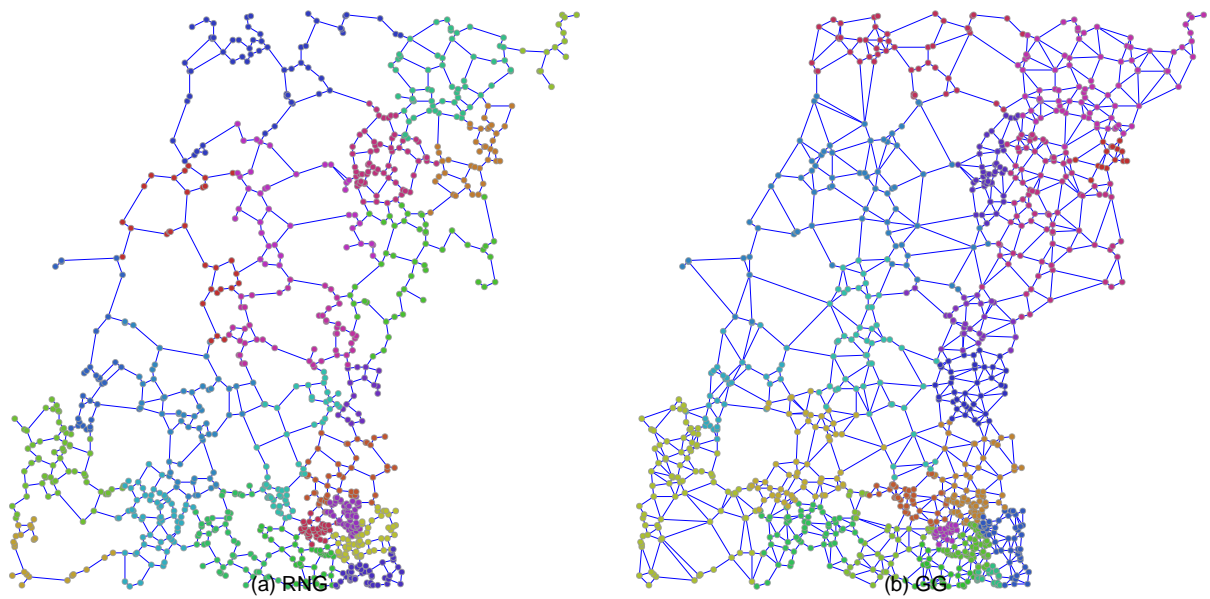


図 46：ノード除去前における仙台のコミュニティ構造の可視化.  $N = 1024$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 45 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

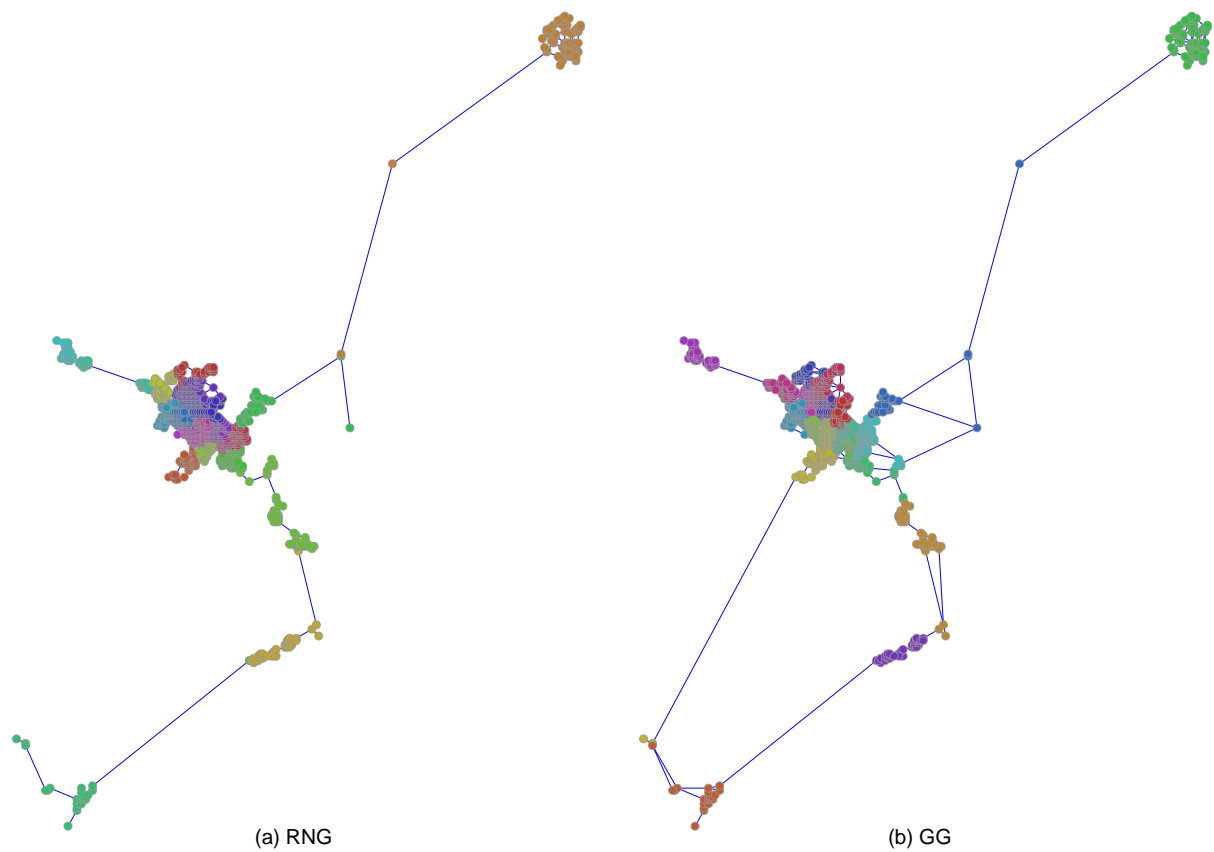


図 47：ノード除去前における札幌のコミュニティ構造の可視化.  $N = 1024$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

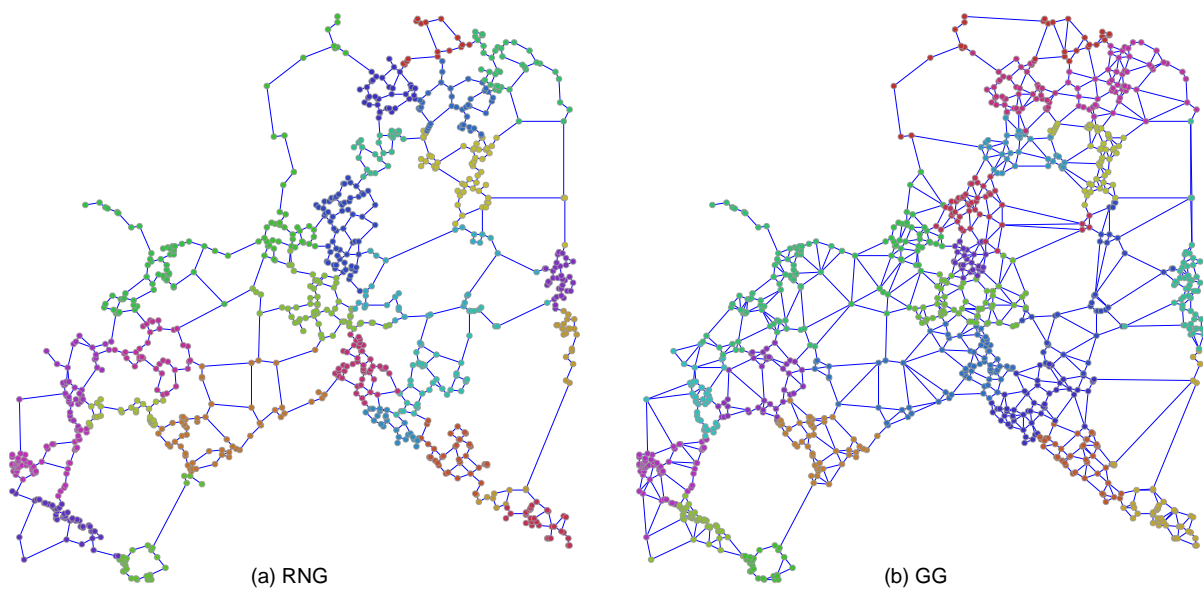
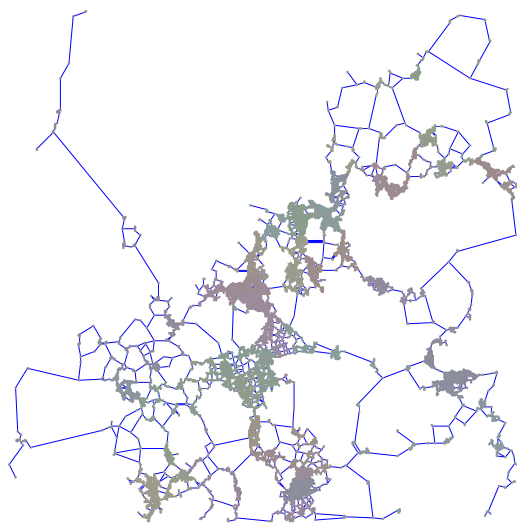
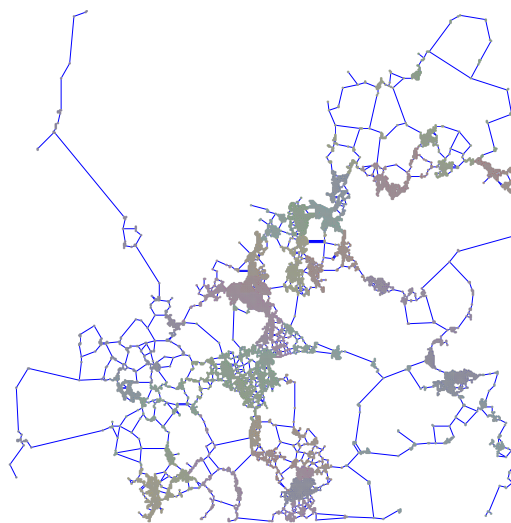


図 48：ノード除去前における札幌のコミュニティ構造の可視化.  $N = 1024$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 47 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

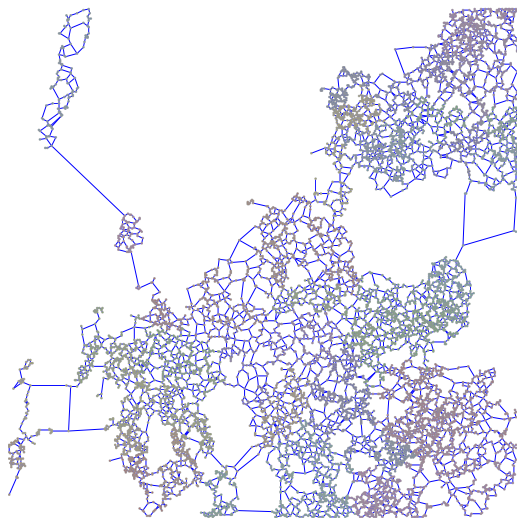


(a) RNG

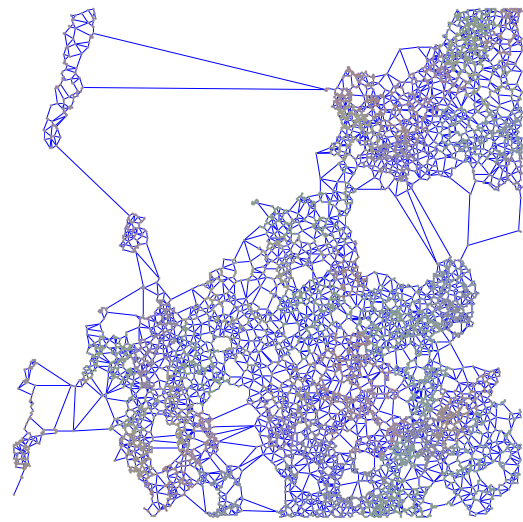


(b) GG

図 49：ノード除去前における福岡のコミュニティ構造の可視化.  $N = 10000$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

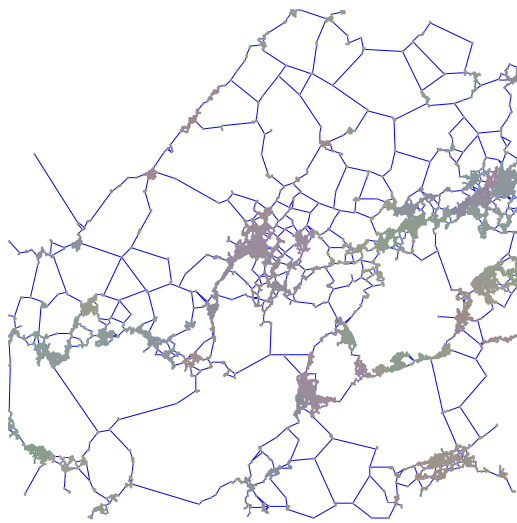


(a) RNG

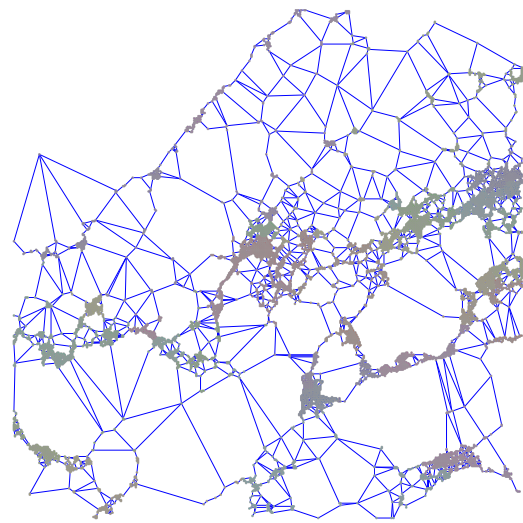


(b) GG

図 50：ノード除去前における福岡のコミュニティ構造の可視化.  $N = 10000$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 49 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

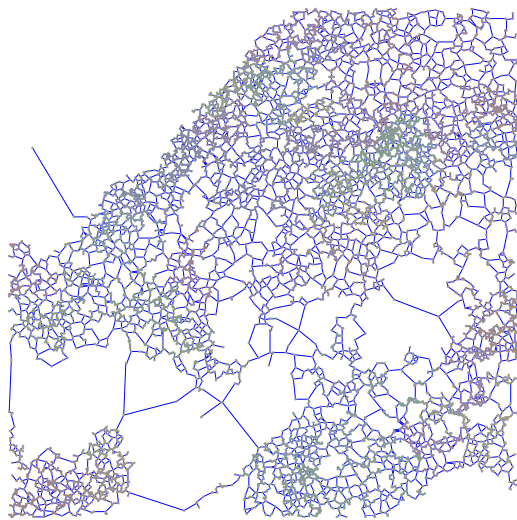


(a) RNG

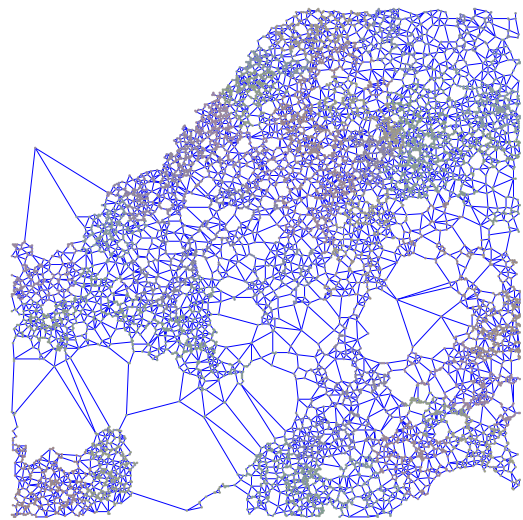


(b) GG

図 51：ノード除去前における広島のコミュニティ構造の可視化.  $N = 10000$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

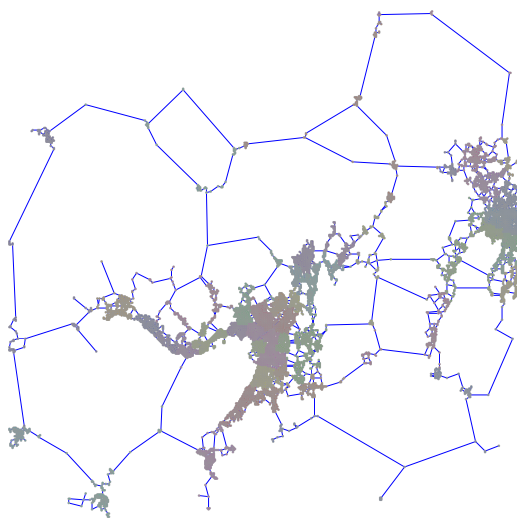


(a) RNG

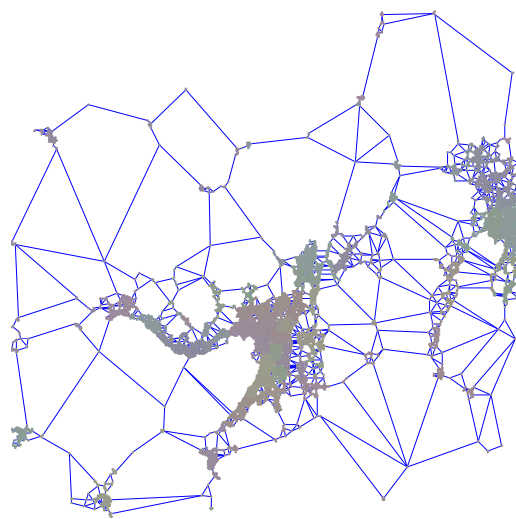


(b) GG

図 52：ノード除去前における広島のコミュニティ構造の可視化.  $N = 10000$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 51 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

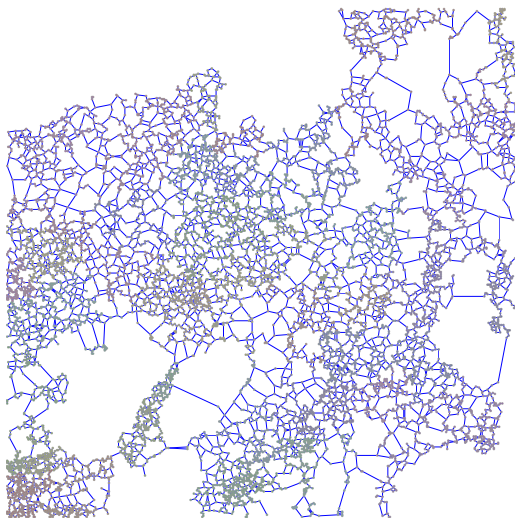


(a) RNG

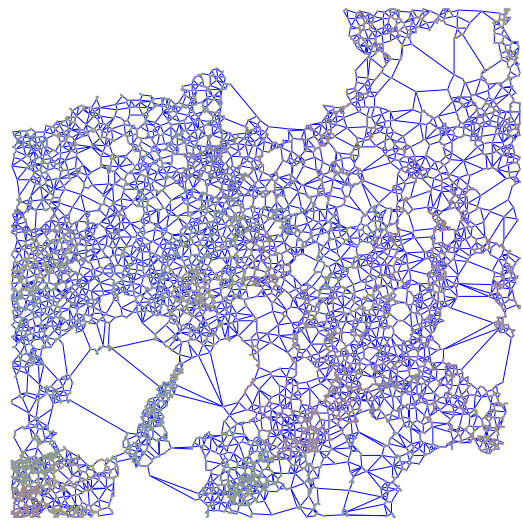


(b) GG

図 53：ノード除去前における京阪のコミュニティ構造の可視化.  $N = 10000$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

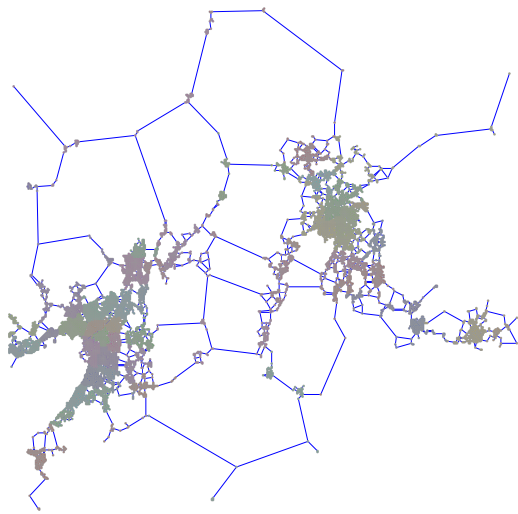


(a) RNG

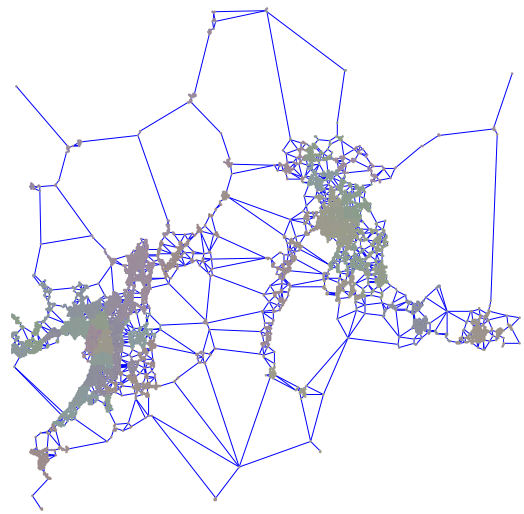


(b) GG

図 54：ノード除去前における京阪のコミュニティ構造の可視化.  $N = 10000$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 53 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

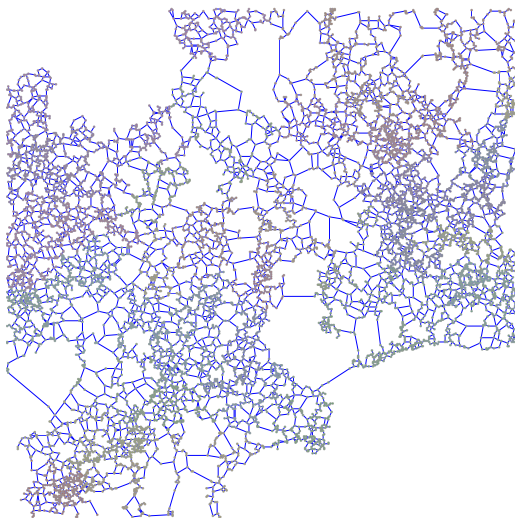


(a) RNG

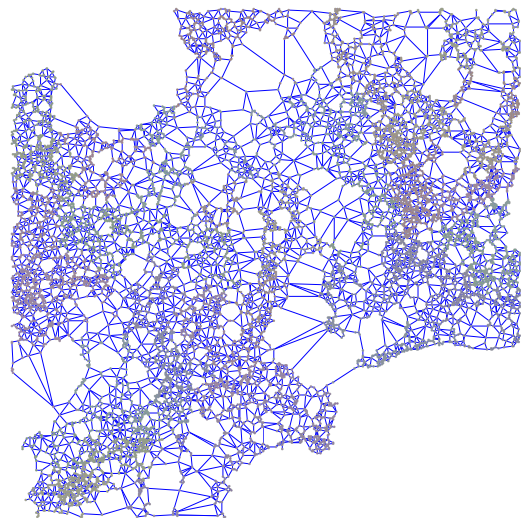


(b) GG

図 55：ノード除去前における名古屋のコミュニティ構造の可視化.  $N = 10000$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

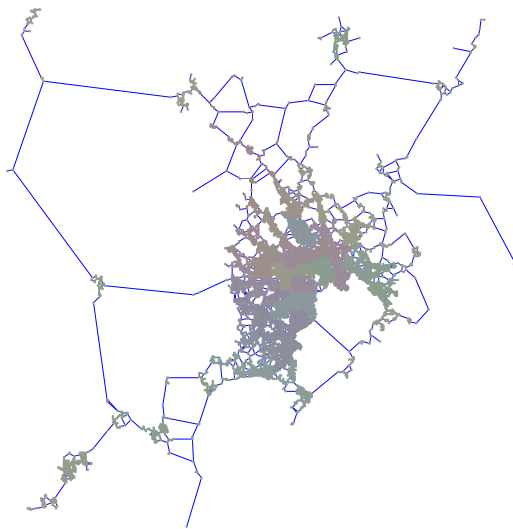


(a) RNG

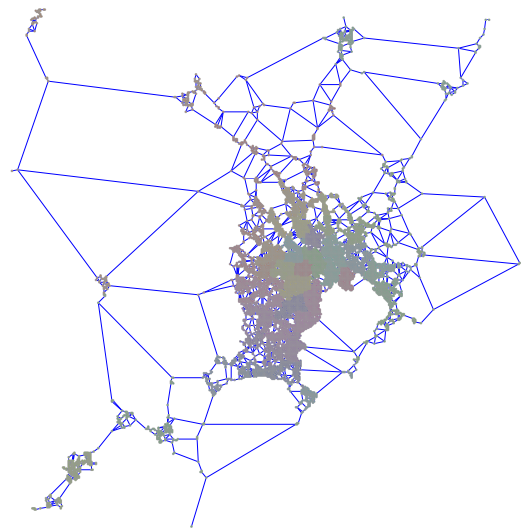


(b) GG

図 56：ノード除去前における名古屋のコミュニティ構造の可視化.  $N = 10000$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 55 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

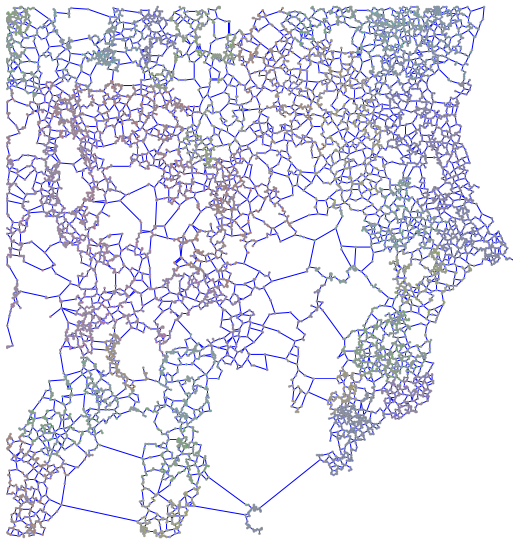


(a) RNG

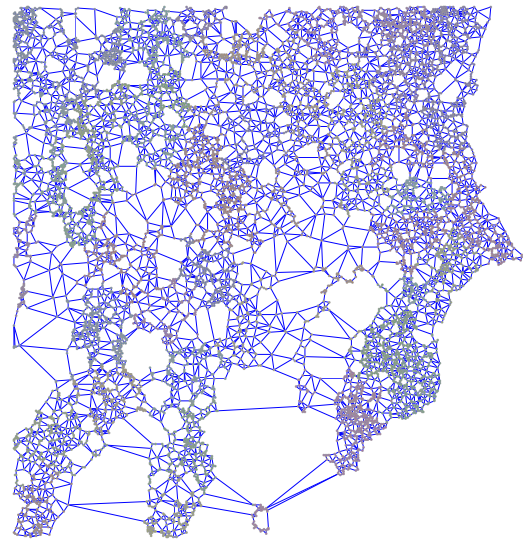


(b) GG

図 57：ノード除去前における東京のコミュニティ構造の可視化.  $N = 10000$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.

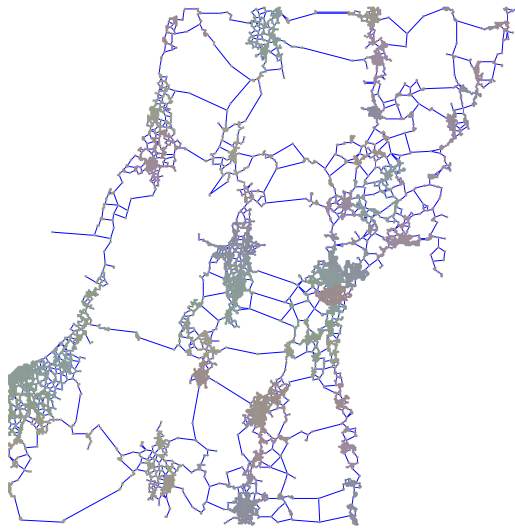


(a) RNG

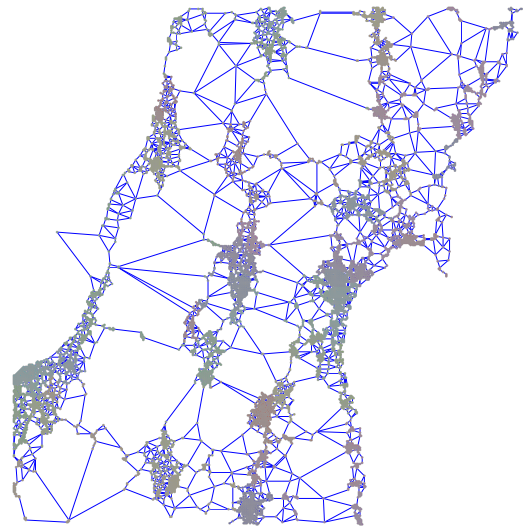


(b) GG

図 58：ノード除去前における東京のコミュニティ構造の可視化.  $N = 10000$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 57 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

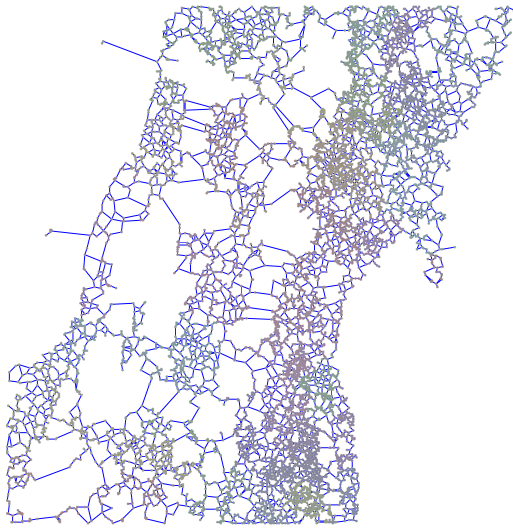


(a) RNG

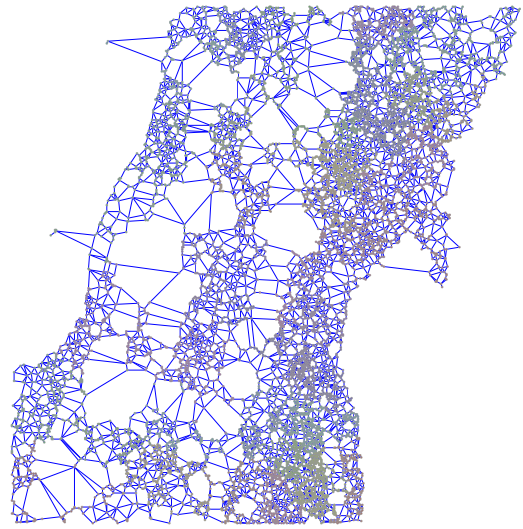


(b) GG

図 59：ノード除去前における仙台のコミュニティ構造の可視化.  $N = 10000$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.



(a) RNG

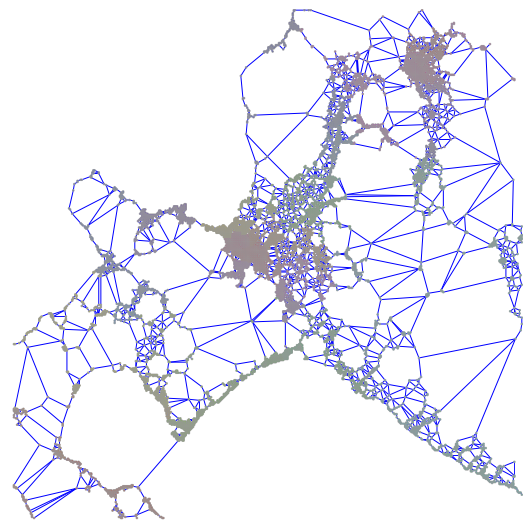


(b) GG

図 60：ノード除去前における仙台のコミュニティ構造の可視化.  $N = 10000$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 59 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

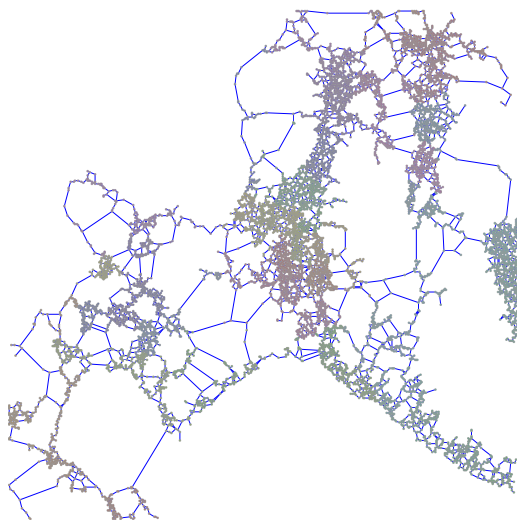


(a) RNG

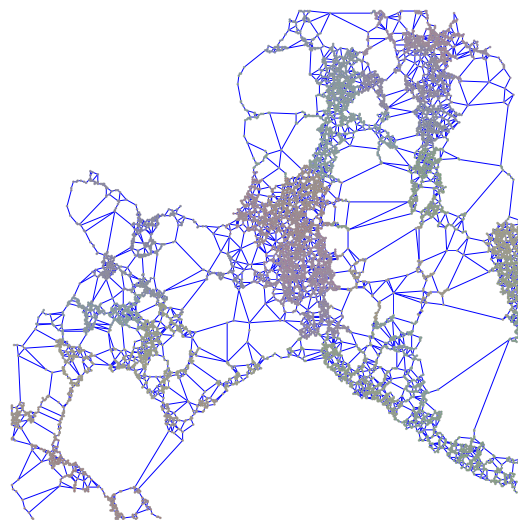


(b) GG

図 61：ノード除去前における札幌のコミュニティ構造の可視化.  $N = 10000$  のノードは人口の多い順 (Pop.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 特に人口が高密度な地域において明確なコミュニティ形成が見られる.



(a) RNG



(b) GG

図 62：ノード除去前における札幌のコミュニティ構造の可視化.  $N = 10000$  のノードは人口の少ない順 (Inv.-based) に配置されている. 異なる色は Louvain 法によって推定された異なるコミュニティを表す. 図 61 と比較して, 異なるコミュニティ形成が見られる.

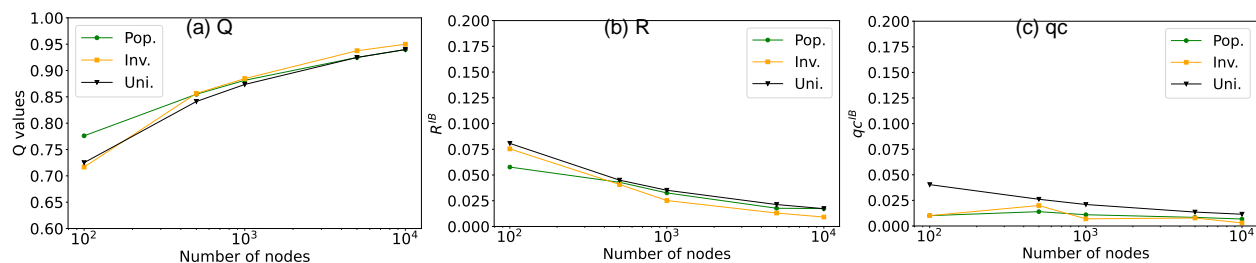


図 63：東京における RNG ネットワークに対して、ネットワークサイズ  $N$  を変化させた場合の、モジュラリティ  $Q$  の増加と、RB 攻撃に対するロバスト性指標  $R^{RB}$  および臨界割合  $q_c^{RB}$  の減少との関係。

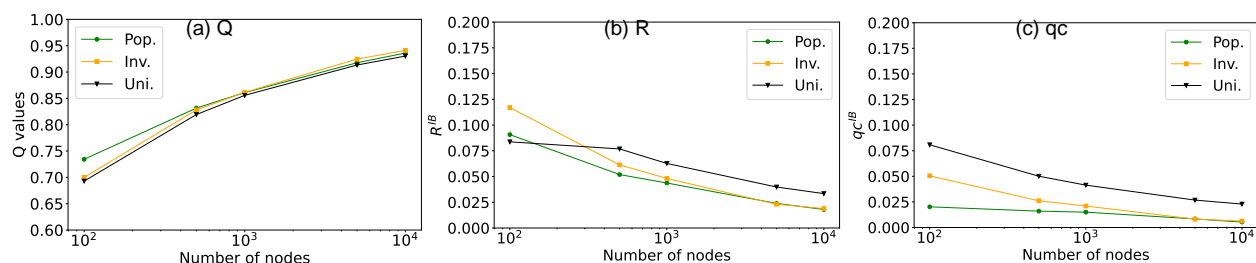


図 64：東京における GG ネットワークに対して、ネットワークサイズ  $N$  を変化させた場合の、モジュラリティ  $Q$  の増加と、RB 攻撃に対するロバスト性指標  $R^{RB}$  および臨界割合  $q_c^{RB}$  の減少との関係。

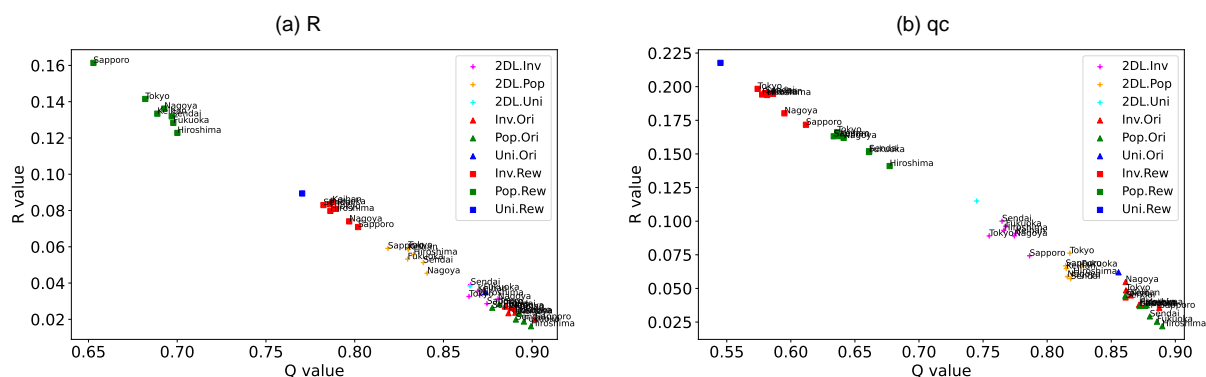


図 65：散布図はネットワークロバスト性指標 ((a)  $R$ , (b)  $q_c$ ) と格子状部分の割合との関係を示す (RF に対する結果)。対象は  $N = 1024$  のネットワークであり、Pop.-based ネットワーク (緑) は Inv.-based (赤) および Uni.-based (青) と比較して、格子状部分の割合が有意に高いことがわかる。詳細は 4.6 小節末尾を参照。

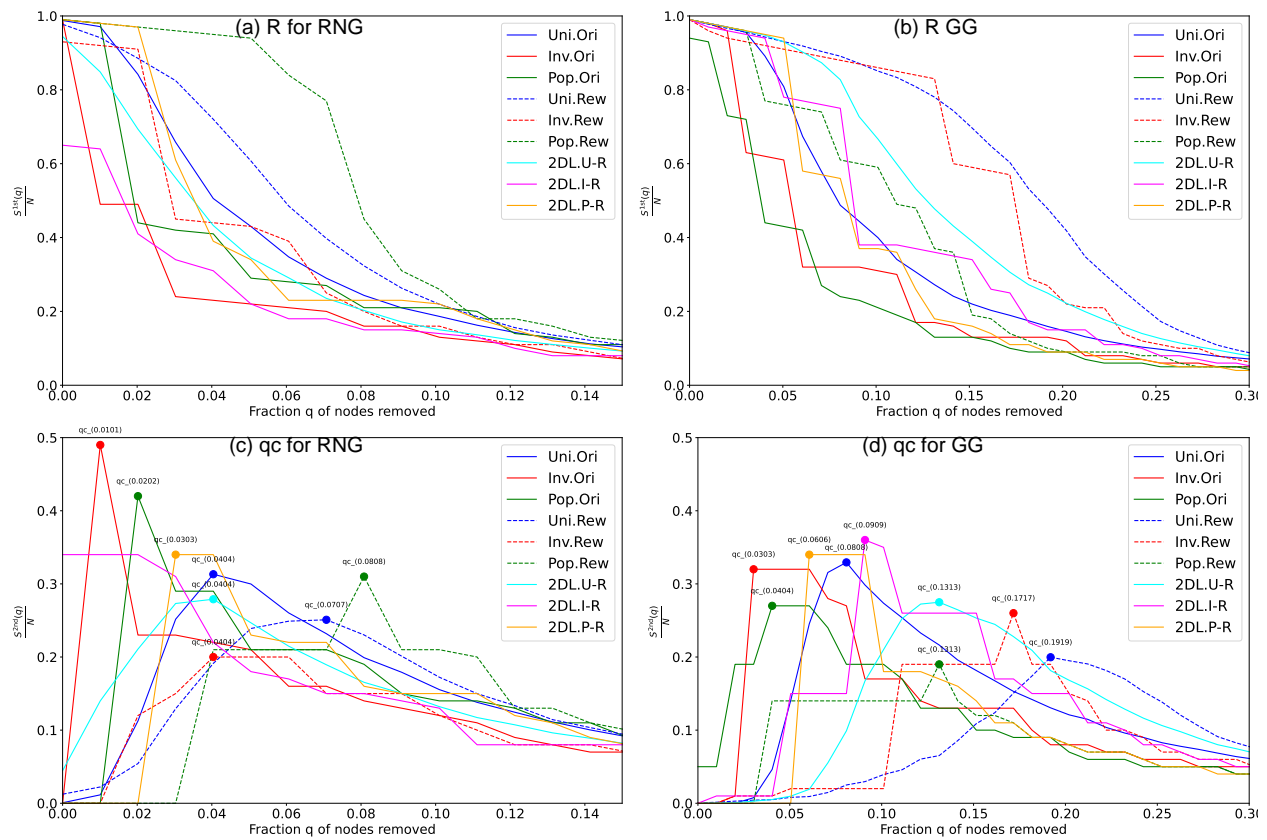


図 66：福岡ネットワーク ( $N = 100$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

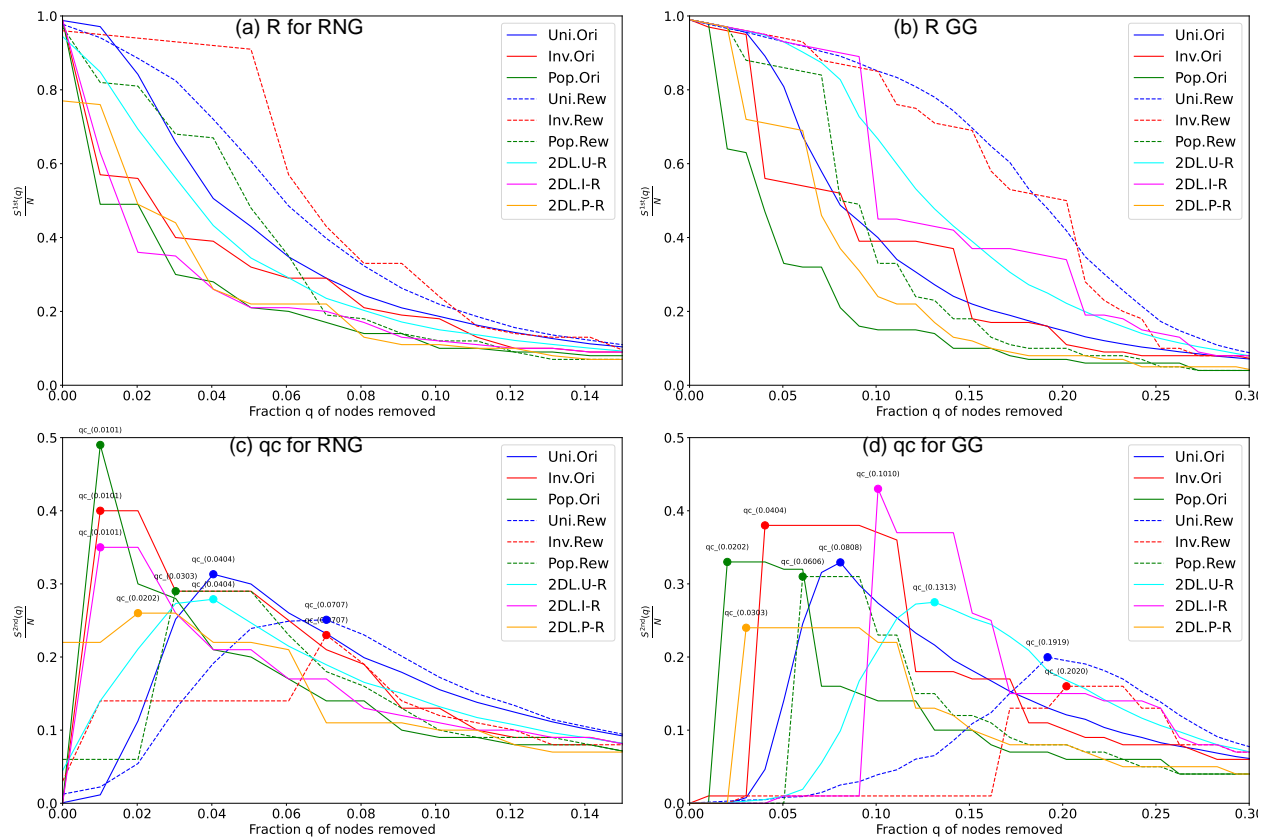


図 67：広島ネットワーク ( $N = 100$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

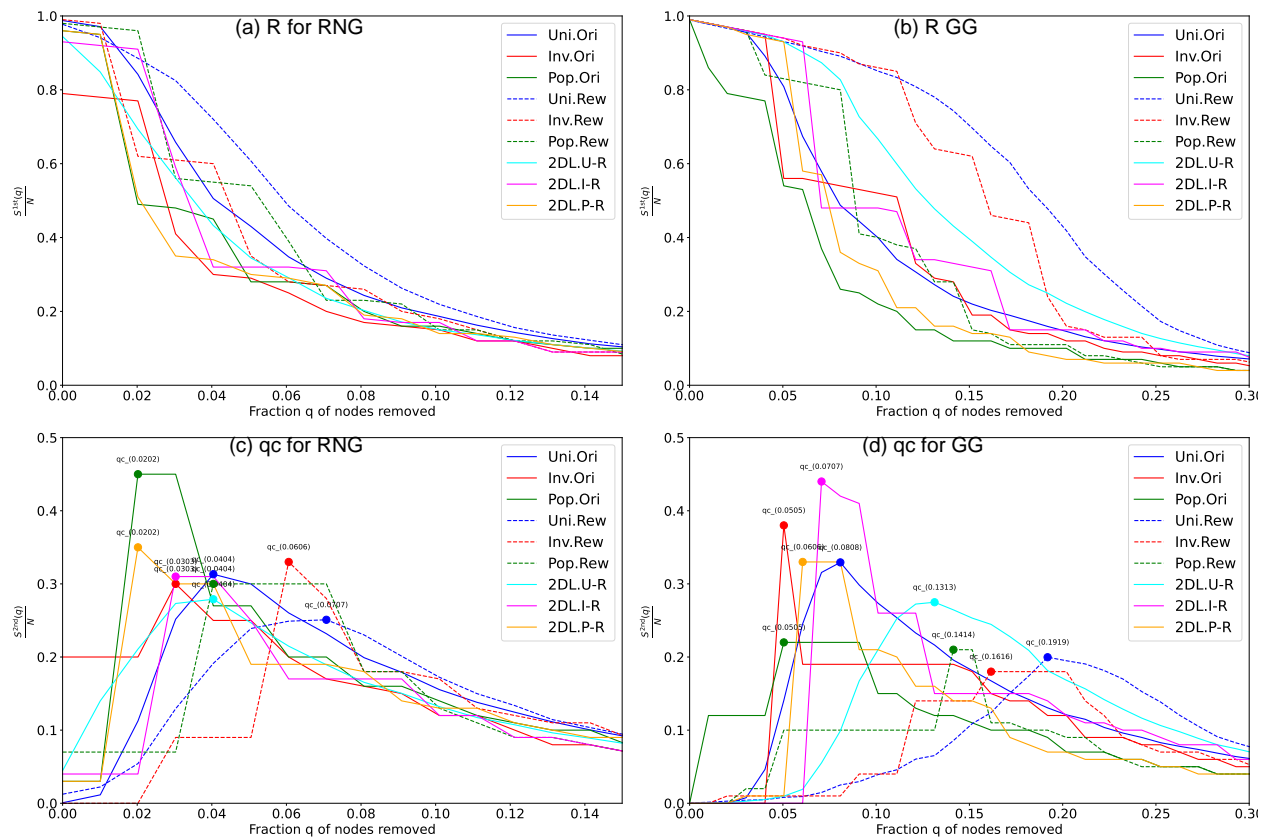


図 68：京阪ネットワーク ( $N = 100$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

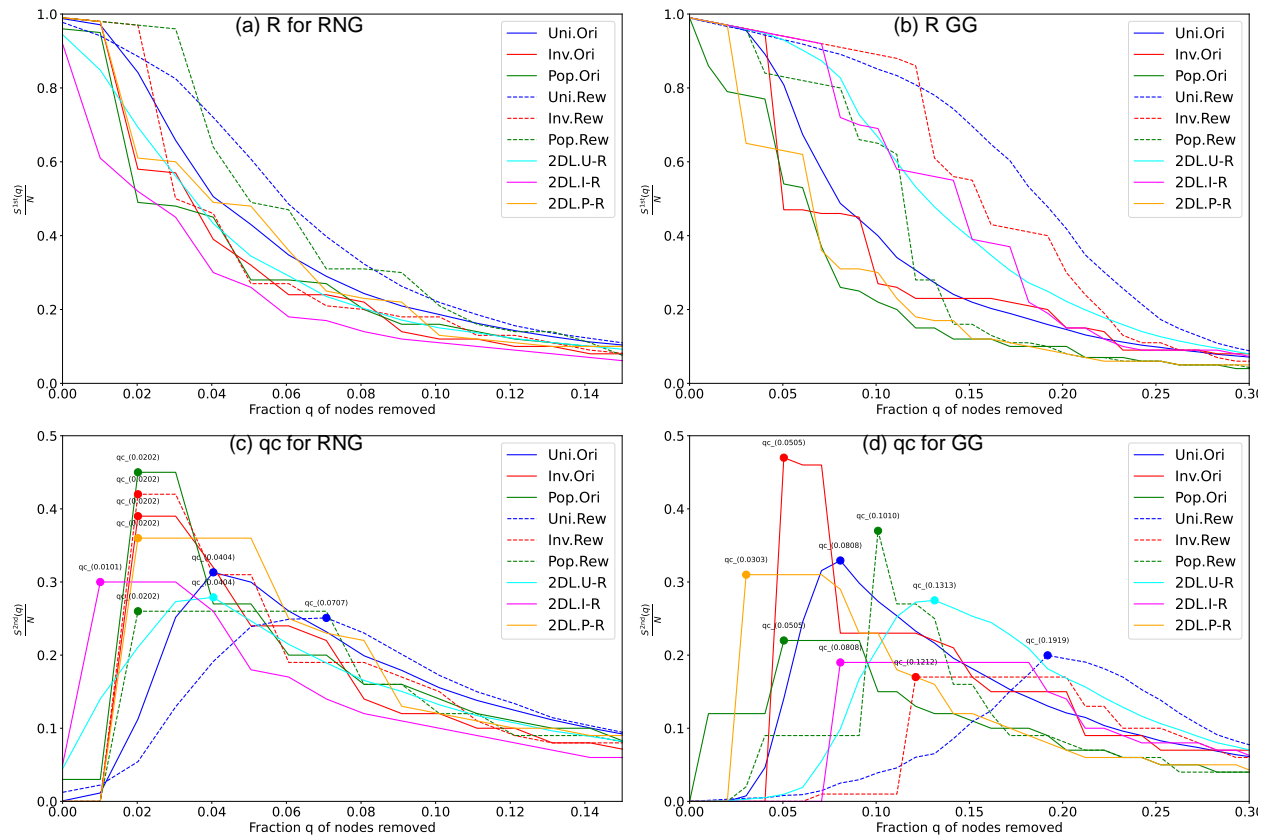


図 69：名古屋ネットワーク ( $N = 100$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

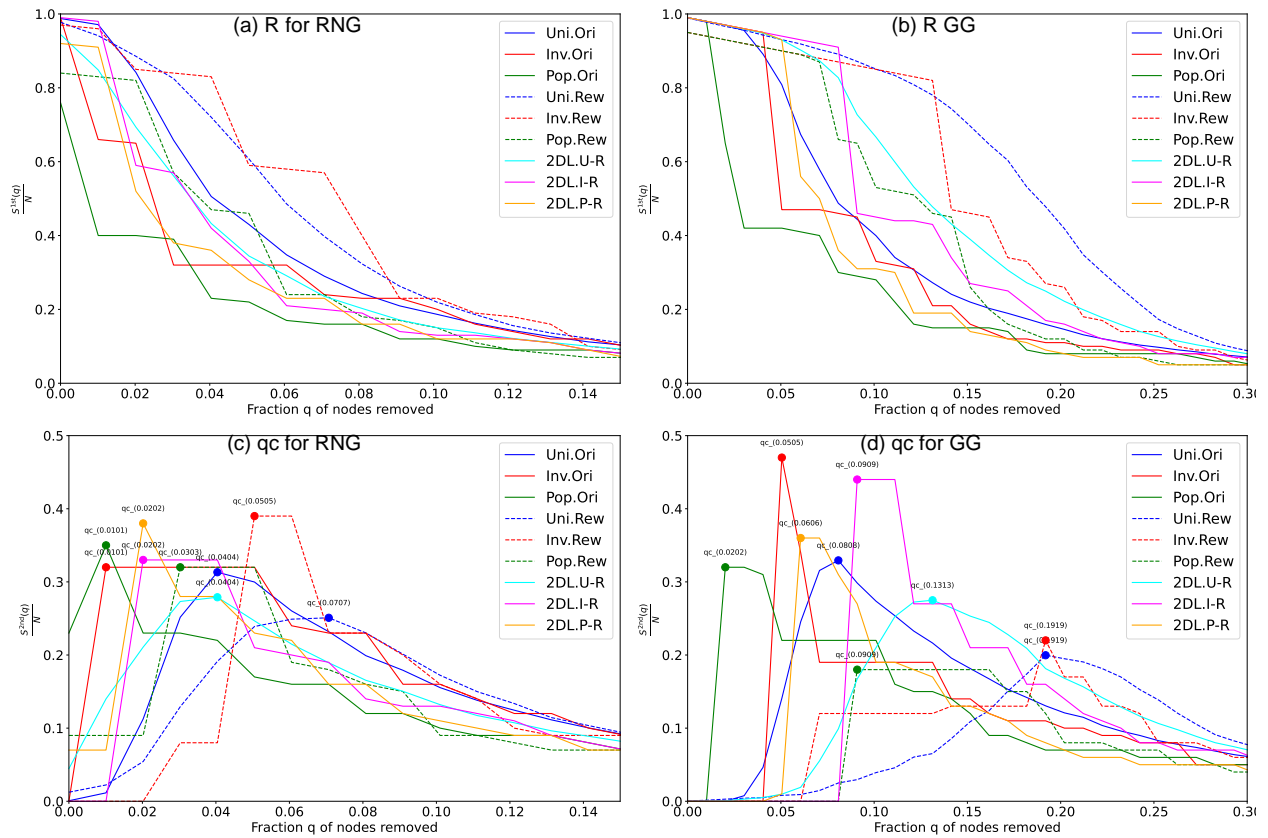


図 70：東京ネットワーク ( $N = 100$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

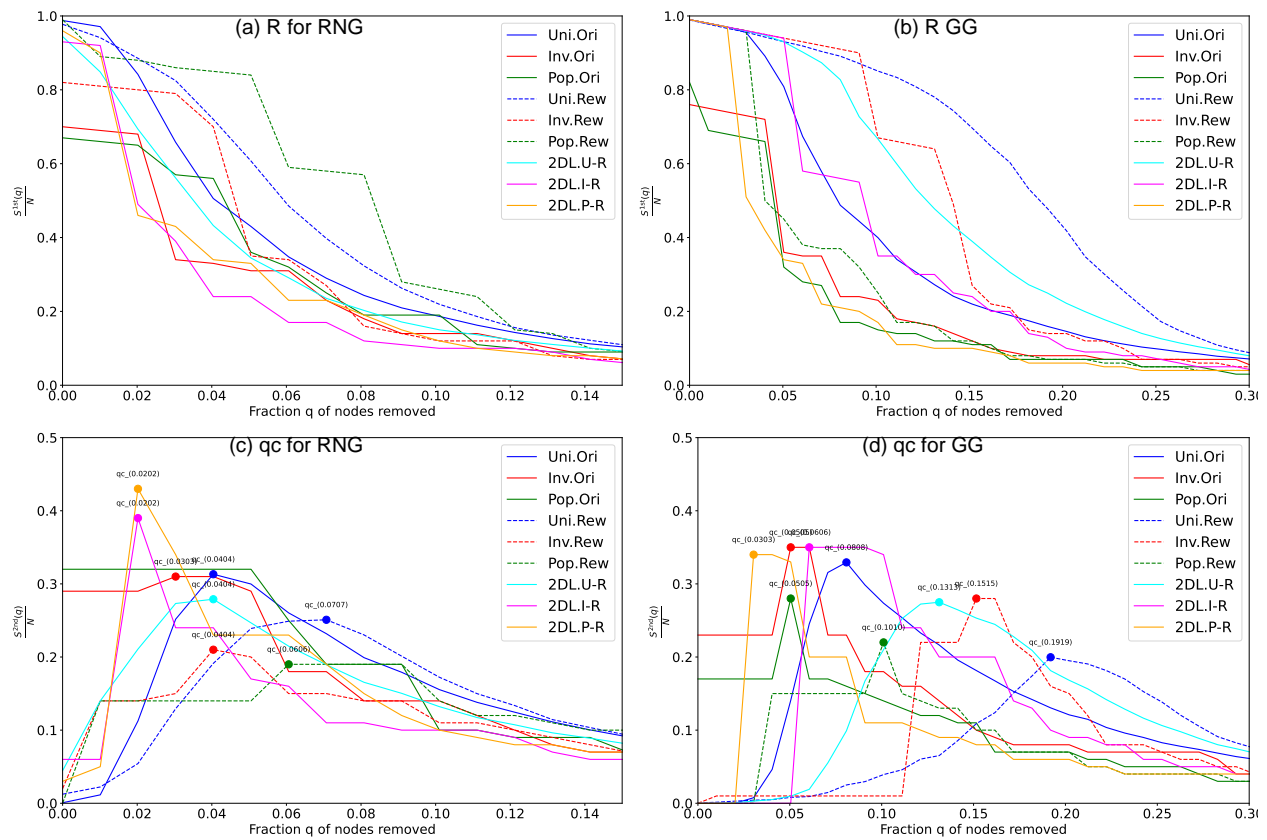


図 71：仙台ネットワーク ( $N = 100$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

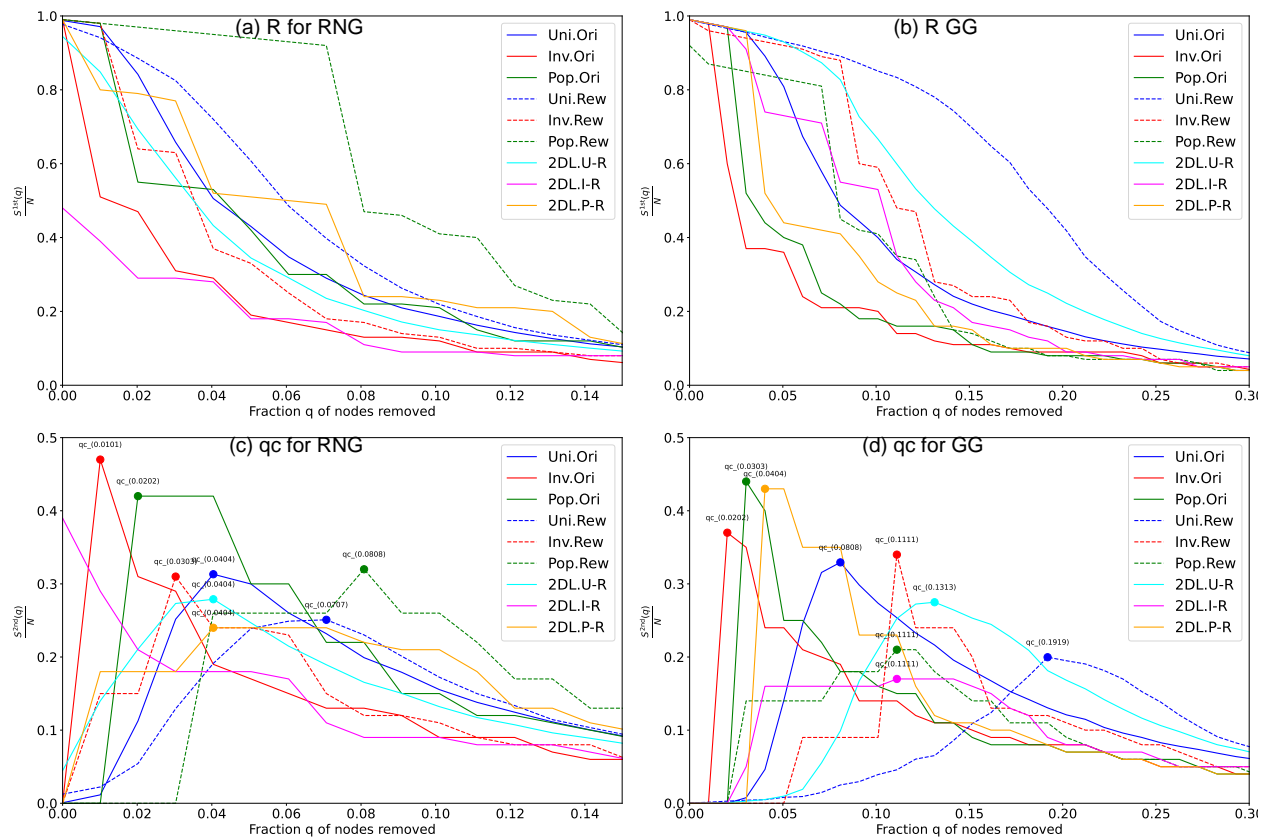


図 72：札幌ネットワーク ( $N = 100$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

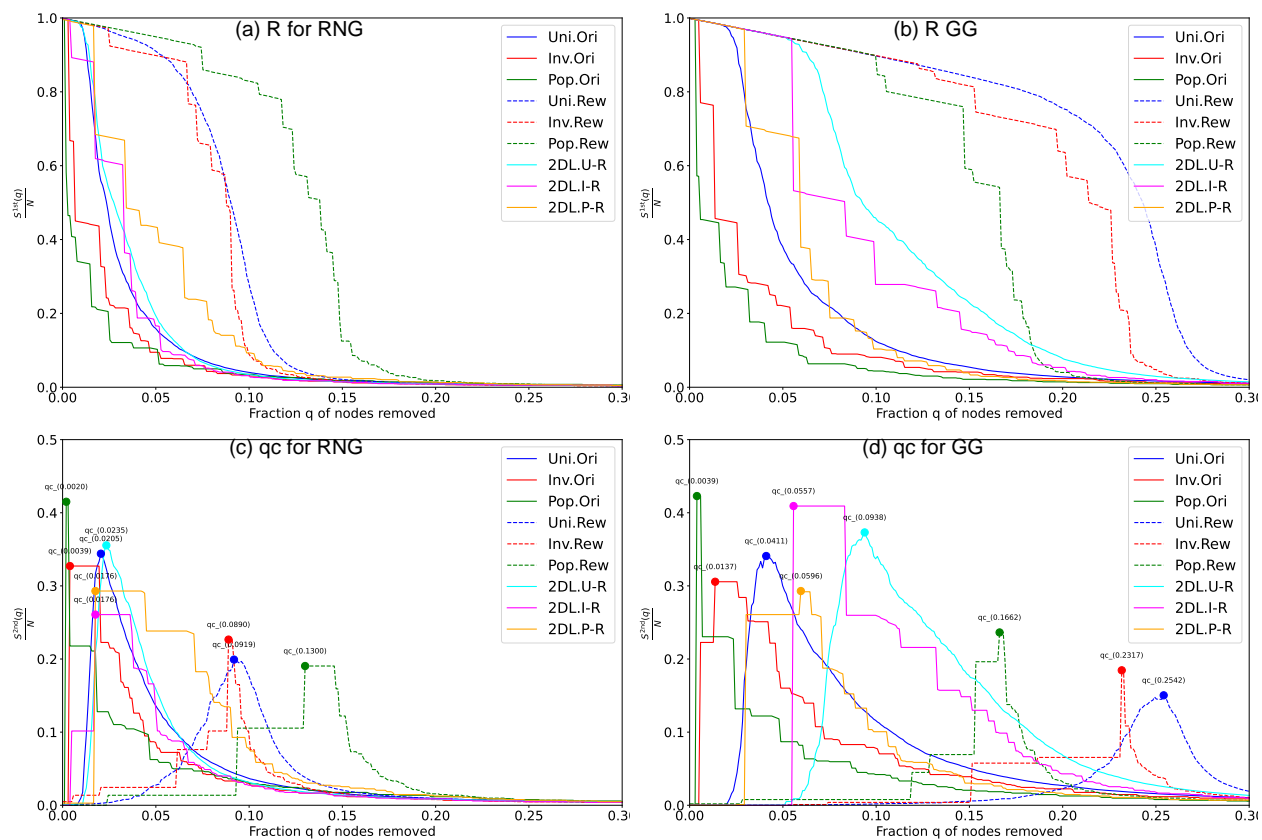


図 73：福岡ネットワーク ( $N = 1024$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

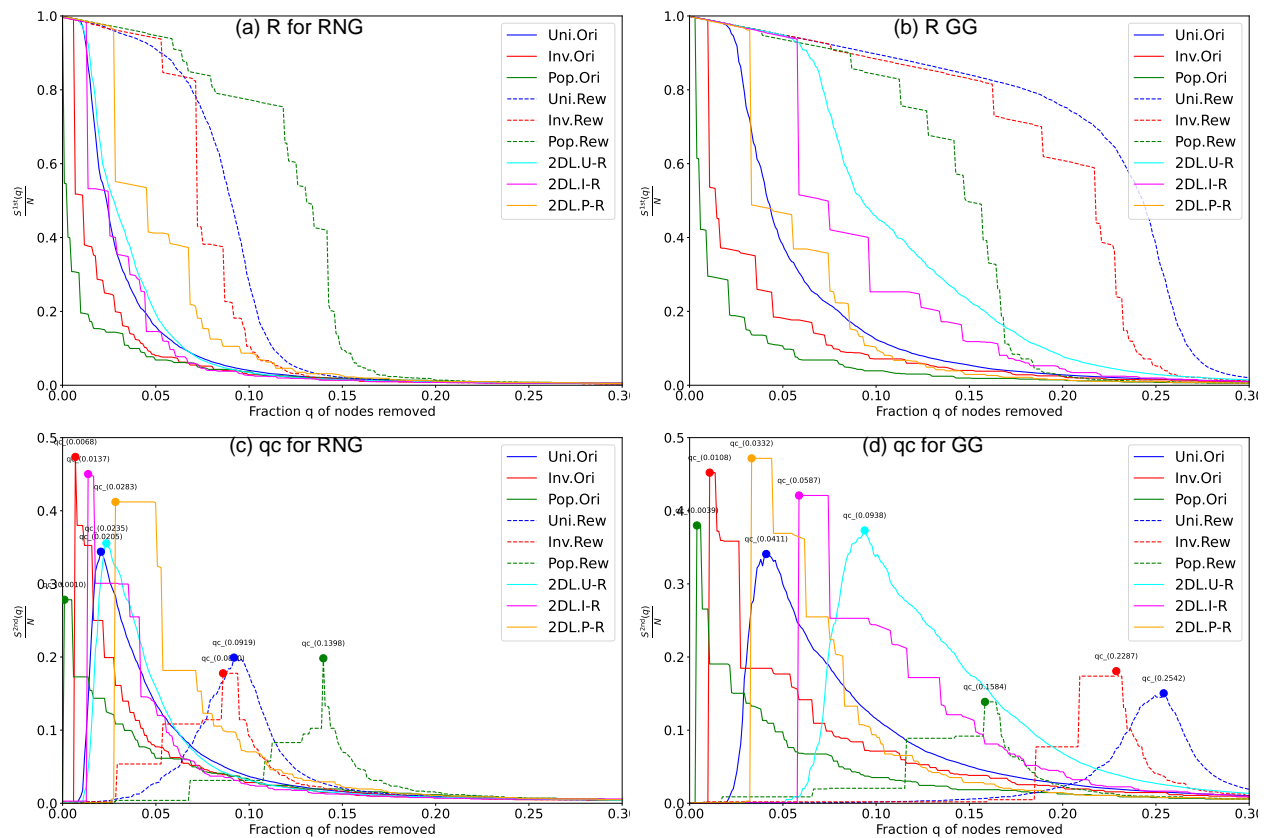


図 74 : 広島ネットワーク ( $N = 1024$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

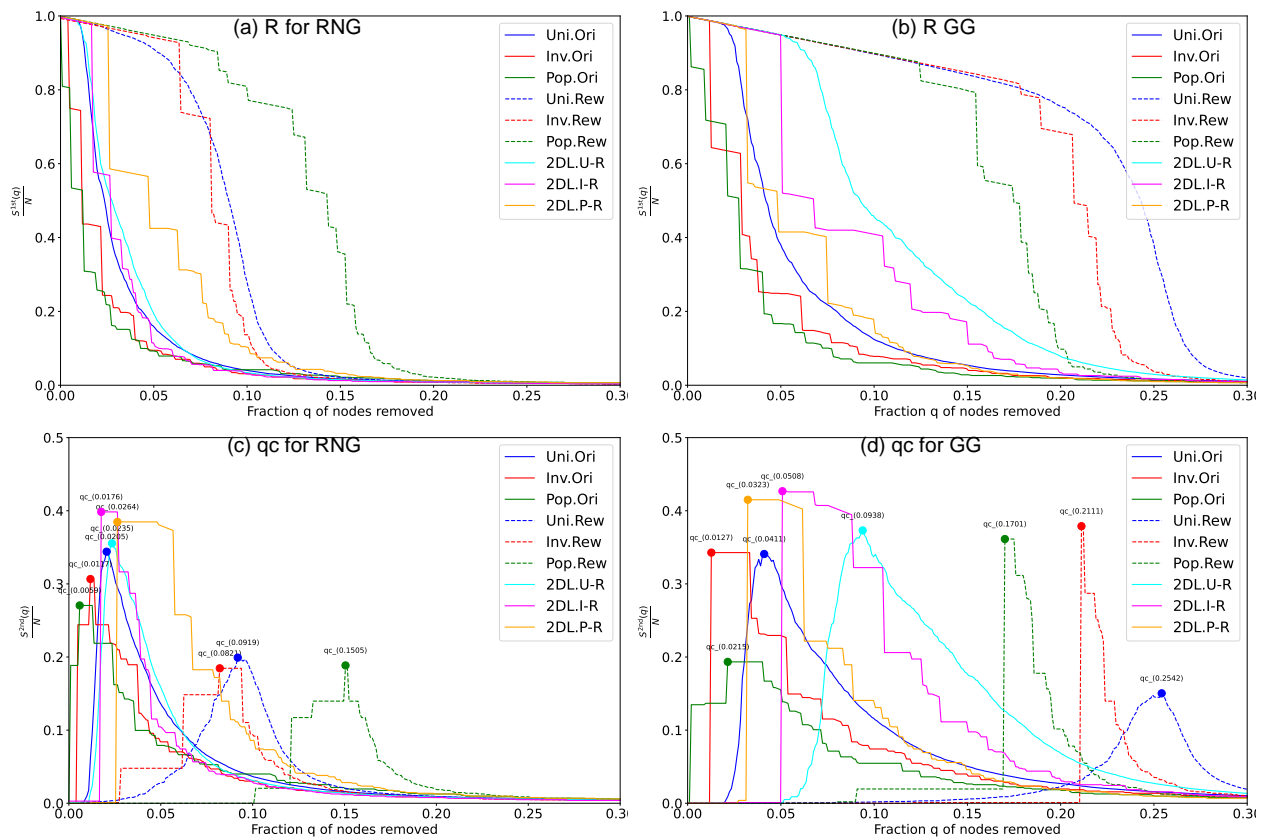


図 75：京阪ネットワーク ( $N = 1024$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

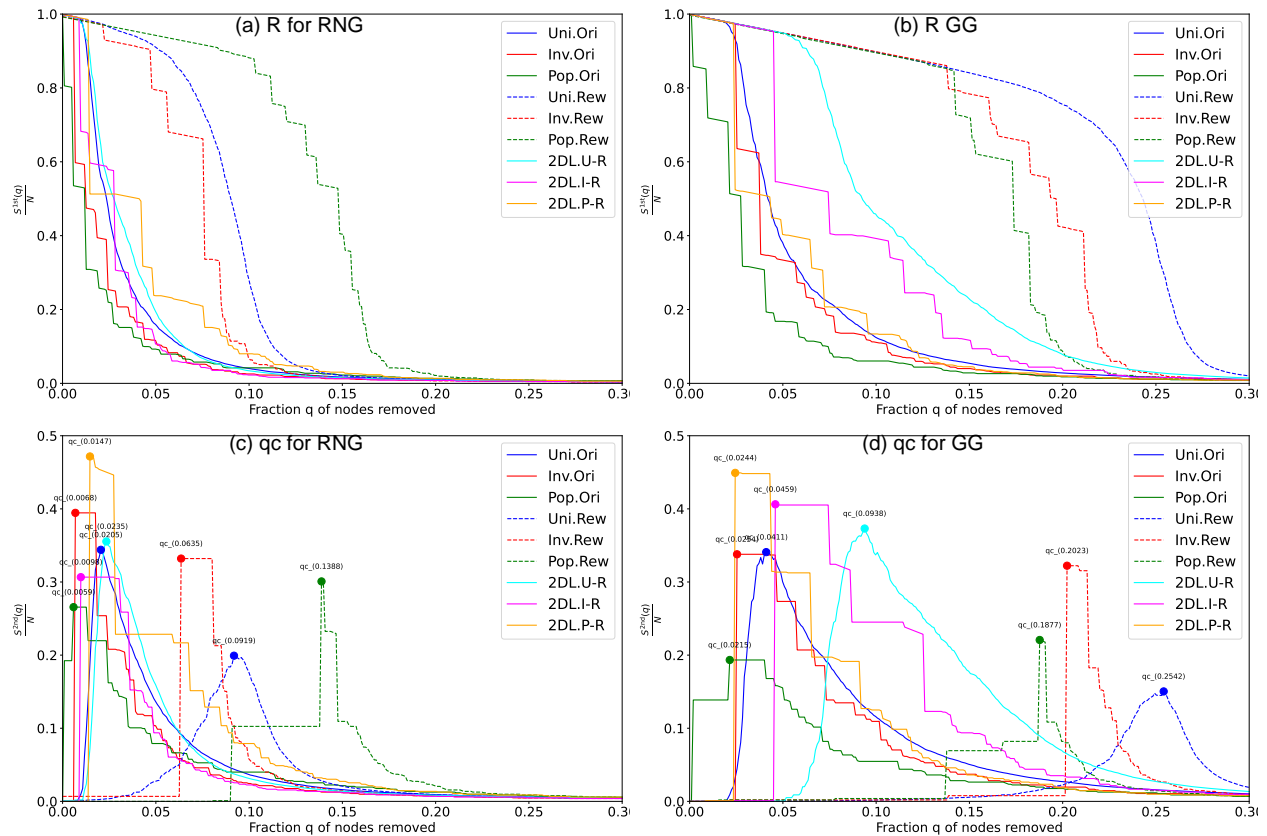


図 76：名古屋ネットワーク ( $N = 1024$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

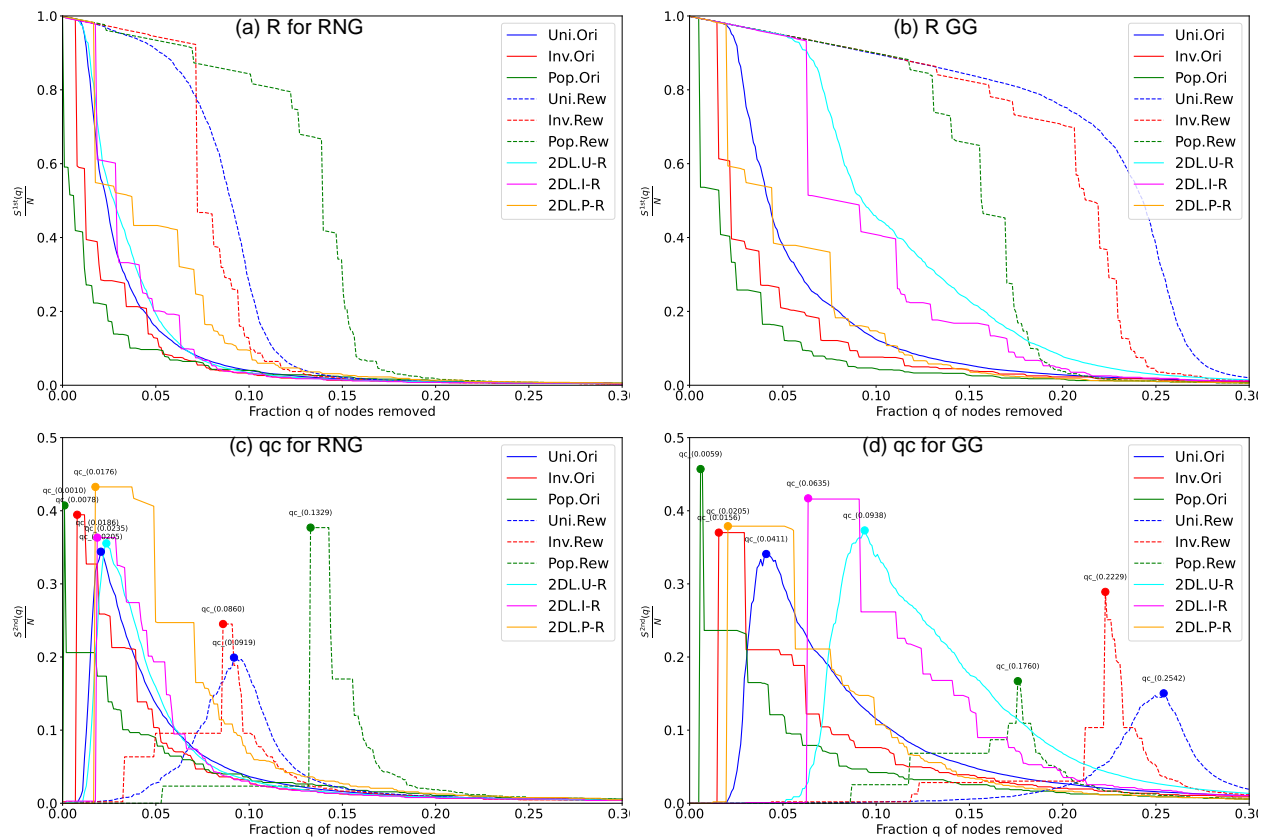


図 77：仙台ネットワーク ( $N = 1024$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

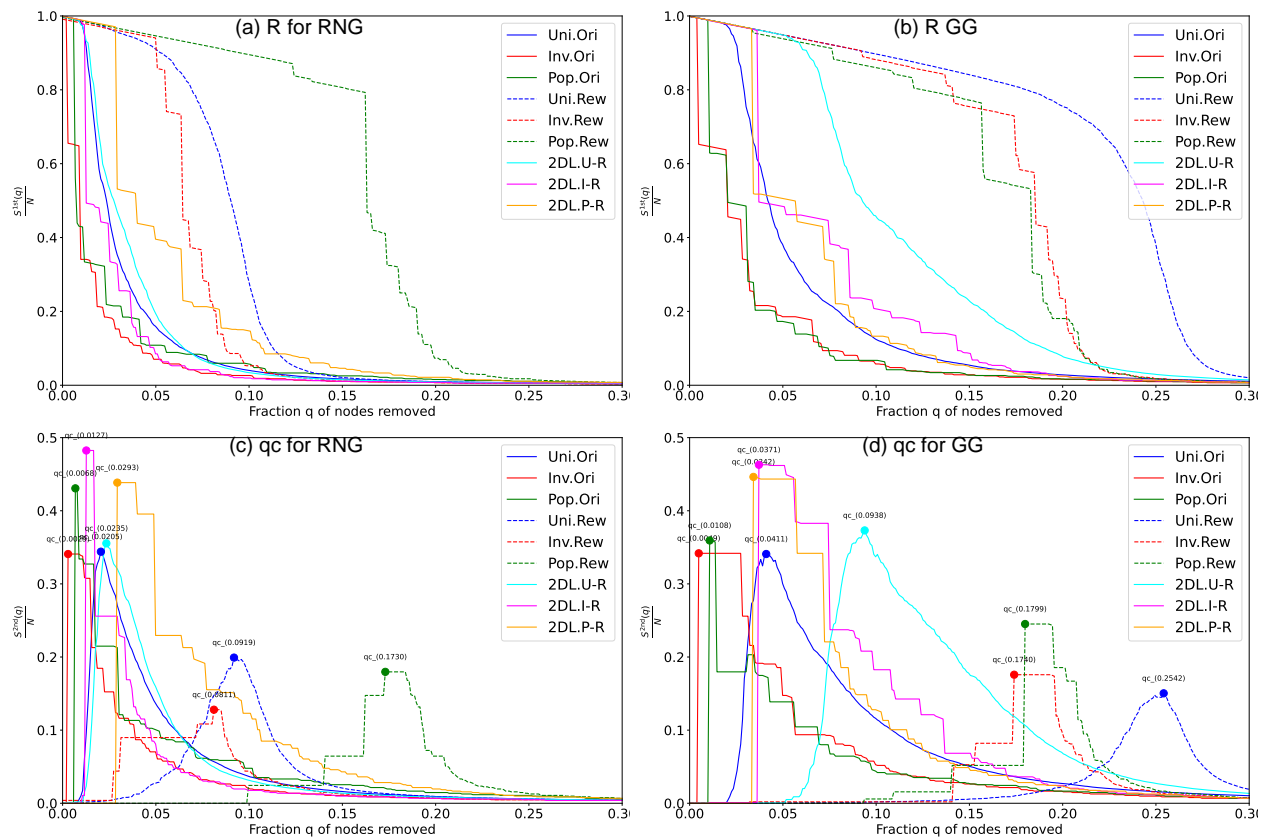


図 78：札幌ネットワーク ( $N = 1024$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

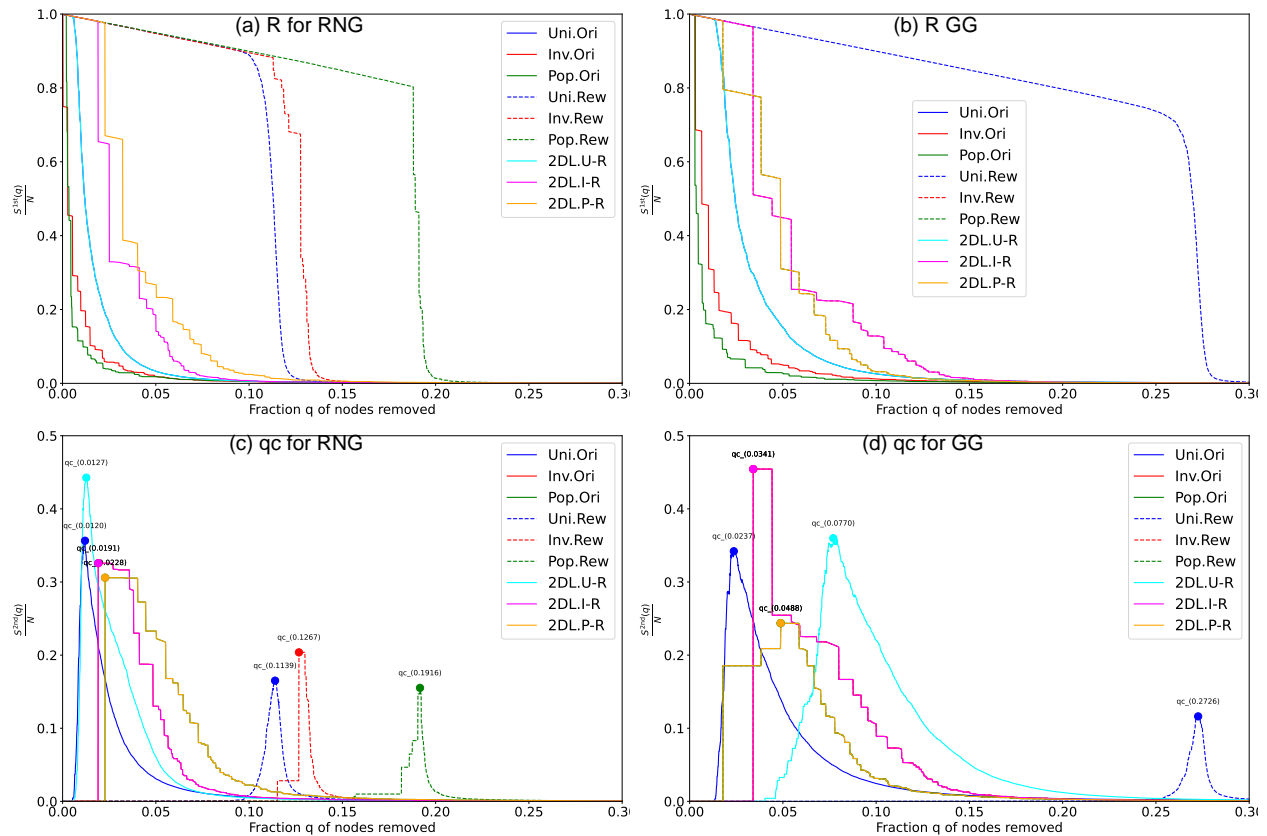


図 79：福岡ネットワーク ( $N = 10000$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

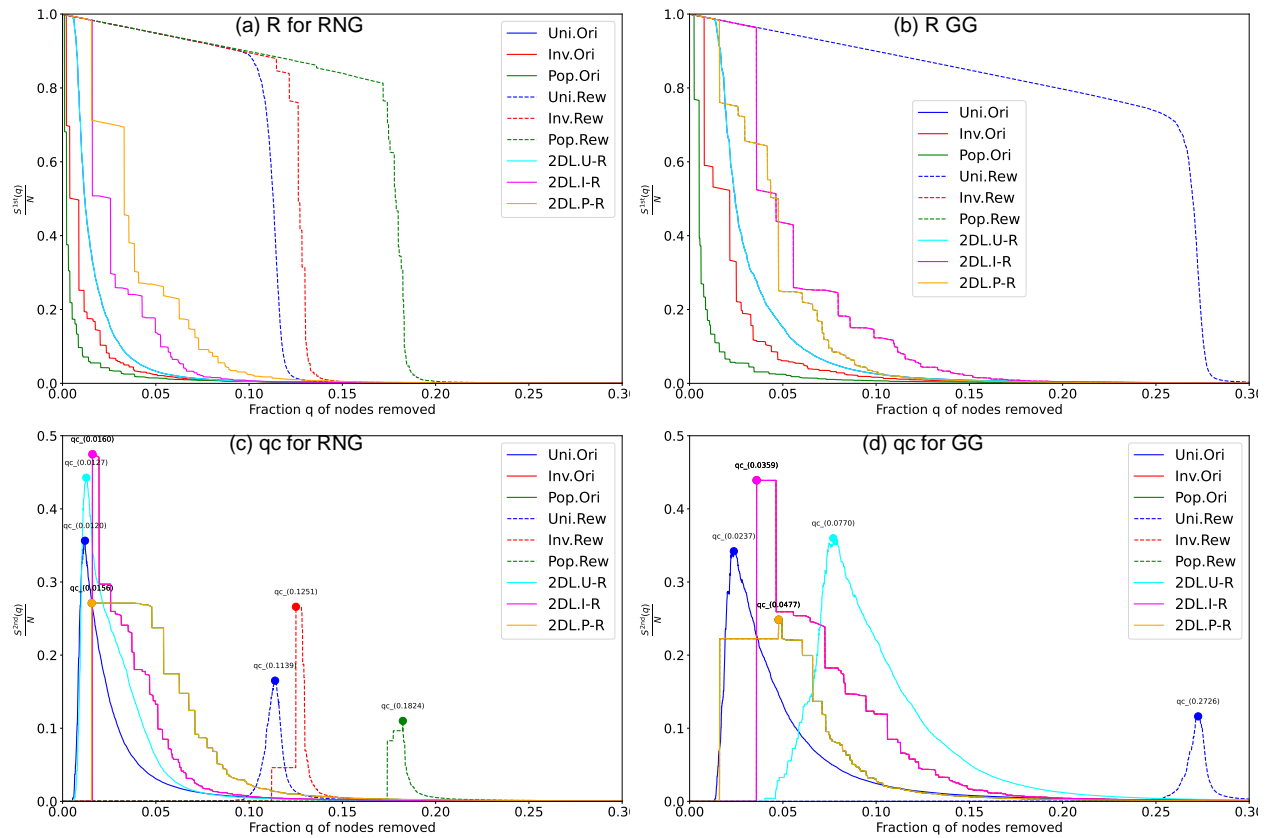


図 80 : 広島ネットワーク ( $N = 10000$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

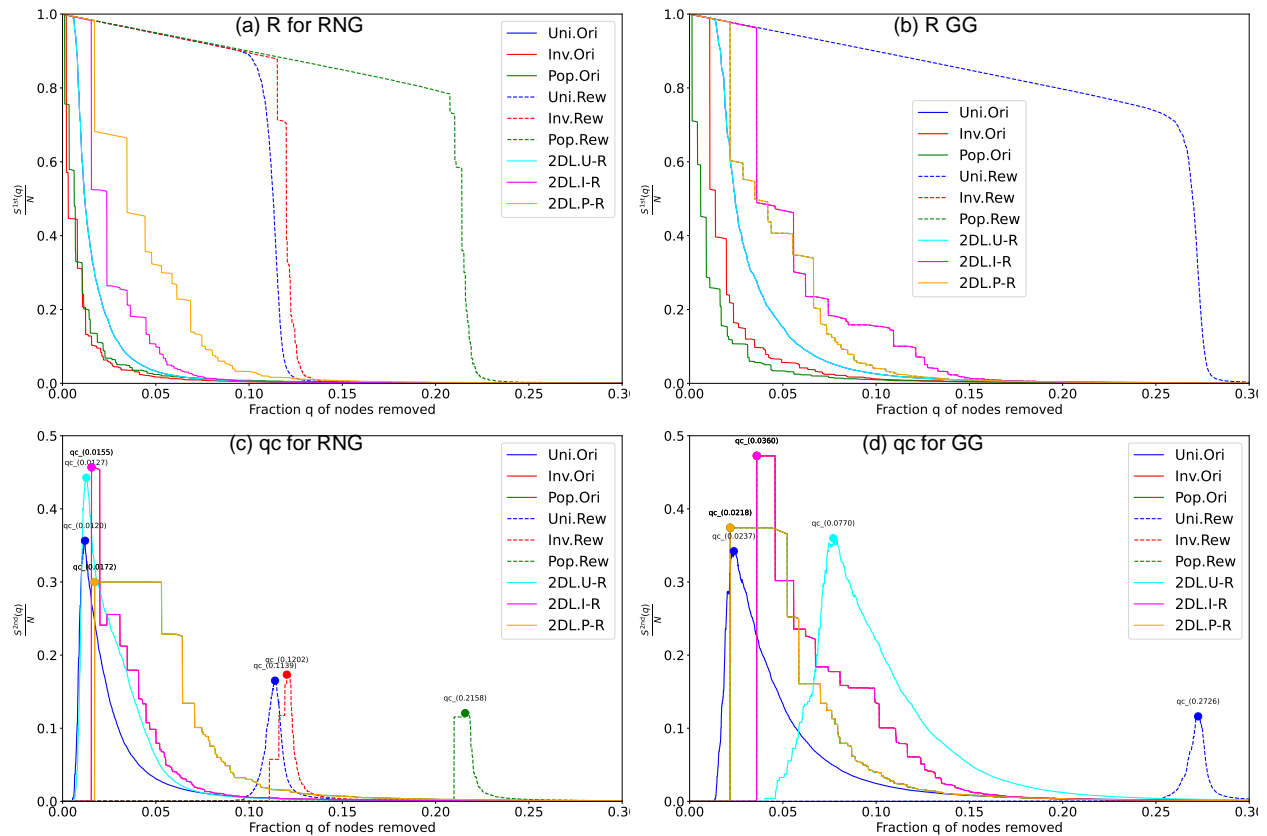


図 81：京阪ネットワーク ( $N = 10000$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

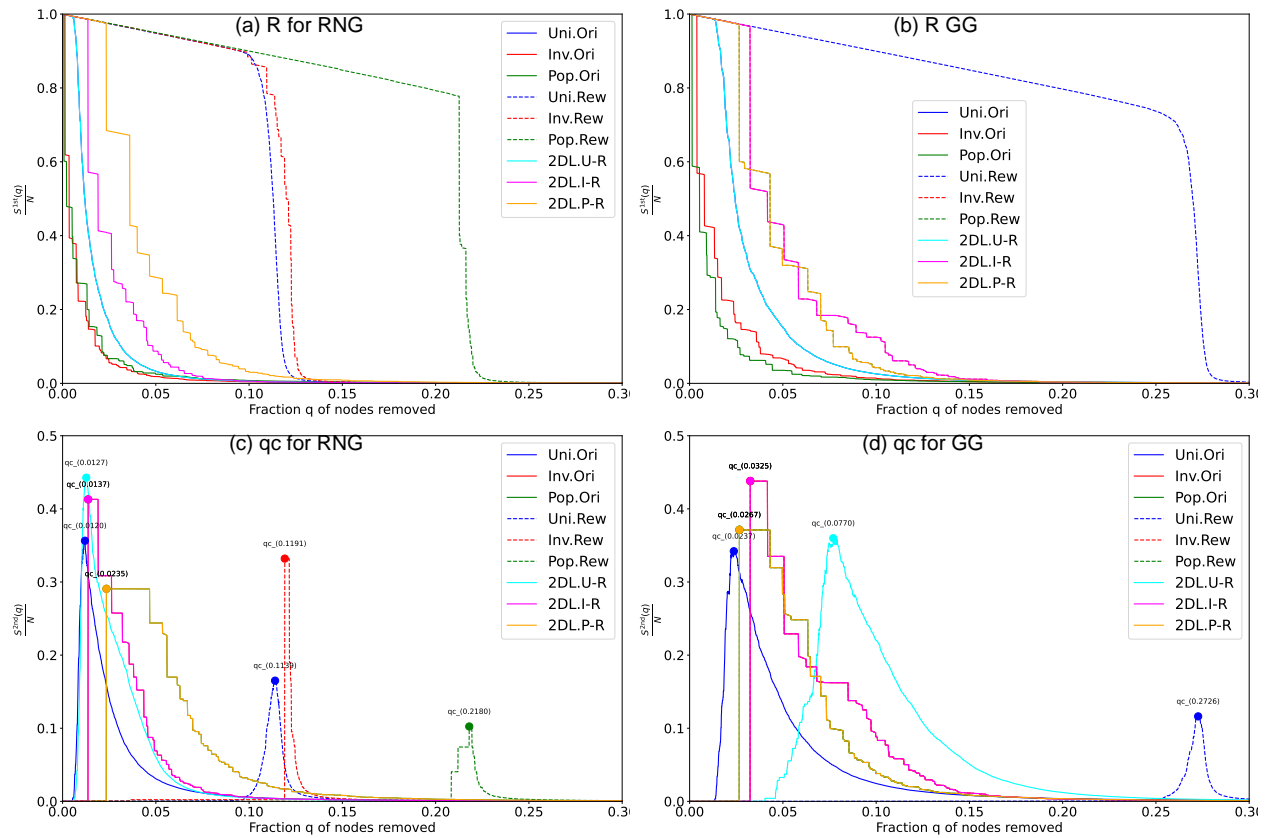


図 82：名古屋ネットワーク ( $N = 10000$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

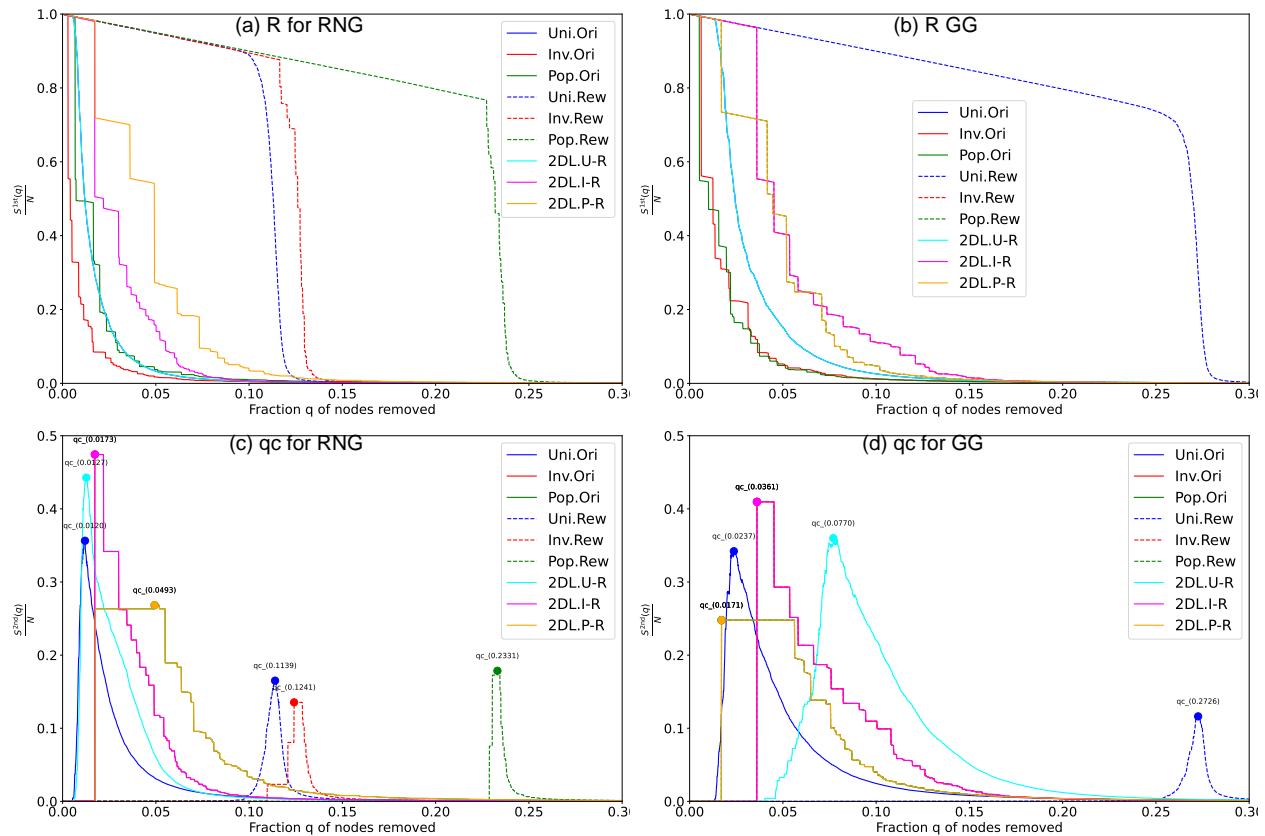


図 83：東京ネットワーク ( $N = 10000$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

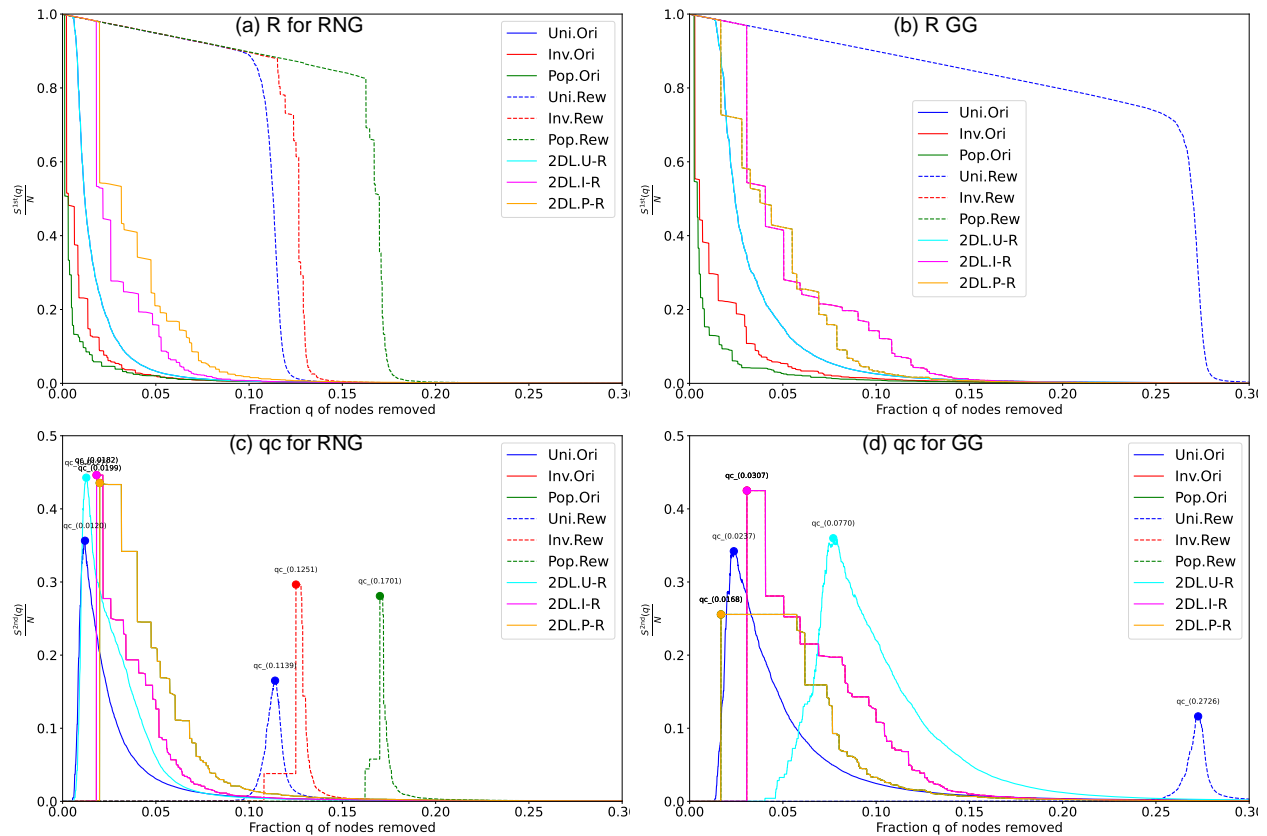


図 84：仙台ネットワーク ( $N = 10000$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

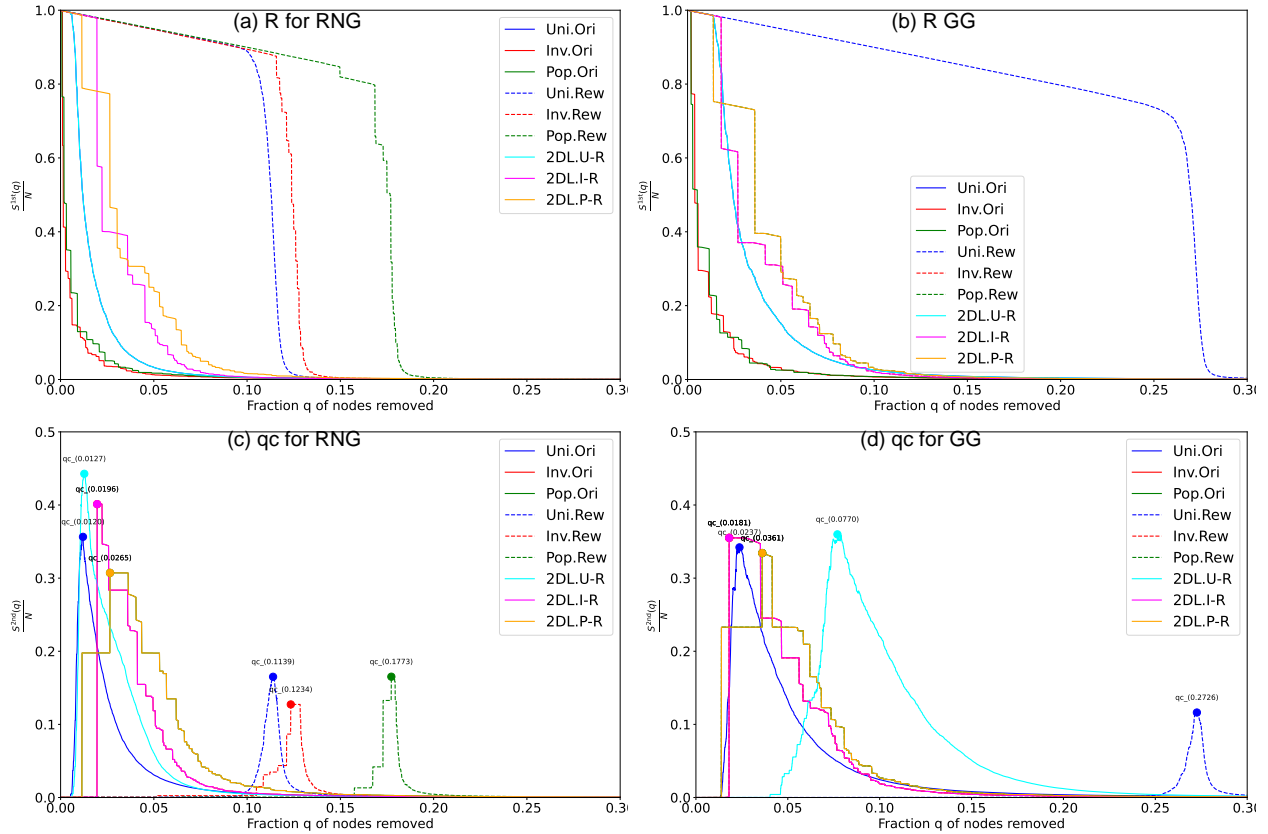


図 85：札幌ネットワーク ( $N = 10000$ ) に対する再計算媒介中心性 (RB) 攻撃下でのロバスト性. Rew (ランダム化ネットワーク) および 2DL の再配線過程はいずれも元の次数分布を保持する. 評価指標として, (a)(b) 最大連結成分の相対サイズ  $S^{1st}(q)/N$ , および (c)(d) 第 2 最大連結成分の相対サイズ  $S^{2nd}(q)/N$  が最大となる点での臨界割合  $q_c$  を用いる.

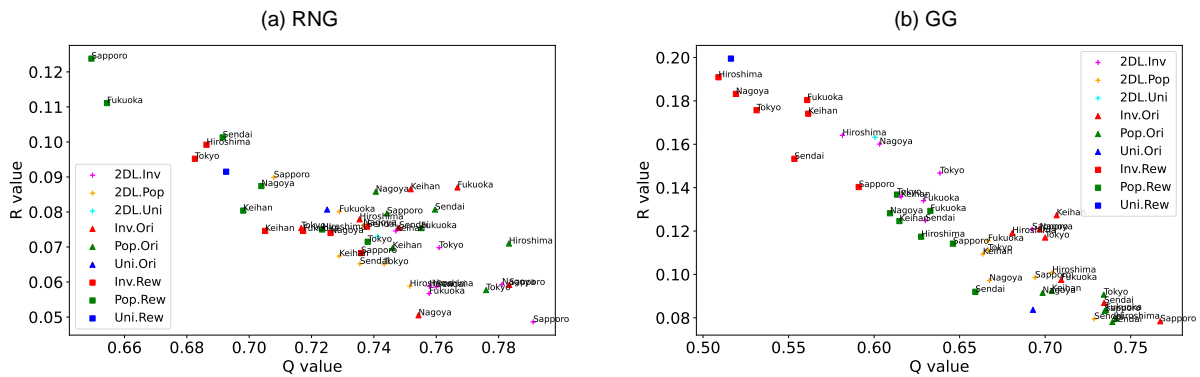


図 86： $N = 100$  のネットワークにおけるロバスト性指標  $R^{RB}$  とモジュラリティ  $Q$  の関係.

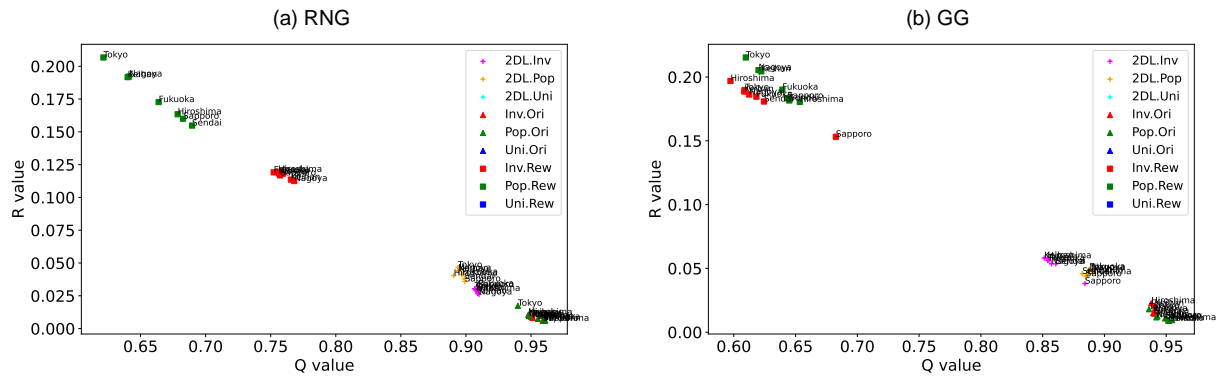


図 87:  $N = 10000$  のネットワークにおけるロバスト性指標  $R^{RB}$  とモジュラリティ  $Q$  の関係.

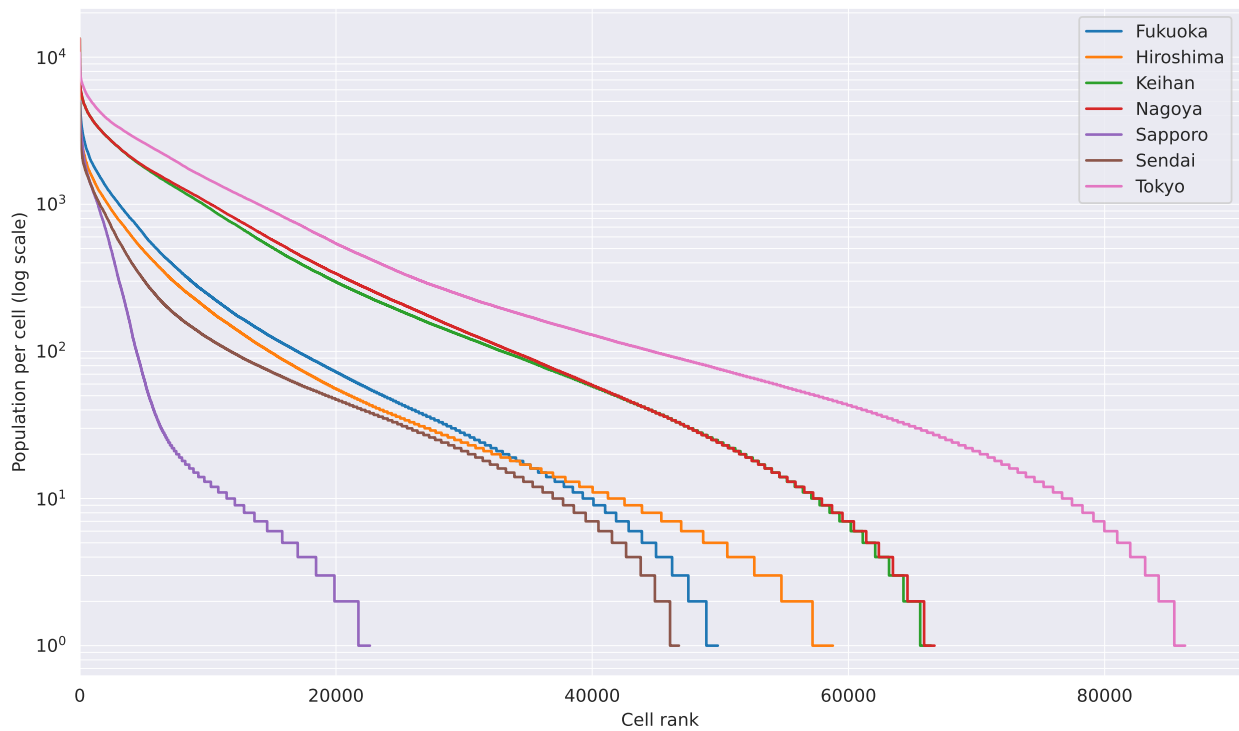


図 88: 日本の主要 7 地域における  $500\text{m} \times 500\text{m}$  メッシュあたりの人口を, 人口の多い順に並べた半対数プロット. 各曲線は地域を表す. 対数スケール上で線形に減衰していることから, 少数のメッシュに人口が集中していることがわかる. このヘビーテール分布は, Pop. および Inv. ネットワークにおけるランクに基づくノード選択の妥当性を支持する.

Cities	$R^{RB}$				$q_c^{RB}$			
	RNG		GG		RNG		GG	
	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,
Fukuoka	0.0870 $\Delta$	0.0754 $\nabla$	0.0975 $\Delta$	0.0837	0.0101 $\nabla$	0.0202 $\nabla$	0.0303 $\nabla$	0.0404 $\nabla$
Hiroshima	0.0779 $\nabla$	0.0710 $\nabla$	0.1191 $\Delta$	0.0796 $\nabla$	0.0101 $\nabla$	0.0101 $\nabla$	0.0404 $\nabla$	0.0202 $\nabla$
Keihan	0.0865 $\Delta$	0.0697 $\nabla$	0.1273 $\Delta$	0.0924 $\Delta$	0.0303 $\nabla$	0.0202 $\nabla$	0.0505 $\nabla$	0.0505 $\nabla$
Nagoya	0.0505 $\nabla$	0.0858 $\Delta$	0.1208 $\Delta$	0.0915 $\Delta$	0.0202 $\nabla$	0.0202 $\nabla$	0.0505 $\nabla$	0.0505 $\nabla$
Tokyo	0.0754 $\nabla$	0.0577 $\nabla$	0.1170 $\Delta$	0.0907 $\Delta$	0.0101 $\nabla$	0.0101 $\nabla$	0.0505 $\nabla$	0.0202 $\nabla$
Sendai	0.0755 $\nabla$	0.0807	0.0869 $\Delta$	0.0781 $\nabla$	0.0303 $\nabla$	0.0000 $\nabla$	0.0505 $\nabla$	0.0505 $\nabla$
Sapporo	0.0592 $\nabla$	0.0796 $\nabla$	0.0784 $\nabla$	0.0832 $\nabla$	0.0101 $\nabla$	0.0202 $\nabla$	0.0202 $\nabla$	0.0303 $\nabla$
Uniform	0.0807		0.0837		0.0404		0.0808	
2D Lattice	0.1636				0.0909			

表7:  $N = 100$  のネットワークにおける再計算媒介中心性 (RB) 攻撃に対するロバスト性指標 ( $R^{RB}$ ) および臨界割合 ( $q_c^{RB}$ ) . 値が大きいほど連結ロバスト性が高いことを示す.  $R^{RB}$  において,  $\Delta$  の付いた値は Uni.-based の場合よりロバスト性が高いことを示し,  $\nabla$  の付いた値は Uni.-based の場合よりロバスト性が低いことを示す.  $q_c^{RB}$  については, 全ての値が Uni.-based より低いため,  $\nabla$  が付されている.

Cities	$R^{RB}$				$q_c^{RB}$			
	RNG		GG		RNG		GG	
	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,
Fukuoka	0.0237 $\nabla$	0.0188 $\nabla$	0.0379 $\nabla$	0.0253 $\nabla$	0.0039 $\nabla$	0.0020 $\nabla$	0.0137 $\nabla$	0.0039 $\nabla$
Hiroshima	0.0234 $\nabla$	0.0162 $\nabla$	0.0379 $\nabla$	0.0219 $\nabla$	0.0068 $\nabla$	0.0010 $\nabla$	0.0108 $\nabla$	0.0039 $\nabla$
Keihan	0.0258 $\nabla$	0.0232 $\nabla$	0.0448 $\nabla$	0.0375 $\nabla$	0.0117 $\nabla$	0.0059 $\nabla$	0.0127 $\nabla$	0.0215 $\nabla$
Nagoya	0.0262 $\nabla$	0.0233 $\nabla$	0.0548 $\nabla$	0.0370 $\nabla$	0.0068 $\nabla$	0.0059 $\nabla$	0.0254 $\nabla$	0.0215 $\nabla$
Tokyo	0.0271 $\nabla$	0.0284 $\nabla$	0.0486 $\nabla$	0.0446 $\nabla$	0.0098 $\nabla$	0.0059 $\nabla$	0.0235 $\nabla$	0.0205 $\nabla$
Sendai	0.0271 $\nabla$	0.0199 $\nabla$	0.0433 $\nabla$	0.0292 $\nabla$	0.0078 $\nabla$	0.0010 $\nabla$	0.0156 $\nabla$	0.0059 $\nabla$
Sapporo	0.0200 $\nabla$	0.0264 $\nabla$	0.0356 $\nabla$	0.0369 $\nabla$	0.0029 $\nabla$	0.0068 $\nabla$	0.0049 $\nabla$	0.0108 $\nabla$
Uniform	0.0350		0.0620		0.0205		0.0411	
2D Lattice	0.0677				0.0303			

表8:  $N = 1024$  のネットワークにおける再計算媒介中心性 (RB) 攻撃に対するロバスト性指標 ( $R^{RB}$ ) および臨界割合 ( $q_c^{RB}$ ) . 値が大きいほど連結ロバスト性が高いことを示す.  $\nabla$  の付いた値は, RNG および GG のいずれにおいても, Pop.-based および Inv.-based のネットワークが Uni.-based のネットワークよりロバスト性が低いことを示す.

Cities	$R^{RB}$				$q_c^{RB}$			
	RNG		GG		RNG		GG	
	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,
Fukuoka	0.0082 $\nabla$	0.0070 $\nabla$	0.0149 $\nabla$	0.0091 $\nabla$	0.0028 $\nabla$	0.0045 $\nabla$	0.0032 $\nabla$	0.0029 $\nabla$
Hiroshima	0.0106 $\nabla$	0.0059 $\nabla$	0.0227 $\nabla$	0.0095 $\nabla$	0.0021 $\nabla$	0.0011 $\nabla$	0.0079 $\nabla$	0.0052 $\nabla$
Keihan	0.0090 $\nabla$	0.0105 $\nabla$	0.0208 $\nabla$	0.0123 $\nabla$	0.0021 $\nabla$	0.0012 $\nabla$	0.0109 $\nabla$	0.0014 $\nabla$
Nagoya	0.0086 $\nabla$	0.0095 $\nabla$	0.0166 $\nabla$	0.0116 $\nabla$	0.0014 $\nabla$	0.0008 $\nabla$	0.0040 $\nabla$	0.0014 $\nabla$
Tokyo	0.0092 $\nabla$	0.0174 $\nabla$	0.0189 $\nabla$	0.0180 $\nabla$	0.0030 $\nabla$	0.0068 $\nabla$	0.0063 $\nabla$	0.0053 $\nabla$
Sendai	0.0094 $\nabla$	0.0063 $\nabla$	0.0146 $\nabla$	0.0089 $\nabla$	0.0022 $\nabla$	0.0012 $\nabla$	0.0029 $\nabla$	0.0025 $\nabla$
Sapporo	0.0059 $\nabla$	0.0074 $\nabla$	0.0108 $\nabla$	0.0112 $\nabla$	0.0011 $\nabla$	0.0019 $\nabla$	0.0039 $\nabla$	0.0019 $\nabla$
Uniform	0.0173		0.0334		0.0115		0.0229	
2D Lattice	0.0647				0.0679			

表9： $N = 10000$  のネットワークにおける再計算媒介中心性（RB）攻撃に対するロバスト性指標（ $R^{RB}$ ）および臨界割合（ $q_c^{RB}$ ）. 値が大きいほど連結ロバスト性が高いことを示す.  $\nabla$  の付いた値は, RNG および GG のいずれにおいても, Pop.-based および Inv.-based のネットワークが Uni.-based のネットワークよりロバスト性が低いことを示す.

Cities	RNG		GG	
	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,
Fukuoka	2.28	2.5	3.14	2.72
Hiroshima	2.34	2.24	3.52	2.6
Keihan	2.3	2.34	3.34	2.82
Nagoya	2.26	2.34	3.36	2.82
Tokyo	2.36	2.24	3.38	2.8
Sendai	2.24	2.38 $\Delta$	3.14	2.5
Sapporo	2.18	2.54	2.92	2.62
Uniform	2.37		3.56	
2D Lattice	3.6			

表10： $N = 100$  のネットワークにおける平均次数  $\langle k \rangle$ . 値が大きいほど, 各ノードが持つリンク数が多いことを示す.  $\Delta$  の付いた値は, RNG および GG のいずれにおいても, Pop.-based および Inv.-based のネットワークが Uni.-based のネットワークより高い平均次数を持つことを示す.

Cities	RNG		GG	
	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,
Fukuoka	2.67 $\Delta$	3.07 $\Delta$	3.35	3.21
Hiroshima	2.66 $\Delta$	3.01 $\Delta$	3.49	3.14
Keihan	2.62 $\Delta$	3.21 $\Delta$	3.39	3.32
Nagoya	2.61 $\Delta$	3.21 $\Delta$	3.38	3.33
Tokyo	2.65 $\Delta$	3.32 $\Delta$	3.42	3.41
Sendai	2.66 $\Delta$	2.95 $\Delta$	3.31	3.19
Sapporo	2.66 $\Delta$	2.99 $\Delta$	2.99	3.19
Uniform	2.54		3.96	
2D Lattice	3.96			

表 11： $N = 10000$  のネットワークにおける平均次数  $\langle k \rangle$ . 値が大きいほど、各ノードが持つリンク数が多いことを示す.  $\Delta$  の付いた値は, RNG および GG のいずれにおいても, Pop.-based および Inv.-based のネットワークが Uni.-based のネットワークより高い平均次数を持つことを示す.

Cities	RNG		GG	
	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,
Fukuoka	0.7668 $\Delta$	0.7551 $\Delta$	0.7094 $\Delta$	0.7356 $\Delta$
Hiroshima	0.7354 $\Delta$	0.7833 $\Delta$	0.6808 $\nabla$	0.7414 $\Delta$
Keihan	0.7518 $\Delta$	0.746 $\Delta$	0.7067 $\Delta$	0.7039 $\Delta$
Nagoya	0.7543 $\Delta$	0.7406 $\Delta$	0.6968 $\Delta$	0.6985 $\Delta$
Tokyo	0.7167 $\nabla$	0.776 $\Delta$	0.7 $\Delta$	0.7343 $\Delta$
Sendai	0.7481 $\Delta$	0.7596 $\Delta$	0.7345 $\Delta$	0.7393 $\Delta$
Sapporo	0.7834 $\Delta$	0.7442 $\Delta$	0.7673 $\Delta$	0.7348 $\Delta$
Uniform	0.725		0.6929	

表 12： $N = 100$  のネットワークにおけるモジュラリティ  $Q$ . 値が大きいほどコミュニティ構造がより強いことを示す.  $\Delta$  および  $\nabla$  の付いた値は, RNG および GG のいずれにおいても, Pop.-based および Inv.-based のネットワークが Uni.-based のネットワークよりモジュラリティが高い ( $\Delta$ ) あるいは低い ( $\nabla$ ) ことを示す. 一般に, Pop.-based および Inv.-based のネットワークは, Uni.-based のネットワークと比較してより高いモジュラリティを示す傾向がある.

Cities	RNG		GG	
	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,
Fukuoka	0.9514 $\Delta$	0.9603 $\Delta$	0.9395 $\Delta$	0.9516 $\Delta$
Hiroshima	0.948 $\Delta$	0.9609 $\Delta$	0.9379 $\Delta$	0.9549 $\Delta$
Keihan	0.9509 $\Delta$	0.9481 $\Delta$	0.9406 $\Delta$	0.9429 $\Delta$
Nagoya	0.9506 $\Delta$	0.9485 $\Delta$	0.9406 $\Delta$	0.942 $\Delta$
Tokyo	0.9499 $\Delta$	0.9399 $\Delta$	0.9411 $\Delta$	0.9361 $\Delta$
Sendai	0.9508 $\Delta$	0.9594 $\Delta$	0.9406 $\Delta$	0.9525 $\Delta$
Sapporo	0.9589 $\Delta$	0.9553 $\Delta$	0.9492 $\Delta$	0.9495 $\Delta$
Uniform	0.9397		0.9303	

表 13： $N = 10000$  のネットワークにおけるモジュラリティ  $Q$ . 値が大きいほどコミュニティ構造がより強いことを示す.  $\Delta$  の付いた値は, RNG および GG のいずれにおいても, Pop.-based および Inv.-based のネットワークが Uni.-based のネットワークより高いモジュラリティを持つことを示す. 一般に, Pop.-based および Inv.-based のネットワークは, Uni.-based のネットワークと比較してより高いモジュラリティを示す傾向がある.

Network	Metric	F-value	p-value	$\eta^2$	Distributional Differences
RNG	$R^{RB}$	37.86	$3.56 \times 10^{-7}$	0.808	Uni, > Inv, = Pop,
GG	$R^{RB}$	40.60	$2.13 \times 10^{-7}$	0.819	Uni, > Inv, > Pop.
RNG	$q_c^{RB}$	98.65	$2.00 \times 10^{-10}$	0.916	Uni, > Inv, $\geq$ Pop,
GG	$q_c^{RB}$	43.03	$1.39 \times 10^{-7}$	0.827	Uni, > Inv, = Pop,

表 14：ノード分布（人口分布, 逆人口分布, および均一分布）が再計算媒介中心性（RB）攻撃に対するロバスト性指標（ $R$ ）および臨界割合（ $q_c$ ）に与える影響を評価した一元配置分散分析（One-way ANOVA）の結果（ $N = 1024$ ）. **F 値**は群間分散と群内分散の比を示す. **p 値**は観測された群間差が偶然によるものである確率を示し, 一般に  $p < 0.05$  は統計的に有意とみなされる.  $\eta^2$  は効果量を示し, 群要因によって説明される分散の割合を示す. 慣例的に,  $\eta^2 > 0.14$  は大きな効果を示すとされる.

Network	Metric	F-value	p-value	$\eta^2$	Distributional Differences
RNG	$R^{ID}$	13.25	<b>0.00029</b>	0.595	Uni, is significantly stronger than Pop, and Inv,
GG	$R^{ID}$	6.75	<b>0.0065</b>	0.429	Uni, > Inv, > Pop,
RNG	$q_c^{ID}$	1.50	0.249	0.143	<i>Not significant; inconsistent rankings across cities</i>
GG	$q_c^{ID}$	15.76	<b>0.00011</b>	0.637	Uni, is significantly stronger than Pop, and Inv,

表 15：ノード配置（人口分布, 逆人口分布, および均一分布）が初期次数（ID）攻撃に対するロバスト性指標（ $R$ ）および臨界割合（ $q_c$ ）に与える影響を評価した一元配置分散分析（One-way ANOVA）の結果（ $N = 1024$ ）。**F 値**は群間分散と群内分散の比を示し、**p 値**は観測された群間差が偶然によるものである確率を示す（一般に  $p < 0.05$  は統計的に有意とされる）。 $\eta^2$  は効果量を示し、群要因によって説明される分散の割合を表す。慣例的に、 $\eta^2 > 0.14$  は大きな効果を示すとされる、本表において、RNG ネットワークの  $q_c$  については有意差が見られなかった（ $p = 0.249$ ）。この理由としては、次の 2 点が考えられる：(1) RNG における Pop.-based のネットワークは平均次数  $\langle k \rangle$  が高く（表 5 参照）、ノード除去後にも代替経路が存在しやすいこと；(2) Pop.-based のネットワークには格子状部分が存在し、局所的なコミュニティ構造が強化されることで臨界的な断片化の発生が遅延すること。

Network	Metric	F-value	p-value	$\eta^2$	Distributional Differences
RNG	$R^{RF}$	2.58	0.104	0.223	<i>Not significant; Pop, and Uni, each ranked highest in 3 cities</i>
GG	$R^{RF}$	22.62	<b>0.000012</b>	0.715	Uni, > Inv, > Pop.
RNG	$q_c^{RF}$	4.39	<b>0.028</b>	0.328	Uni, is significantly stronger than Pop, and Inv,
GG	$q_c^{RF}$	5.87	<b>0.0109</b>	0.395	Uni, is significantly stronger than Pop, and Inv,

表 16：ノード配置（人口分布, 逆人口分布, および均一分布）がランダム故障（RF）に対するロバスト性指標（ $R$ ）および臨界割合（ $q_c$ ）に与える影響を評価した一元配置分散分析（One-way ANOVA）の結果（ $N = 1024$ ）。**F 値**は群間分散と群内分散の比を示し、**p 値**は観測された群間差が偶然によるものである確率を示す（一般に  $p < 0.05$  は統計的に有意とされる）。 $\eta^2$  は効果量を示し、群要因によって説明される分散の割合を表す。慣例的に、 $\eta^2 > 0.14$  は大きな効果とみなされる、特に、RNG ネットワークにおける  $R$  については有意差が認められなかった（ $p = 0.104$ ）。また、 $q_c$  の結果は境界的な有意性を示した（ $p = 0.028$ ）。これらの結果は、次の 2 点により説明できる：（1）平均次数  $\langle k \rangle$  が高い場合、ノード除去後にも代替経路が確保されやすいこと（表 5 参照）；（2）ネットワーク内の一部に格子状部分が存在することで、局所的なコミュニティ構造が強化され、臨界的断片化の発生が遅延すること。

Cities	Original				2D Lattice			
	RNG		GG		RNG		GG	
	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,
Fukuoka	25 <sup>△</sup>	24 <sup>△</sup>	21 <sup>△</sup>	23 <sup>△</sup>	25	<b>24</b>	17 <sup>△</sup>	19 <sup>△</sup>
Hiroshima	22	27 <sup>△</sup>	20	22 <sup>△</sup>	28 <sup>△</sup>	<b>23</b>	17 <sup>△</sup>	20 <sup>△</sup>
Keihan	22	23 <sup>△</sup>	<b>19</b>	<b>19</b>	27 <sup>△</sup>	<b>22</b>	16	19 <sup>△</sup>
Nagoya	24 <sup>△</sup>	22	20	20	28 <sup>△</sup>	<b>23</b>	16	20 <sup>△</sup>
Tokyo	23 <sup>△</sup>	24 <sup>△</sup>	<b>19</b>	21 <sup>△</sup>	26 <sup>△</sup>	<b>22</b>	16	21 <sup>△</sup>
Sendai	23 <sup>△</sup>	25 <sup>△</sup>	21 <sup>△</sup>	22 <sup>△</sup>	25	<b>23</b>	20 <sup>△</sup>	19 <sup>△</sup>
Sapporo	25 <sup>△</sup>	22	22 <sup>△</sup>	20	25	<b>20</b>	19 <sup>△</sup>	22 <sup>△</sup>
Uniform	22		20		25		16	

表 17：1024 ノードのネットワークにおけるコミュニティ数（オリジナル構造および 2D 格子上への再配置後）。本表は、オリジナルのネットワークおよび 2D 格子上へのノード再配置後に推定されたコミュニティ数。△ は、Pop.-based または Inv.-based のネットワークが Uni.-based のネットワークより多くのコミュニティを持つことを示す。太字は、RNG と GG の両方において Uni.-based より少ないコミュニティ数を示す。

Cities	RNG		GG	
	Inv,	Pop,	Inv,	Pop,
Fukuoka	0.4235	0.9489	0.4214	0.9437
Hiroshima	0.4163	0.9470	0.4099	0.9405
Keihan	0.4634	0.8842	0.4572	0.8406
Nagoya	0.4638	0.8651	0.4500	0.8254
Tokyo	0.4270	0.8825	0.4181	0.8652
Sendai	0.4660	0.9559	0.4594	0.9468
Sapporo	0.5217	0.9673	0.5139	0.9602
Uniform	0.3025		0.3001	
2D Lattice	0.9738		0.9200	

表 18：日本の各都市における RNG および GG のスパース性指数  $SI(G_w)$  ( $N = 1024$ )。値は正規化されたリンク距離に基づいて算出され、各ネットワーク構造の空間的スパース性を表す。Uniform および 2D Lattice はスパース性の比較基準として用いる。特に 2D Lattice が最も高い  $SI(G_w)$  を示すが、これは遠方ノード間に長いリンクが形成されるためと考えられる。

Measures	RB		ID		RF	
	RNG	GG	RNG	GG	RNG	GG
Pearson $r$ ( $R$ )	-0.4071	<b>-0.6514</b>	<b>+0.7017</b>	-0.3532	+0.0786	<b>-0.7300</b>
Pearson $r$ ( $q_c$ )	<b>-0.5468</b>	-0.3181	+0.3498	<b>-0.5543</b>	-0.2504	-0.4458
$p$ -value ( $R$ )	0.1486	<b>0.0116</b>	<b>0.0052</b>	0.2155	0.7894	<b>0.0030</b>
$p$ -value ( $q_c$ )	<b>0.0430</b>	0.2678	0.2202	<b>0.0397</b>	0.3879	0.1101

表 19：スパース性指数 (SI) とロバスト性指標 ( $R$  および  $q_c$ ) との間のピアソン相関係数 ( $r$ ) および有意確率 ( $p$  値) を示す結果. 対象は RNG および GG に対し, 再計算媒介中心性 (RB) 攻撃, 初期次数 (ID) 攻撃, およびランダム故障 (RF) の 3 種類の攻撃戦略である. **太字の値**は統計的に有意な結果 ( $p < 0.05$ ) を示す. 負の相関 ( $r < 0$ ) は, スパース性 (SI) が高いほどロバスト性が低くなることを示し, 空間的にスパースなネットワークは脆弱になりやすいことを意味する. 一方, 正の相関 ( $r > 0$ ) は, 格子状構造や冗長リンクがスパース性を補償する場合など, スパース性がロバスト性向上に寄与しうることを示す.

Metric	RNG	GG
$r$	0.2694	0.5930
$p$ -value	0.3315	<b>0.0198</b>

表 20：RNG および GG におけるモジュラリティ  $Q$  とスパース性指数  $SI(G_w)$  のピアソン相関係数 ( $r$ ) および有意確率 ( $p$  値). 相関係数  $r > 0$  は, モジュラリティ  $Q$  が空間的スパース性  $SI(G_w)$  と単調増加の関係にあることを示す. 特に GG においては統計的に有意な相関が認められる ( $p < 0.05$ ).

## 論文業績

### 査読付き論文

- Mou, Y., & Hayashi, Y. (2025 年 7 月). *Vulnerable Connectivity Caused by Local Communities in Spatial Networks*. *PLOS ONE*. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0327203>
- Mou, Y., & Hayashi, Y. (査読中). *Limited Improvement of Connectivity in Scale-Free Networks by Increasing the Power-Law Exponent*. *NOLTA (IEICE Transactions on Nonlinear Theory and Its Applications)*.

### 国際会議発表

- Mou, Y., & Hayashi, Y. (2024 年 6 月). *Impact of Population Concentration on the Robustness in Communication Networks* (ポスター発表). *NetSci 2024 International School and Conference on Network Science*, カナダ, 2024 年 6 月 16 日～21 日.
- Mou, Y., & Hayashi, Y. (2023 年 11 月). *Revitalizing Cellular Networks: Satellite Integration and Robust Topological Strategies* (ポスター発表). *Book of Abstracts Vol. 1*, pp. 372–374. *The 12th International Conference on Complex Networks and Their Applications*, フランス, 2023 年 11 月 28 日～30 日.

## 参考文献

- [1] Swati Goswami, C.A. Murthy, and Asit K. Das. Sparsity measure of a network graph: Gini index. *Information Sciences*, 462:16–39, 2018.
- [2] Masaki Chujyo and Yukio Hayashi. A loop enhancement strategy for network robustness. *Applied Network Science*, 6(1):3, 2021.
- [3] Masaki Chujyo and Yukio Hayashi. Adding links on minimum degree and longest distance strategies for improving network robustness and efficiency. *Plos one*, 17(10):e0276733, 2022.
- [4] Masaki Chujyo and Yukio Hayashi. Optimal network robustness in continuously changing degree distributions. In *Complex Networks and Their Applications XI*, pages 422–434. Springer, 2023.
- [5] Kiri Kawato and Yukio Hayashi. Larger holes as narrower degree distributions in complex networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 681:131072, 2026.
- [6] Albert-László Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.
- [7] L. A. N. Amaral, A. Scala, M. Barthélémy, and H. E. Stanley. Classes of small-world networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 97(21):11149–11152, 2000.
- [8] Mark EJ Newman. Modularity and community structure in networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences in USA*, 103(23):8577–8582, 2006.
- [9] Michelle Girvan and Mark EJ Newman. Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences in USA*, 99(12):7821–7826, 2002.
- [10] Albert-László Barabási, Réka Albert, and Hawoong Jeong. Mean-field theory for scale-free random networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 272(1):173–187, 1999.

- [11] K.-I. Goh, B. Kahng, and D. Kim. Universal behavior of load distribution in scale-free networks. *Phys. Rev. Lett.*, 87:278701, Dec 2001.
- [12] Kwang-II Goh, Eulsik Oh, Hawoong Jeong, Byungnam Kahng, and Doochul Kim. Classification of scale-free networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(20):12583–12588, 2002.
- [13] Quang Nguyen, Ngoc-Kim-Khanh Nguyen, Davide Cassi, and Michele Bellingeri. New betweenness centrality node attack strategies for real-world complex weighted networks. *Complexity*, 2021(1):1677445, 2021.
- [14] Michele Bellingeri, Massimiliano Turchetto, Francesco Scotognella, Roberto Alfieri, Ngoc-Kim-Khanh Nguyen, Quang Nguyen, and Davide Cassi. Forecasting real-world complex networks’robustness to node attack using network structure indexes. *Frontiers in Physics*, 11:1245564, 2023.
- [15] Réka Albert, Hawoong Jeong, and Albert-László Barabási. Error and attack tolerance of complex networks. *Nature*, 406(6794):378–382, 2000.
- [16] Duncan S Callaway, Mark EJ Newman, Steven H Strogatz, and Duncan J Watts. Network robustness and fragility: Percolation on random graphs. *Physical review letters*, 85(25):5468, 2000.
- [17] Reuven Cohen, Shlomo Havlin, and Daniel Ben-Avraham. Efficient immunization strategies for computer networks and populations. *Physical review letters*, 91(24):247901, 2003.
- [18] Lazaros K Gallos, Reuven Cohen, Panos Argyrakis, Armin Bunde, and Shlomo Havlin. Stability and topology of scale-free networks under attack and defense strategies. *Physical review letters*, 94(18):188701, 2005.
- [19] Lazaros K Gallos and Panos Argyrakis. Scale-free networks resistant to intentional attacks. *Europhysics Letters*, 80(5):58002, 2007.

- [20] Petter Holme, Beom Jun Kim, Chang No Yoon, and Seung Kee Han. Attack vulnerability of complex networks. *Physical Review E*, 65(5):056109, May 2002.
- [21] Lada A Adamic, Rajan M Lukose, Amit R Puniyani, and Bernardo A Huberman. Search in power-law networks. *Physical review E*, 64(4):046135, 2001.
- [22] María Camila Álvarez-Silva, Sally Yepes, Maria Mercedes Torres, and Andres Fernando Gonzalez Barrios. Proteins interaction network and modeling of igvh mutational status in chronic lymphocytic leukemia. *Theoretical Biology and Medical Modelling*, 12(1):12, 2015.
- [23] Salomon Mugisha and Hai-Jun Zhou. Identifying optimal targets of network attack by belief propagation. *Phys. Rev. E*, 94:012305, Jul 2016.
- [24] Alfredo Braunstein, Luca Dall’Asta, Guilhem Semerjian, and Lenka Zdeborová. Network dismantling. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(44):12368–12373, 2016.
- [25] Jaeho Kim and Yukio Hayashi. Anti-modularization for both high robustness and efficiency including the optimal case. *PLOS ONE*, 19(3):e0301269, 2024.
- [26] Yukio Hayashi and Takumi Ogawa. Universal vulnerability in strong modular networks with various degree distributions from inequality to equality. *Scientific Reports*, 15:33129, 2025.
- [27] Y. Mou and Y. Hayashi. Vulnerable connectivity caused by local communities in spatial networks. *PLoS One*, 20(7):e0327203, 2025.
- [28] MT Gastner and MEJ Newman. The spatial structure of networks. *The European Physical Journal B*, 2(49):247–252, 2006.
- [29] Roger Guimera, Stefano Mossa, Adrian Turtchi, and LA Nunes Amaral. The worldwide air transportation network: Anomalous centrality, community structure, and cities’ global roles. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 102(22):7794–7799, 2005.

- [30] Hocine Cherifi, Gergely Palla, Boleslaw K Szymanski, and Xiaoyan Lu. On community structure in complex networks: challenges and opportunities. *Applied Network Science*, 4(1):117, 2019.
- [31] Jiakang Li, Songning Lai, Zhihao Shuai, Yuan Tan, Yifan Jia, Mianyang Yu, Zichen Song, Xiaokang Peng, Ziyang Xu, Yongxin Ni, Haifeng Qiu, Jiayu Yang, Yutong Liu, and Yonggang Lu. A comprehensive review of community detection in graphs. *Neurocomputing*, 600:128169, 2024.
- [32] Aurelien Decelle, Florent Krzakala, Cristopher Moore, and Lenka Zdeborová. Inference and phase transitions in the detection of modules in sparse networks. *Physical Review Letters*, 107(6):065701, 2011.
- [33] Santo Fortunato. Community detection in graphs. *Physics Reports*, 486(3):75–174, 2010.
- [34] Benjamin H. Good, Yves-Alexandre de Montjoye, and Aaron Clauset. Performance of modularity maximization in practical contexts. *Phys. Rev. E*, 81:046106, Apr 2010.
- [35] Jörg Reichardt and Stefan Bornholdt. Statistical mechanics of community detection. *Physical Review E*, 74(1):016110, 2006.
- [36] S. K. Nechaev and K. Polovnikov. Rare-event statistics and modular invariance. *Physics-Uspokhi*, 61(1):99–104, 2018.
- [37] Florent Krzakala, Cristopher Moore, Elchanan Mossel, Joe Neeman, Allan Sly, Lenka Zdeborová, and Pan Zhang. Spectral redemption in clustering sparse networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences in USA*, 110(52):20935–20940, 2013.
- [38] Saray Shai, Dror Y. Kenett, Yoed N. Kenett, Miriam Faust, Simon Dobson, and Shlomo Havlin. Critical tipping point distinguishing two types of transitions in modular network structures. *Physical Review E*, 92(6):062805, Dec 2015.

- [39] Quang Nguyen, Tuan V Vu, Hanh-Duyen Dinh, Davide Cassi, Francesco Scotognella, Roberto Alfieri, and Michele Bellingeri. Modularity affects the robustness of scale-free model and real-world social networks under betweenness and degree-based node attack. *Applied Network Science*, 6:1–21, 2021.
- [40] Yukio Hayashi and Jun Matsukubo. Improvement of the robustness on geographical networks by adding shortcuts. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 380:552–562, 2007.
- [41] Geoff Boeing. Urban spatial order: Street network orientation, configuration, and entropy. *Applied Network Science*, 4(1):1–19, 2019.
- [42] Stefano Boccaletti, Vito Latora, Yamir Moreno, Martin Chavez, and D-U Hwang. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424(4-5):175–308, 2006.
- [43] Godfried T Toussaint. The relative neighbourhood graph of a finite planar set. *Pattern Recognition*, 12(4):261–268, 1980.
- [44] K Ruben Gabriel and Robert R Sokal. A new statistical approach to geographic variation analysis. *Systematic Zoology*, 18(3):259–278, 1969.
- [45] Linton C. Freeman. A set of measures of centrality based on betweenness. *Sociometry*, 40(1):35–41, 1977.
- [46] Richard M. Karp. *Reducibility among Combinatorial Problems*, pages 85–103. Springer US, Boston, MA, 1972.
- [47] Vijay V Vazirani. *Approximation algorithms*, volume 1. Springer, 2001.
- [48] Hai-Jun Zhou. Spin glass approach to the feedback vertex set problem. *The European Physical Journal B*, 86(11):455, 2013.

- [49] Christian M Schneider, André A Moreira, José S Andrade Jr, Shlomo Havlin, and Hans J Herrmann. Mitigation of malicious attacks on networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(10):3838–3841, 2011.
- [50] Swati Goswami, Asit K Das, and Subhas C Nandy. Sparsity of weighted networks: Measures and applications. *Information Sciences*, 577:557–578, 2021.
- [51] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, and A. N. Samukhin. Structure of growing networks with preferential linking. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4633–4636, Nov 2000.
- [52] M. E. J. Newman. Assortative mixing in networks. *Phys. Rev. Lett.*, 89:208701, Oct 2002.
- [53] M. E. J. Newman. Mixing patterns in networks. *Phys. Rev. E*, 67:026126, 2003.
- [54] Marc Barthelemy. *Morphogenesis of Spatial Networks*. Lecture Notes in Morphogenesis. Springer International Publishing, Cham, 1st ed. edition, 2018.
- [55] Geoff Boeing. Planarity and street network representation in urban form analysis. *Environment and Planning B: Urban Analytics and City Science*, 2018.
- [56] Manlio De Domenico, Albert Solé-Ribalta, Emanuele Cozzo, Mikko Kivelä, Yamir Moreno, Mason A Porter, Sergio Gómez, and Alex Arenas. Navigability of interconnected networks under random failures. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(23):8351–8356, 2014.
- [57] Michael M. Danziger, Amir Bashan, Yehiel Berezin, and Shlomo Havlin. Interdependent spatially embedded networks: Dynamics at percolation threshold. In *2013 International Conference on Signal-Image Technology & Internet-Based Systems*, pages 619–625, 2013.
- [58] Daisuke Watanabe. A study on analyzing road network patterns using proximity graphs. *Journal of the City Planning Institute of Japan*, 40.3:133–138, 2005.

- [59] Daisuke Watanabe. A study on analyzing the grid road network patterns using relative neighborhood graph. In *The Ninth International Symposium on Operations Research and Its Applications*, pages 112–119. Lecture Notes in Operations Research. Beijing, China: World Publishing ···, 2010.
- [60] Prosenjit Bose, Pat Morin, Ivan Stojmenović, and Jorge Urrutia. Routing with guaranteed delivery in ad hoc wireless networks. In *Proceedings of the 3rd International Workshop on Discrete Algorithms and Methods for Mobile Computing and Communications*, DIALM '99, page 48–55, New York, NY, USA, 1999. Association for Computing Machinery.
- [61] Fabian Kuhn, Rogert Wattenhofer, Yan Zhang, and Aaron Zollinger. Geometric ad-hoc routing: of theory and practice. In *Proceedings of the Twenty-Second Annual Symposium on Principles of Distributed Computing*, PODC '03, page 63–72, New York, NY, USA, 2003. Association for Computing Machinery.
- [62] Wen-Zhan Song, Yu Wang, Xiang-Yang Li, and Ophir Frieder. Localized algorithms for energy efficient topology in wireless ad hoc networks. In *Proceedings of the 5th ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing*, MobiHoc '04, page 98–108, New York, NY, USA, 2004. Association for Computing Machinery.
- [63] Boris Delaunay. Sur la sphère vide. *Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennykh Nauk*, 7:793–800, 1934.
- [64] Georgy Voronoi. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques: premier mémoire. sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 133:97–178, 1908.
- [65] Jaideep Singh, Gurnoor Kaur, and Goldendeep Kaur. Determining best setup sites for cellular towers using fuzzy logic. In *2015 International Conference on Futuristic Trends on Computational Analysis and Knowledge Management (ABLAZE)*, pages 256–260. IEEE, 2015.

- [66] AO Onim, PK Kihato, and S Musyoki. Optimization of base station location in 3g networks using fuzzy clustering and mesh adaptive direct search. In *Proceedings of sustainable research and innovation conference*, pages 30–35, 2014.
- [67] Office for National Statistics. Population density, Census 2021, 2021. [Online; accessed 01-August-2024].
- [68] H Paul Keeler. Notes on the poisson point process. *Weierstrass Inst., Berlin, Germany, Technical Report*, 2016.
- [69] Statistics Bureau of Japan. 2010 census of japan. <https://www.stat.go.jp/english/data/kokusei/2010/summary.html>, 2010. [Online; accessed 2024-08-05].
- [70] Sergey V Buldyrev, Roni Parshani, Gerald Paul, H Eugene Stanley, and Shlomo Havlin. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, 464(7291):1025–1028, 2010.
- [71] Qing Xiang, Huan Yu, Hong Huang, Feng Li, LingFan Ju, Wenkai Hu, Peng Yu, ZongChun Deng, and YanNi Chen. Assessing the resilience of complex ecological spatial networks using a cascading failure model. *Journal of Cleaner Production*, 434:140014, 2024.
- [72] Daqing Li. *Resilience of Spatial Networks*, pages 79–106. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2016.
- [73] Yehiel Berezin, Amir Bashan, Michael M Danziger, Daqing Li, and Shlomo Havlin. Localized attacks on spatially embedded networks with dependencies. *Scientific Reports*, 5:8934, 2015.
- [74] Mark E. J. Newman and Michelle Girvan. Finding and evaluating community structure in networks. *Physical Review E*, 69(2):026113, 2004.
- [75] Vincent D. Blondel, Jean-Loup Guillaume, Renaud Lambiotte, and Etienne Lefebvre. Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2008(10):P10008, 2008.

- [76] Heidi K. Norton, Daniel J. Emerson, Harvey Huang, Jesi Kim, Katelyn R. Titus, Shi Gu, Danielle S. Bassett, and Jennifer E. Phillips-Cremins. Detecting hierarchical genome folding with network modularity. *Nature Methods*, 15(2):119–122, 2018.
- [77] Kirill Polovnikov, Vlad Kazakov, and Sergey Syntulsky. Core–periphery organization of the cryptocurrency market inferred by the modularity operator. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 540:123075, 2020.
- [78] Ulrik Brandes, Daniel Delling, Marco Gaertler, Robert Gorke, Martin Hoefer, Zoran Nikoloski, and Dorothea Wagner. On modularity clustering. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 20(2):172–188, 2008.
- [79] Michael T. Gastner and M. E. J. Newman. Optimal design of spatial distribution networks. *Phys. Rev. E*, 74:016117, Jul 2006.
- [80] IBM Corporation. Ibm spss statistics, 2024. Accessed: 2025-03-31.
- [81] R. A. Fisher. *Statistical Methods for Research Workers*. Oliver and Boyd, 1925. Chapter 8, pp. 156–170.
- [82] Laerd Statistics. One-way anova using spss statistics, 2015. Accessed: 2025-03-31.
- [83] Christoph Norrenbrock, Oliver Melchert, and Alexander K Hartmann. Fragmentation properties of two-dimensional proximity graphs considering random failures and targeted attacks. *Physical Review E*, 94(6):062125, 2016.
- [84] Dietrich Stauffer and Amnon Aharony. *Introduction To Percolation Theory: Second Edition*. Taylor & Francis, London, 2nd edition, 1992.