JAIST Repository
https://dspace.jaist.ac.jp/

| | |
|---|---|
| Title | 代数演算による離散多面体の変形 |
| Author(s) | 剣持,雪子; 小谷,一孔; 井宮,淳 |
| Citation | 情報処理学会研究報告 : コンピュータビジョンとイメージメディア, 98(79): 57-63 |
| Issue Date | 1998-09 |
| Type | Journal Article |
| Text version | publisher |
| URL | http://hdl.handle.net/10119/3296 |
| Rights | 社団法人 情報処理学会, 剣持雪子／小谷一孔／井宮淳, 情報処理学会研究報告 : コンピュータビジョンとイメージメディア, 1998(79), 1998, 57-63. ここに掲載した著作物の利用に関する注意: 本著作物の著作権は（社）情報処理学会に帰属します。本著作物は著作権者である情報処理学会の許可のもとに掲載するものです。ご利用に当たっては「著作権法」ならびに「情報処理学会倫理綱領」に従うことをお願いいたします。 The copyright of this material is retained by the Information Processing Society of Japan (IPSJ). This material is published on this web site with the agreement of the author (s) and the IPSJ. Please be complied with Copyright Law of Japan and the Code of Ethics of the IPSJ if any users wish to reproduce, make derivative work, distribute or make available to the public any part or whole thereof. All Rights Reserved, Copyright (C) Information Processing Society of Japan. |
| Description | |

JAIST
JAPAN
ADVANCED INSTITUTE OF
SCIENCE AND TECHNOLOGY

Japan Advanced Institute of Science and Technology

コンピュータビジョンと
イメージメディア 112－8
（1998．9．17）

# 代数演算による離散多面体の変形

剣持雪子† 小谷 一孔† 井宮 淳‡

†北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科

‡千葉大学工学部情報画像工学科

3次元ディジタル画像のような離散空間における3次元物体の表現法の1つに多面体がある．この多面体に，2つの多面体を張り合わせる「足し算」や多面体の一部から別の多面体を取り除く「引き算」などの代数演算を定義する．そして，それらの代数演算の組合せで膨張・収縮などの多面体の変形が記述できることを示す．

# Deformation of Discrete Polyhedra by Set Operations

Yukiko KENMOCHI†, Kazunori Kotani† and Atsushi IMIYA‡

†School of Computer Science,
Japan Advanced Institute of Science and Technology, Hokuriku

‡Dept. of Information and Computer Sciences, Chiba University

A polyhedron is one of the representations of a three-dimensional object in a discrete space, such as a three-dimensional digital image. In this paper, we present two set operations, addition and substraction of polyhedra, and show that any deformation of a polyhedron can be described by using those set operations.

# 1 まえがき

計算機では，3次元空間における点は格子点などに標本化されており，3次元空間に存在する物体はその標本化された点を用いて表現することが求められている．格子点のように点が離散的に分布した空間を離散空間と呼ぶと，離散空間において3次元物体を表現する方法の1つに多面体がある．実際に，物体認識，CAD，CGなどの分野ではその扱いやすさから多面体による物体表現がよく使われている [1, 2, 3]．剣持・井宮らは，離散空間において組合せトポロジーを用い，物体の位相構造に着目した組合せ多面体による物体表現法を提案し，さらに組合せ多面体の生成，変形などのアルゴリズムを提案している．また，離散空間が格子点の集合であるとしたとき，格子幅を無限に小さくしていくと，物体を表す組合せ多面体は元の物体に収束していくことを保証している [4, 5]．

本稿では，文献 [4] において提案されている組合せ多面体の定義とその生成・変形のアルゴリズムに対して，数理形態学を導入し，集合演算で記述することを試みる．数理形態学では，与えられた集合（対象物体）に対しある構造要素と簡単な集合演算を用いて、対象物体の形状解析を行なう [6]．数理形態学を導入するためには，組合せ多面体の最小構造要素と，多面体の集合演算が必要となる．言い替えると，組合せ多面体の最小構造要素と集合演算が与えられれば，多面体の生成・変形のアルゴリズムはすべて集合演算で記述することが可能になり，さらにそれはオブジェクト指向型プログラミングの設計を与えることになる．

本稿の流れを以下に示す．まず，第1章では，離散空間における多面体の最小構造要素である基本離散多面体が有限個定義できることを示し，基本離散多面体の隣接関係について考察する．そして，その隣接関係を元に，多面体の「足し算」を表す集合演算を与え，その集合演算と基本離散多面体から離散空間における多面体のクラスが構築できることを第2章で示す．また，多面体の「足し算」の定義から「引き算」を導く．第3章では，クラス内の多面体の生成・変形に関するアルゴリズムが，多面体の「足し算」及び「引き算」の集合演算の組合せで記述できることを示す．

# 2 基本離散多面体

## 2.1 基本離散多面体の定義

3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ において，座標がすべて整数値であるような点を格子点と呼び，$\mathbf{R}^3$ 内のすべての格子点の集合を離散空間 $\mathbf{Z}^3$ とする．本章では，以下の2つの条件：

1. 頂点は $\mathbf{Z}^3$ の点であること．
2. 隣接する頂点（稜線で結ばれている頂点）は近傍の位置関係にあること．

を満たす多面体の中で，単位立方体の領域

$$\mathbf{D}(i,j,k) = \{(i+\epsilon_1, j+\epsilon_2, k+\epsilon_3) : \epsilon_l = 0 \text{ or} 1,\ l = 1,2,3\}$$

において形成される多面体を考える．$\mathbf{D}(i,j,k)$ 内の各点が0あるいは1の値を持つとし，0の値を持つ点を白点，1の値を持つ点を黒点とすると，$\mathbf{D}(i,j,k)$ における黒点と白点の配置は回転対称のものを除くと表1に示したように全部で2 3通りになる．それぞれの配置において，黒点の集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_p\}$ の凸包

$$\mathbf{CH}(\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_p\}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 : \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{x}_i,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\}$$

を作ると，黒点の個数・配置により作られた凸包の次元が変わる．例えば，$p=1$ のときは凸包は0次元の孤立点，$p=2$ のときは1次元の線分，$p=3$ のときは2次元の三角形になる．そして，$p=4$ のときは、4つの黒点が同一平面上にあるときは凸包は2次元の四角形に，同一平面上にないときは3次元の四面体となる．さらに $p \geq 5$ のときは、凸包は必ず3次元になる．

**定義 1** 格子点を頂点とする単位立方体 $\mathbf{D}(i,j,k)$ において，$p$ 個の点 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_p \in \mathbf{Z}^3 (0 \leq p \leq 8)$ から作られる凸包 $\mathbf{CH}(\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_p\}) \subset \mathbf{R}^3$ が $n$ 次元 ($n = 0,1,2,3$) であるとき，それらの $p$ 個の点の集合を $n$ 次元基本離散多面体と呼ぶ．

本稿では，特に $n = 2,3$ の場合に着目し，以降，2，3次元基本離散多面体をそれぞれ基本離散多角形，基本離散多面体と略して呼ぶことにする．そして，$p$ 個の点 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_p$ からなる基本離散多角形を

$$\mathbf{S} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_p\}$$

と表す．また，表2より、基本離散多面体は基本離散多角形に囲まれていることがわかる．基本離散多面体が $q$ 個の基本離散多角形 $\mathbf{S}_1$，$\mathbf{S}_2$，…，$\mathbf{S}_q$ に囲まれているとすると，その基本離散多面体は

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_q\}$$

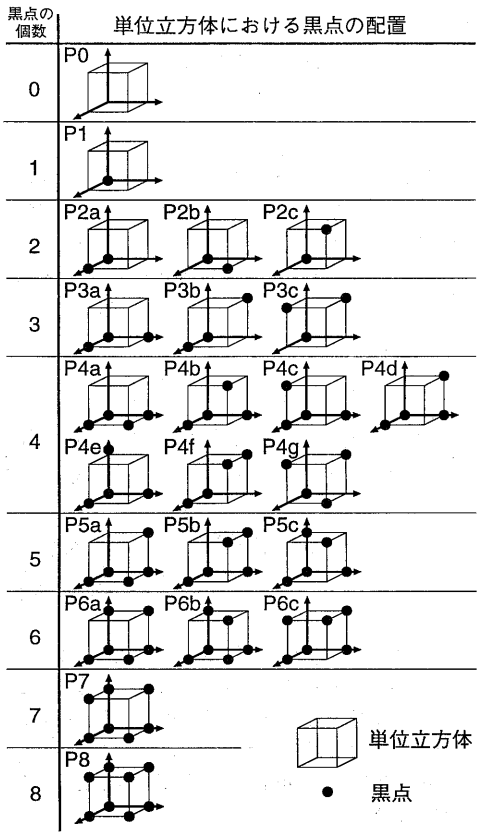


表 1: 格子点を頂点とする単位立方体において，各点が黒点か白点のいずれかになるとしたときの，考えられるすべての黒点と白点の配置．ただし，表中は黒点のみを表示しているので，表中の黒点以外の格子点は白点とみなす．また，回転対称の配置はこの表では省略している．

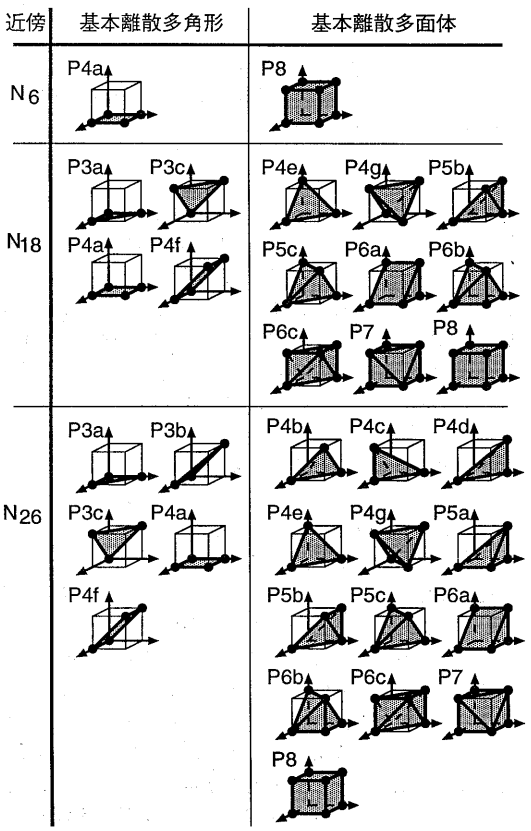


表 2: 各 6，18，26 近傍に対応した，基本離散多角形と基本離散多面体．表 1 に示されている各配置に対して，黒点の凸包を作り，凸包の隣接する各頂点が $m$ 近傍の位置関係にあり，かつ凸包が 2，3 次元のとき，それぞれを $m$ 近傍離散多角形・多面体と呼ぶ．

と表される．このとき，各$\mathbf{S}_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}\}$の点列は$\mathbf{P}$の外から見て反時計回りの順番に並ぶようにする．すなわち，各離散多角形$\mathbf{S}_i$は向きづけされた多角形になる．

次に，これらの基本離散多角形・多面体を近傍という観点から考えてみる．$\mathbf{Z}^3$において，ある点$x \in \mathbf{Z}^3$の近傍の位置にある点の集合を

$$\mathbf{N}_m(x) = \{y \in \mathbf{Z}^3 : \|x - y\| \leq \sqrt{t}\}.$$

と定義する．ただし，$m = 6, 18, 26$のとき，それぞれ$t = 1, 2, 3$とし，各$\mathbf{N}_m(x)$をそれぞれ$x$の6近傍，18近傍，26近傍と呼ぶ．さて，表1の黒点の凸包である基本離散多角形と基本離散多面体のうち，隣接する頂点が$m$近傍の位置関係にあるものを$m$近傍基本離散多角形・多面体として分類すると，表2が得られる．26近傍を見ると，同一平面上にない4つ以上の黒点のすべての配置に対する凸包が基本離散多面体になっていることが分かる．一方，18近傍では、その定義よりユークリッド・ノルムが$\sqrt{3}$の2点は近傍の位置にあるとみなされないため，表1のP4b，P4c，P4d, P5aの配置に対して基本離散多面体を定義できない．また，6近傍では，2点間のユークリッド・ノルムが1の場合のみ，それら2点が近傍の位置にあるとみなすため，基本離散多面体は一辺の長さが1の立方体のみとなる．ここで，表2より，$m$近傍基本離散多面体を囲む各面は$m$近傍基本離散多角形になっていることが分かる．また、6近傍基本離散多角形・多面体はそれぞれ18近傍基本離散多角形・多面体に含まれ，さらに18近傍基本離散多角形・多面体もそれぞれ26近傍基本離散多角形・多面体に含まれていることが分かる．

### 2.2 基本離散多面体の隣接関係

面を共有して隣接する2つの単位立方体領域$\mathbf{D}(x_1)$, $\mathbf{D}(x_2)$において，それぞれの領域に基本離散多面体$\mathbf{P}_1 = \{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_{q1}\}$, $\mathbf{P}_2 = \{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_{q2}\}$が存在するとき，$\mathbf{P}_1$と$\mathbf{P}_2$の隣接関係を考察する．このとき，$\mathbf{P}_1$と$\mathbf{P}_2$はそれぞれ表2に示したような黒点の配置に対して作られるとし，2つの単位立方体が共有している面$\mathbf{D}(x_1) \cap \mathbf{D}(x_2)$においては4つの格子点の黒点の配置が$\mathbf{P}_1$と$\mathbf{P}_2$に共有されているとする．

6近傍では，$\mathbf{P}_1$と$\mathbf{P}_2$は共に8個の黒点から成る立方体であるため，その隣接関係は互いに面を共有する場合に限られる．一方，18及び26近傍では，表2に示されているように基本離散多面体の形状が様々であるため，$\mathbf{P}_1$と$\mathbf{P}_2$の隣接関係には頂点，稜線，面のそれぞれを共有する3種類の関係が考えられる．これらの関係を表3に図示する．

表3に示された$\mathbf{P}_1$と$\mathbf{P}_2$の3種類の隣接関係のうち，面の共有によって表される関係(c)については，$\mathbf{S}_i \in \mathbf{P}_1$と$\mathbf{T}_j \in \mathbf{P}_2$が接続しているとすると，

$$\mathbf{S}_i = \overleftarrow{\mathbf{T}}_j$$

という関係式で表すことができる．ただし，$\overleftarrow{\mathbf{T}}_j$は$\mathbf{T}_j$と反対に向きづけされた基本離散多角形，すなわち$\mathbf{T}_j$の点列の向きと反対回りの順番に並べられた点列であるとする．そして，関係演算子$=$は点列が等しいことを表している．

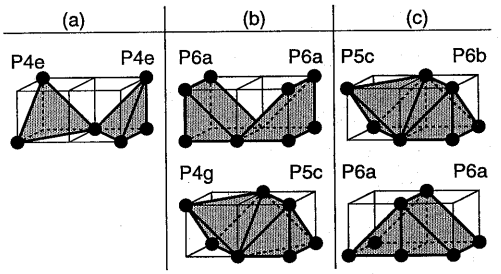


表3: 2つの基本離散多面体の3種類の隣接関係．関係(a)，(b)，(c)はそれぞれ多面体の頂点，稜線，面を共有するような隣接を表す．図に示されている隣接関係はすべて18及び26近傍の例である．ここで，関係(a)と(b)は6近傍ではあり得ず，18及び26近傍の場合にのみ現れることに注意する．

## 3 離散多面体のクラスと演算

### 3.1 離散多面体のクラス

前章で与えた基本離散多面体を元に，さらに大きな$\mathbf{Z}^3$における多面体のクラスを以下のように構築する．

**定義 2** $m$近傍離散多面体は$r$個の$m$近傍離散多角形の集合

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_r\}$$

として表され，以下のように再帰的に定義される．

1. $m$近傍基本離散多面体は$m$近傍離散多面体である．
2. $\mathbf{A}$と$\mathbf{B}$が$m$近傍離散多面体ならば，$\mathbf{A}+\mathbf{B}$も$m$近傍離散多面体である．

### 3.2 離散多面体の演算

定義2において使われている，離散多面体 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ に関する2項演算子 $+$ は，差集合と和集合の2項演算子 $\setminus$ と $\cup$ を用いて次のように表す．

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(\mathbf{A}\setminus\mathbf{X_A})\cup(\mathbf{B}\setminus\mathbf{X_B})\,. \tag{1}$$

ただし，

$$\mathbf{X_A}=\{\mathbf{S}\in\mathbf{A}\ :\ \mathbf{S}=\overleftarrow{\mathbf{T}}\ \text{for any}\ \mathbf{T}\in\mathbf{B}\}\,,$$

$$\mathbf{X_B}=\{\mathbf{T}\in\mathbf{B}\ :\ \mathbf{T}=\overleftarrow{\mathbf{S}}\ \text{for any}\ \mathbf{S}\in\mathbf{A}\}\,.$$

ここで，$\mathbf{X_A}$ と $\mathbf{X_B}$ はそれぞれ，$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が関係 (c) で隣接するときの，$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のそれぞれに含まれる $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が共有する離散多角形の集合である．したがって，

$$\mathbf{X_A}\subset\mathbf{A}\ \text{かつ}\ \mathbf{X_B}\subset\mathbf{B}$$

が成り立つ．式 (1) は，$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ がそれぞれ $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の部分集合である $\mathbf{X_A}$ と $\mathbf{X_B}$ において隣接しているとき，$\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ から $\mathbf{X_A}\cup\mathbf{X_B}$ を除いた離散多角形の集合として新たな離散多面体 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ を定義することを示している．$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が関係 (a) あるいは (b) で隣接する際には $\mathbf{X_A}$ と $\mathbf{X_B}$ は空集合となる．

式 (1) の演算は，以下の条件が成り立つときのみ実行されることに注意する．

- 単位立方体の頂点に位置する8個の格子点の集合 $\mathbf{D}(\boldsymbol{x})$ の集合で，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 内のすべての格子点が含まれる最小のものをそれぞれ $\mathbf{W_A}$，$\mathbf{W_B}$ としたとき，

$$\mathbf{W_A}\cap\mathbf{W_B}=\emptyset\,.$$

- 隣接する単位立方体の格子点の集合 $\mathbf{D}(\boldsymbol{x}_\mathbf{A})\in\mathbf{W_A}$，$\mathbf{D}(\boldsymbol{x}_\mathbf{B})\in\mathbf{W_B}$ の黒点の配置が，共有面 $\mathbf{D}(\boldsymbol{x}_\mathbf{A})\cap\mathbf{D}(\boldsymbol{x}_\mathbf{B})$ において矛盾しない．

したがって，式 (1) において，$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は同一単位立方体領域 $\mathbf{D}(\boldsymbol{x})$ に存在しないことが分かる．また，その定義より，

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

が明らかに成り立つ．さらに，$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ が成り立つときに限り，

$$\mathbf{C}-\mathbf{B}=\mathbf{A}$$

と書くことにする．

## 4 離散多面体の変形

前章で定義したクラス内での2つ離散多面体 $\mathbf{P}$，$\mathbf{Q}$ の最も単純な変形は，もう1つの離散多面体 $\mathbf{A}$ を用いて

$$\mathbf{P}+\mathbf{A}=\mathbf{Q} \tag{2}$$

$$\mathbf{P}-\mathbf{A}=\mathbf{Q} \tag{3}$$

のいずれかの形で表される．式 (2)，(3) によって表される変形をそれぞれ $\mathbf{P}$ から $\mathbf{Q}$ への $\mathbf{A}$ による膨張，収縮と呼ぶ．この章では，膨張と収縮を表す2つの集合演算を用いて，様々な離散多面体の変形を記述できることを示す．

### 4.1 格子点の集合からの離散多面体の生成

離散空間 $\mathbf{Z}^3$ の部分集合

$$\mathbf{Y}=\{(i,j,k)\ :\ 0\le i\le L,\ 0\le j\le M,\ 0\le k\le N\}$$

を考え，$\mathbf{Y}$ 内の各点が黒点あるいは白点のいずれかであるとする．ここで，$\mathbf{Y}$ 内の黒点の集合を $\mathbf{V}$ とすると，白点の集合は $\mathbf{V}\setminus\mathbf{Y}$ となる．$\mathbf{Y}$ における $\mathbf{V}$ の決め方は $2^{L\times M\times N}$ 通りあるが，それぞれの $\mathbf{V}$ に対して $m$ 近傍離散多面体 $\mathbf{P}_m(\mathbf{V})$ $(m=6,18,26)$ は以下のように決めることができる．

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_m(\mathbf{V}) &= \mathbf{P}_m(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(0,0,0))+\\ &\quad \mathbf{P}_m(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(1,0,0))+\\ &\quad \cdots+\mathbf{P}_m(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(L-1,M-1,N-1))\\ &= \mathop{+}_{\mathbf{D}(i,j,k)\in\mathbf{W}}\mathbf{P}_m(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(i,j,k))\end{aligned} \tag{4}$$

ただし，

$$\mathbf{W}=\{\mathbf{D}(i,j,k)\ :\ \mathbf{D}(i,j,k)\subset\mathbf{Y}\}$$

であり，$\mathbf{P}_m(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(i,j,k))$ は単位立方体 $\mathbf{D}(i,j,k)$ において作られる $m$ 近傍基本離散多面体を表す．式 (4) は，$\mathbf{Y}$ 内の単位立方体 $\mathbf{D}(i,j,k)$ における基本離散多面体 $\mathbf{P}_m(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(i,j,k))$ をひとつひとつ順番に足していくことで，最終的に $\mathbf{P}_m(\mathbf{V})$ が生成できることを表している．このようにして得られる $\mathbf{P}_m(\mathbf{V})$ について以下の定理が成り立つことは明らかである．

**定理 1** 式 (4) により，$\mathbf{V}$ に対して $\mathbf{P}_m(\mathbf{V})$ $(m=6,18,26)$ は一意に決まる．

### 4.2 異なる近傍系間の離散多面体の変形

前節では，各近傍系に対応して，それぞれ $\mathbf{V}$ から $\mathbf{P}_6(\mathbf{V})$，$\mathbf{P}_{18}(\mathbf{V})$，$\mathbf{P}_{26}(\mathbf{V})$ の3つの離散多面体が式 (4)

より生成されることを示した．ところで，表2によれば，$\mathbf{P}_m(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(i,j,k))$ が作られるか否かは $\mathbf{D}(i,j,k)$ における黒点の配置 $arrange(\mathbf{D}(i,j,k))$ によって決定する．$m=6$ の場合，

$$\mathbf{W}_6=\{\mathbf{D}(i,j,k)\in\mathbf{W}\ :\ arrange(\mathbf{D}(i,j,k))=\mathrm{P8}\}$$

に含まれる $\mathbf{D}(i,j,k)$ においてのみ $\mathbf{P}_6(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(i,j,k))$ が作られる．$m=18,26$ の場合も同様に，$\mathbf{P}_m(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(i,j,k))$, が作られる $\mathbf{D}(i,j,k)$ は，それぞれ

$$\mathbf{W}_{18}=\{\mathbf{D}(i,j,k)\in\mathbf{W}\ :\ arrange(\mathbf{D}(i,j,k))=\mathrm{P4e},\ \mathrm{P4g},\ \mathrm{P5b},\ \mathrm{P5c},\ \mathrm{P6a},\ \mathrm{P6b},\ \mathrm{P6c},\ \mathrm{P7\ or\ P8}\}$$

$$\mathbf{W}_{26}=\{\mathbf{D}(i,j,k)\in\mathbf{W}\ :\ arrange(\mathbf{D}(i,j,k))=\mathrm{P4b},\ \mathrm{P4c},\ \mathrm{P4d},\ \mathrm{P4e},\ \mathrm{P4g},\ \mathrm{P5a},\ \mathrm{P5b},\ \mathrm{P5c},\ \mathrm{P6a},\ \mathrm{P6b},\ \mathrm{P6c},\ \mathrm{P7\ or\ P8}\}$$

に含まれるときに限られる．したがって，明らかに

$$\mathbf{W}_6\subset\mathbf{W}_{18}\subset\mathbf{W}_{26}$$

成り立ち，それにより以下の定理が導かれる．

**定理 2** $\mathbf{V}$から $\mathbf{P}_6(\mathbf{V})$, $\mathbf{P}_{18}(\mathbf{V})$, $\mathbf{P}_{26}(\mathbf{V})$ の3つの離散多面体が式 (4) に従って作られるとき，それらの間には必ず

$$\mathbf{P}_6(\mathbf{V})\subseteq\mathbf{P}_{18}(\mathbf{V})\subseteq\mathbf{P}_{26}(\mathbf{V})$$

の関係式が成り立つ．

この関係を用いて，まず $\mathbf{V}$から $\mathbf{P}_6(\mathbf{V})$ を生成し，その後に $\mathbf{P}_6(\mathbf{V})$ から $\mathbf{P}_{18}(\mathbf{V})$ を，さらに $\mathbf{P}_{18}(\mathbf{V})$ から $\mathbf{P}_{26}(\mathbf{V})$ を生成することを考えると以下のようになる．

$$\mathbf{P}_6(\mathbf{V})=\mathop{+}_{\mathbf{D}(i,j,k)\in\mathbf{W}_6}\mathbf{P}_6(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(i,j,k))$$

$$\mathbf{P}_{18}(\mathbf{V})=\mathbf{P}_6(\mathbf{V})+\left(\mathop{+}_{\mathbf{D}(i,j,k)\in(\mathbf{W}_{18}\setminus\mathbf{W}_6)}\mathbf{P}_{18}(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(i,j,k))\right)$$

$$\mathbf{P}_{26}(\mathbf{V})=\mathbf{P}_{18}(\mathbf{V})+\left(\mathop{+}_{\mathbf{D}(i,j,k)\in(\mathbf{W}_{26}\setminus\mathbf{W}_{18})}\mathbf{P}_{26}(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(i,j,k))\right)$$

$\mathbf{P}_6(\mathbf{V})$ を生成するときには黒点の配置が P8 である $\mathbf{D}(i,j,k)$ に関して基本離散多面体 $\mathbf{P}_6(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(i,j,k))$ を足していく．$\mathbf{P}_{18}(\mathbf{V})$ では，$\mathbf{W}_{18}$内の P8 以外の配置を持つ $\mathbf{D}(i,j,k)$ に関して $\mathbf{P}_{18}(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(i,j,k))$ を $\mathbf{P}_6(\mathbf{V})$ に順に足していく．さらに，$\mathbf{P}_{26}(\mathbf{V})$ は，$\mathbf{W}_{18}$ には含まれず $\mathbf{W}_{26}$には含まれる P4b, P4c, P4d, P5a の4つの配置を持つ $\mathbf{D}(i,j,k)$ に関して $\mathbf{P}_{26}(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(i,j,k))$ を $\mathbf{P}_{18}(\mathbf{V})$ に順に足していくことで得られる．また，逆に $-$ 演算子を使うことで，$\mathbf{P}_{26}(\mathbf{V})$ から $\mathbf{P}_{18}(\mathbf{V})$ へ，$\mathbf{P}_{18}(\mathbf{V})$ から $\mathbf{P}_6(\mathbf{V})$ への変形の記述も可能である．

### 4.3 格子点による離散多面体の変形

ここでは，格子点の集合 $\mathbf{V}\subset\mathbf{Y}$を変化させることにより，対応する $m$ 近傍離散多面体 $\mathbf{P}_m(\mathbf{V})$ を変形させることを考える．このとき，変形後においても定理1が成り立つようにすること，すなわち $m$ 近傍離散多面体 $\mathbf{P}_m(\mathbf{V})$ は常に $\mathbf{V}$に対して一意に決まるように $\mathbf{P}_m(\mathbf{V})$ の変形を考えることに注意する．

まず，$\mathbf{P}_m(\mathbf{V})$ の周りにある1点 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{Y}\setminus\mathbf{V}$を $\mathbf{V}$に加えることを考えると，それにともない $\mathbf{P}_m(\mathbf{V})$ は以下のように膨張変形する．

$$\mathbf{P}_m(\mathbf{V}\cup\{\boldsymbol{x}\})=\mathbf{P}_m(\mathbf{V})-\left(\mathop{+}_{\mathbf{D}(i,j,k)\in\mathbf{E}(\boldsymbol{x})}\mathbf{P}_m(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(i,j,k))\right)+\left(\mathop{+}_{\mathbf{D}(i,j,k)\in\mathbf{E}(\boldsymbol{x})}\mathbf{P}_m((\mathbf{V}\cup\{\boldsymbol{x}\})\cap\mathbf{D}(i,j,k))\right)$$

ただし，

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{x})=\{\mathbf{D}(i,j,k)\in\mathbf{W}\ :\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{D}(i,j,k)\}$$

とする．また，$\boldsymbol{x}\in\mathbf{V}$を $\mathbf{V}$から取り除くことによる収縮変形も同様に，

$$\mathbf{P}_m(\mathbf{V}\setminus\{\boldsymbol{x}\})=\mathbf{P}_m(\mathbf{V})-\left(\mathop{+}_{\mathbf{D}(i,j,k)\in\mathbf{E}(\boldsymbol{x})}\mathbf{P}_m(\mathbf{V}\cap\mathbf{D}(i,j,k))\right)+\left(\mathop{+}_{\mathbf{D}(i,j,k)\in\mathbf{E}(\boldsymbol{x})}\mathbf{P}_m((\mathbf{V}\setminus\{\boldsymbol{x}\})\cap\mathbf{D}(i,j,k))\right)$$

と表すことができる．膨張・収縮はともに，$\boldsymbol{x}$を含む8つの単位立方体領域の格子点の集合 $\mathbf{E}(\boldsymbol{x})$ において，新たに離散多面体を生成し，それを前のものと置き換えることによって変形を行っている．

## 5 あとがき

まず，離散空間における多面体の最小構造要素である基本離散多面体と2項演算子 $+$ を与えることで，離散多面体のクラスを構築した．そして，$+$ 演算より $-$ 演算を定義し，離散多面体の局所的な変形である膨張・収縮がそれらによって表され，$+$ と $-$ を使った離散多面体の集合演算により，

- 格子点集合 $\mathbf{V}$からの離散多面体 $\mathbf{P}_m(\mathbf{V})$ の生成，
- 異なる近傍系間での離散多面体 $\mathbf{P}_m(\mathbf{V})$ の変形，
- $\mathbf{V}$への点の増減による離散多面体 $\mathbf{P}_m(\mathbf{V})$ の変形

の記述がそれぞれできることを示した．

本稿では定義された離散多面体のクラスは，離散多角形の向きがすべて多面体の外を向いている正の離散多面体のみから構成される．これは，基本離散多面体に正のものしか準備しなかったこと，与えた定義が＋演算子だけだったこと（－演算は＋演算ができるときのみ定義する），に起因する．今後，離散多面体のクラスの代数構造を調べるためには，負の基本離散多面体と－演算を定義し，負の離散多面体を考慮に入れた離散多面体のクラスを考える必要がある [7].

日頃から御教示いただいている本学，宮原誠教授，日比野靖教授に感謝致します．この研究の一部は，日本学術振興会未来開拓学術研究推進事業研究プロジェクト JSPS-RFTE97P00601 によるものである．

## 参考文献

1. S. N. Srihari, Representation of three dimensional digital images, *Computing Surveys*, Vol. 13, pp. 399–424, 1981.
2. A. A. G. Requicha and H. B. Voelcker, Solid modeling: A historical summary and contemporary assessment, *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 2, No. 2, pp. 9–24, 1982.
3. J. D. Foley, A. V. Dam, S. T. Feiner, and J. F. Hughes, *Computer Graphics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1995.
4. Y. Kenmochi, *Discrete Combinatorial Polyhedra: Theory and Application*, 博士論文，千葉大学，1998.
5. Y. Kenmochi and A. Imiya. Discretization of Three-dimensional Objects: Approximation and Convergence, to appear in R. A. Melter, A. Y. Wu and L. J. Latecki (Eds.), *Vision Geometry VII* of *SPIE Proceedings*, 1998.
6. H. J. A. M. Heijmans, *Morphological Image Operators*, Vol. 25 of *Advances in Electronics and Electron Physics*, Academic Press, 1994.
7. P. K. Ghosh, An Algebra of Polygons through the Notion of Negative Shapes, *CVGIP: Image Understanding*, Vol. 54, No. 1, pp. 119–144, 1991.