

Title	様相演算を持つ部分構造論理の証明論的研究
Author(s)	鶴見, 卓哉
Citation	
Issue Date	2006-12
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/3453
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰, 情報科学研究科, 修士

様相演算を持つ部分構造論理の証明論的研究

鶴見 卓哉 (410082)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2006 年 11 月 15 日

キーワード：決定可能性, 部分構造論理, cut 除去定理, Craig の補間定理, 様相部分構造論理

1 はじめに

通常の様相論理は、古典論理に様相記号 $\Box$ に関する公理と推論規則をつけ加えることにより得られる。しかし近年、古典論理を弱めた論理を基礎とした様相論理の研究が盛んに行われている。その一つが直観主義論理上の様相論理であり、1960 年代から 1990 年代にかけて、R.Bull、Fischer-Servi、H.Ono、F.Wolter 等によって研究がなされてきた。様相論理の証明論的研究としては、sequent 計算を用いる方法のほか、Fitting [2] や Goré 等によるタブロー法によるものや、Prawitz [4] や A.K.Simpson による自然演繹を用いたものがある。

本研究でとりあげるのは、部分構造論理上の様相論理である。Ono (2005) は Gödel の translation を用いて、 $S4$ と Int 上の論理の関係から、様相部分構造論理 $S4_{FL}$ と部分構造論理の基本的体系 FL 上の論理のあいだの関係に拡張できることを示した [3]。このような部分構造論理上の様相論理の研究は、様相演算の公理の選択の任意性の問題などがあり、証明論的にも意味論的にも未だ多くの問題が未解決のままである。本研究では、特に証明論的立場から部分構造論理上の様相論理の研究を行った。まず、Ono により導入された様相部分構造論理の Gentzen 流の sequent 計算の体系に対し、その体系が cut 除去定理および Craig の補間定理が成り立つことを示した。さらにその結果から、この論理の決定可能性が導かれることを示した。また、意味論的研究として、Amano(2006) [1] により示された結果がある。本研究の結果との比較を行った。

2 直観主義論理の体系 LJ

cut 除去定理および Crig の補間定理の証明の基本的な流れを説明する必要があると思われる。そこで、直観主義論理の体系 LJ について、cut 除去定理と Craig の補間定理の証明を示した。

体系 LJ とは、古典命題論理に対する体系 LK とほぼ同様にして定義される。まず、LJ における式は、 $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B$ の形とする。ただし n は 0 でもよく、右辺の B は空でもよい。したがって、LJ の式は、LK の式の定義で右辺に現れる論理式の高々一つに制限したものと考えればよい。次に LJ の始式は、LK の場合とまったく同様に $A \Rightarrow A$ の形の式とする。このことから、LJ には、(contraction 右) および (exchange 右) は存在しないことになる。

LJ に対する cut 除去定理を示すためには、mix 規則を導入しなければならない。なぜ導入する必要があるのか、の理由を示し、cut 除去定理の証明を行った。次に、Crig の補間定理の証明を行った。この証明には、前原の方法を用いた。前原の方法とは、「cut 除去定理が成り立てば、補間定理の前提となる証明可能な論理式の証明図を定理の証明の道程に当てはめることにより、補間定理を具体的に求めることができる。」とする手法である。cut 除去定理が成り立つことにより、決定可能性を導き出すことができる。したがって、次の定理が成り立つことを確認することができた。

定理 1 直観主義論理の体系 LJ は、cut 除去定理および Craig の補間定理が成り立つ。

定理 2 直観主義論理の体系 LJ は、決定可能性を持つ。

3 部分構造論理の体系 FL

Gentzen が導入した直観主義論理の体系は LJ は、3 種類の構造に関する推論規則 (exchange, contraction, weakening) を持つ。この体系 LJ から 3 種類の構造に関する推論規則を全て取り除いた体系を部分構造論理の基本的体系 FL (Full Lambek calculus) という。また、部分構造論理の基本的体系 FL に、構造に関する推論規則を選択的に付け加えることによって八つの体系 FL, FL_e, FL_c, FL_w, FL_{ec}, FL_{cw}, FL_{ew} および FL_{ecw} を得ることができる。例えば FL に exchange を付け加えると FL_e となり、FL に exchange 規則と weakening 規則を付け加えると FL_e となる。本研究の目的は、部分構造論理の各体系上に様相論理の各体系を加えた場合に、どのような証明論的性質が導き出されるのかを調べることである。そのためには、部分構造論理の基本的体系である FL について、cut 除去定理および Craig の補間定理の証明手順を調べる必要があると思われる。そこで、cut 除去定理および 1996 年に成瀬によって与られた Craig の補間定理の証明を示すことによって、次の定理が成り立つことを確認した。

定理 3 cut 除去定理および Crig の補間定理は、FL, FL_e, FL_w, FL_{ec}, FL_{ew} および FL_{ecw} の各体系で成り立つ。

定理 4 FL , FL_e , FL_w , FL_{ew} および FL_{ecw} の各体系は、決定可能性を持つ。

4 様相部分構造論理の体系 FL

Ono により導入された様相部分構造論理の Gentzen 流の sequent 計算の体系に対し、その体系が cut 除去定理および Craig の補間定理が成り立つことを示した。さらにその結果から、この論理の決定可能性が導かれることを示した。本研究で扱った様相部分構造論理の体系を以下に示す。

- K_{FL} , K_{FL_e} , K_{FL_w} , $\text{K}_{\text{FL}_{ec}}$, $\text{K}_{\text{FL}_{ew}}$ および $\text{K}_{\text{FL}_{ecw}}$
- KT_{FL} , KT_{FL_e} , KT_{FL_w} , $\text{KT}_{\text{FL}_{ec}}$, $\text{KT}_{\text{FL}_{ew}}$ および $\text{KT}_{\text{FL}_{ecw}}$
- S4_{FL} , S4_{FL_e} , S4_{FL_w} , $\text{S4}_{\text{FL}_{ec}}$, $\text{S4}_{\text{FL}_{ew}}$ および $\text{S4}_{\text{FL}_{ecw}}$

これらの各体系の cut 除去定理および Crai の補間定理の証明は、LJ および FL の証明とほぼ同様に行うことができる。

その結果、次の定理を得ることができた。

定理 5 cut 除去定理および Craig の補間定理は、 K_{FL} , K_{FL_e} , K_{FL_w} , $\text{K}_{\text{FL}_{ec}}$, $\text{K}_{\text{FL}_{ew}}$ および $\text{K}_{\text{FL}_{ecw}}$ の各体系で成り立つ。

定理 6 cut 除去定理および Craig の補間定理は、 KT_{FL} , KT_{FL_e} , KT_{FL_w} , $\text{KT}_{\text{FL}_{ec}}$, $\text{KT}_{\text{FL}_{ew}}$ および $\text{KT}_{\text{FL}_{ecw}}$ の各体系で成り立つ。

定理 7 cut 除去定理および Craig の補間定理は、 S4_{FL} , S4_{FL_e} , S4_{FL_w} , $\text{S4}_{\text{FL}_{ec}}$, $\text{S4}_{\text{FL}_{ew}}$ および $\text{S4}_{\text{FL}_{ecw}}$ の各体系で成り立つ。

そして、[定理 5,6,7] の結果から次の重要な定理を導き出すことができた。

定理 8 様相部分構造論理の各体系 K_{FL} , K_{FL_e} , K_{FL_w} , $\text{K}_{\text{FL}_{ew}}$ および $\text{K}_{\text{FL}_{ecw}}$ は、決定可能性を持つ。

定理 9 様相部分構造論理の各体系 KT_{FL} , KT_{FL_e} , KT_{FL_w} , $\text{KT}_{\text{FL}_{ew}}$ および $\text{KT}_{\text{FL}_{ecw}}$ は、決定可能性を持つ。

定理 10 様相部分構造論理の各体系 S4_{FL} , S4_{FL_e} , S4_{FL_w} , $\text{S4}_{\text{FL}_{ew}}$ および $\text{S4}_{\text{FL}_{ecw}}$ は、決定可能性を持つ。

この結果をもとに、意味論的研究として、Amano(2006) により示された結果と比較を行った。Amano は、様相剰余代数のクラスが、有限モデル性を含意し、かつ有限埋め込み可能性を持つことを示すことで、その論理が決定可能性を持つことを証明した。

定理 10 様相剰余代数のいくつかのクラスは、有限埋込可能性を持つ。それゆえに、その一般的な理論は決定可能性を持つ。

定理 [9] および [10] により、証明論的およびモデル論的に様相部分構造論理の体系 $S4_{FL}$ は決定可能性を持つことが示された。この手法 [1] で導かれる決定可能性は、有限モデル性より強くなる。本研究で示したように、cut 除去定理を用いて導いた決定可能性の方がより一般的である。

5 まとめ

本研究で、提案した様相部分構造論理の各体系について cut 除去定理および Craig の補間定理が成り立つことが確認できた。さらに、様相部分構造論理の各体系 $S4_{FL}$, $S4_{FLe}$, $S4_{FLw}$, $S4_{FLeW}$ および $S4_{FLecw}$ において決定可能性が示された。また、Amano により意味論的に示された決定可能性との比較では、同じ結果が得られた。他の体系 K_{FL} , K_{FLe} , K_{FLw} , K_{FLeW} , K_{FLecw} および KT_{FL} , KT_{FLe} , KT_{FLw} , KT_{FLeW} , KT_{FLecw} についても証明論的に決定可能性が示された。

文献

- [1] Amano, S., The finite embeddability property for some modal algebras, 北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科情報処理学専攻修士論文, 2006.
- [2] Fitting, M.C., *Proof Methods of Modal and Intuitionistic Logics*, D.Reidel, 1983.
- [3] Ono, H., Modalities in substructural logics –a preliminary report, a talk at Technical University of Vienna, 2005.
- [4] Prawits, D., *Natural Deduction – A proof-theoretical study*, Almquist and Wiksell, 1965.