Title	線形な様相論理と時間論理の研究
Author(s)	山下，ひとみ
Citation	
Issue Date	2007-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/3580
Rights	
Description	Supervisor:小野　寛晰，情報科学研究科，修士

修 士 論 文

線形な様相論理と時間論理の研究

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

山下 ひとみ

２００７年 3月

修 士 論 文

線形な様相論理と時間論理の研究

指導教官　小野 寛晰　教授

審査委員主査　小野 寛晰　教授
審査委員　石原 哉　助教授
審査委員　小川 瑞史　特任教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

510107 山下 ひとみ

提出年月: ２００７年 ２月

目 次

1　はじめに

1.1　背景

アリストテレスによって体系的な研究が始められた様相論理は、C.I.Lewis や C.H.Langford らによって、現代的な観点から整理され、今日の様相論理の礎を築いた。また、S.A.Kripke によって導入されたクリプキ意味論は、様相論理の飛躍的な発展に大いに貢献した。

様相論理は古典論理では扱われていなかった「必然性」や「可能性」に関わる命題を扱う論理学である。この「必然性」や「可能性」を表現するために、様相演算子の $\Box$ と $\Diamond$ を導入する。この $\Box$ と $\Diamond$ には、様々な解釈があるが、それらは好意的に受け入れられるものである。

ここで、$\Box$ を「いつも」、$\Diamond$ を「ある時点で」と解釈した場合に注目する。これは、論理式の真理値が時間に依存した体系である時間論理と呼ばれるものになる。時間論理の時間構造は、時間を一本の線のように考える線形時間論理と、時間はある場面において分岐していると考える分岐時間論理の二種類に大別できることが知られている。特に、この線形時間論理に関しては、2006 年 2 月に本学で行われた修士論文審査会で、線形離散時間論理の完全性に関する研究成果が発表された。この研究成果は大変興味深いものであり、本研究のアイデアを与えるものとなった。よって本研究では、線形な様相論理と時間論理に焦点を当て、調査・研究をしていくものとする。

1.2　本研究の目的

時間論理は、「時間」という概念を扱う性質上、自然言語処理や人工知能、並列プログラムの仕様検証や記述など、情報科学の幅広い分野で応用されていることから、その研究は情報科学全般において非常に有用なものであるといえる。

この時間論理は様相論理の一種である。時間の流れを未来（または過去）の一方向に限定した場合、$\Box$ を「未来（過去）はいつも」と解釈した、一般的な線形様相論理として議論することができる。しかし、現実の問題としては、未来と過去という相反する二方向の時間の流れが同時に存在する。これに対応するように、二方向の逆関係を持つ演算が存在する時間論理を考えたとき、先に述べた一方向の時間の流れしかない時間論理と比べて、議論は複雑になる。

2006 年に発表された米森の修士論文では、Goldblatt によるクラスタの概念を用いた離散時間論理 LinDisc の完全性の証明方法に対し 2 つの問題点が指摘され、証明の修正がされた。この問題点とは、1 つ目は整数フレーム $(Z, <)$ からダンベル D への p-モルフィズムが存在しないことであり、2 つ目はダンベル D で公理型 Z_F および Z_P が偽になることであった。このような問題が生じた理由として、p-モルフィズムの問題は、Goldblatt が様相論理の p-モルフィズムと時間論理の p-モ

ルフィズムの定義の違いを混同してしまったことが考えられる。また、公理型 Z_F と Z_P については、ダンベルの定義が、最初と最後が非退化クラスタでそれ以外が退化クラスタであることに対し、Z_F と Z_P を同時に成り立たせるための条件が、最後のクラスタが非退化クラスタでそれ以外が退化クラスタであり、かつ、最初のクラスタが非退化クラスタでそれ以外が退化クラスタでなければならず、矛盾してしまうことが理由として挙げられる。

では、LinDisc の公理をすべて満たすようなフレームとはどのようなものだろうか。公理型 Z_F と Z_P を同時に成り立たせるには、非退化クラスタが最初で最後のクラスタであればよいだろう。このような非退化クラスタ 1 つからなるフレームはサークルと呼ばれている。サークルでは、整数フレーム $(Z,<)$ からの p-モルフィズムが存在し、公理型 Z_Fおよび Z_P も恒真となる。しかし、整数フレームでは成り立たない反射律がサークルでは成り立ってしまうため、サークルによって特徴づけられる体系と整数フレームによって特徴づけられる体系は異なるものとなる。また、米森の論文から、クラスタ付値という考え方を用いて整数フレームによって特徴づけられる体系と LinDisc では体系は等しくなることが示されている。よって、LinDisc の体系を L、整数フレームによって特徴づけられる体系を $L(\langle Z,<\rangle)$、サークルによって特徴づけられる体系を L_C とすると、これらの体系には

$$L = L(\langle Z,<\rangle) \subsetneq L_C$$

という関係が成り立つことがわかる。しかしながら、体系 L_C は体系 L よりも真に大きいということは知られているが、どのような公理から成っているかは知られていない。そこで、本研究ではまだ知られていないサークルの公理を明らかにすることを目的とする。

2　様相論理と時間論理

本研究の本題である「線形様相論理と線形時間論理の完全性」について議論するための準備として、基本的な概念と結果について述べる。

2.1　様相論理

様相論理では、命題論理で用いた論理結合子 $\rightarrow$ と $\perp$ の他に、$\Box$ という演算子を加える。ここでは $\Box$ を「いつも」と解釈する。

様相論理のシンタクスを定義するために、今回は BNF(Bakus-Naur form) を用いることとする。

原始論理式の可算集合を Φ とする。この Φ から生成される論理式全体の集合を $Fma(\Phi)$ とする。また、$Fma(\Phi)$ の要素は $A, A_1, A', B, \ldots$ というように表すことができる。ここで、様相論理のシンタクスは

$$\begin{array}{rcl} \text{原始論理式} & : & p \in \Phi \\ \text{論理式} & : & A \in Fma(\Phi) \\ \multicolumn{3}{l}{A ::= p \mid \perp \mid A_1 \rightarrow A_2 \mid \Box A} \end{array}$$

となる。つまり、原始論理式 p、$\perp$、$A_1 \rightarrow A_2$ の形の論理式、$\Box A$、および、これらから帰納的に導くことのできるすべての論理式を認める。また、$\neg A$ は $A \rightarrow \perp$ の、$A \vee B$ は $(a \rightarrow \perp) \rightarrow B$ の、$\wedge$ は $(A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$ の、$\Diamond A$ は $\neg\Box\neg A$ の省略形であるとする。

次に、様相論理のセマンティクスについて定める。本研究ではこれをクリプキフレームにより与えることにする。

定義 2.1 (クリプキフレーム)
空でない集合 S と S 上の二項関係 R の対 (S, R) を様相論理に対するクリプキフレームという。このクリプキフレームにおいて、S を可能世界の集合、R を到達可能関係という。

定義 2.2 (クリプキモデル)
(S, R) をクリプキフレームとする。また V を各命題変数 p に対して $V(p) \subseteq S$ となるような写像とする。このとき V をフレーム (S, R) の付値という。そして、この三つ組 (S, R, V) をクリプキモデルという。与えられたクリプキモデルに対し、S の要素と論理式の二項関係 $\models$ を次のように帰納的に定義する。

1. $M \models_s p \Leftrightarrow a \in V(p)$
2. $M \models_s A \rightarrow B \Leftrightarrow M \models_s A$ ならば　$M \models_s B$

3. $M \models_s \Box A \Leftrightarrow sRt$ となるすべての t に対して $M \models_t A$

4. $M \models_s \Diamond A \Leftrightarrow sRt$ となるある t に対して $M \models_t A$

$M \models_s A$ であるとき「可能世界 s で A は真である」という。$M \models_s A$ でないことは、「$M \not\models_s A$」と表す場合もある。関係 $\models$ は付値 V から一意的に決まるため、$\models$ と V を同一視し、$\models$ を付値と呼ぶこともある。また、$(S, R, \models)$ をクリプキモデルと呼ぶこともある。

定義 2.3 (恒真と偽)
フレーム (S, R) 上の任意の付値 $\models$ と、S の任意の要素 a について

$$M \models_a A$$

となるとき、論理式 A はフレーム (S, R) で恒真であるという。また、クリプキモデル $(S, R, \models)$ において、S のある要素 t について

$$M \not\models_t A$$

であるとき、論理式 A は $(S, R, \models)$ で偽であるという。

2.2 公理型と意味論的性質

$\Box$ を含むような様相論理は正規な様相論理と呼ばれている。正規な様相論理を定義するために、いくつかの公理型 $X_1, \ldots, X_k$ に対して

$$\rightarrow X_i \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

を付け加えるということを行う。このようにして定義される様相論理は $KX_1 \ldots X_k$ と表される。またこれらの $X_1, \ldots, X_k$ をこの様相論理の公理型という。

ここで本研究で登場する公理型を挙げておく。

T :$\Box A \rightarrow A.$

4 : $\Box A \rightarrow \Box\Box A.$

B : $A \rightarrow \Box\Diamond A.$

5 : $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A.$

D : $\Box A \rightarrow \Diamond A.$

L : $\Box(A \wedge \Box A \to B) \vee \Box(B \wedge \Box B \to A)$.

Z : $\Box(\Box A \to A) \to (\Diamond\Box A \to \Box A)$.

二項関係 R に関して、一階述語論理でこれらの性質は次のように表される。

定義 2.4 (R の意味論的性質の定義)

1. R は反射的 $\Leftrightarrow \forall s(sRs)$
2. R は推移的 $\Leftrightarrow \forall s\forall t\forall u(sRt \wedge tRu \to sRu)$
3. R は対称的 $\Leftrightarrow \forall s\forall t(sRt \to tRs)$
4. R はユークリッド的 $\Leftrightarrow \forall s\forall t\forall u(sRt \wedge sRu \to tRu)$
5. R は継続的 $\Leftrightarrow \forall s\exists t(sRt)$
6. R は弱連結 $\Leftrightarrow \forall s\forall t\forall u(sRt \wedge sRu \to tRu \vee t = u \vee uRt)$

公理型と到達可能関係 R の間には次のような関係が成り立っていることがわかる。

定理 2.5 (公理型に対応する R の性質)
任意のフレーム (S, R) に対し次のことが成り立つ。

1. T が (S, R) で恒真 $\Leftrightarrow$ R は反射的

2. 4 が (S, R) で恒真 $\Leftrightarrow$ R は推移的

3. B が (S, R) で恒真 $\Leftrightarrow$ R は対称的

4. 5 が (S, R) で恒真 $\Leftrightarrow$ R はユークリッド的

5. D が (S, R) で恒真 $\Leftrightarrow$ R は継続的

6. L が (S, R) で恒真 $\Leftrightarrow$ R は線形 (弱連結)

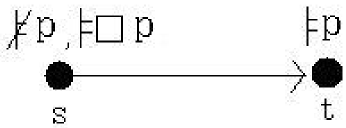
7. Z が (S, R) で恒真 $\Leftrightarrow$ R は離散的

例として *1.* を証明する。

証明
($\Rightarrow$)
　対偶をとって証明する。R が反射的でない（S のある要素 s について sRs でない) とすると T が (S, R) で偽となることを示す。このとき

$$V(p) = \{t | sRt\}$$

と定める。すると、sRt ならば $t \in V(p)$ より $\models_s \Box p$ となる。しかし sRs ではないので $\not\models_s p$ となる。



　このとき、点 s で $\Box p$ は成り立つが p は成り立たない。よって T が (S,R) で偽となる。以上より対偶が示された。

$(\Leftarrow)$
　モデル $M=(S,R,V)$ において R が反射的であるとする。S の任意の要素 s で $\Box A$ が成り立つとすると、定義から

$$sRt \text{ となるすべての } t \text{ に対して } M \models_t A$$

となる。ここで、R が反射的であることから sRs が成り立つので、t として s をとれば

$$M \models_s A$$

が導かれる。よって T が (S,R) で恒真となる。

それぞれの公理型に対し、A として $\neg A$ の形のものを当てはめ、対偶をとったものを双対な公理型という。以下に本研究で登場する双対な公理型を挙げる。

T^* :$A \to \Diamond A.$

4^* : $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A.$

B^* : $\Diamond\Box A \to A.$

5^* : $\Diamond\Box A \to \Box A.$

D^* : $\Box A \to \Diamond A.$

2.3 時間論理

　時間論理は様相論理の一種であり。この論理では、時間の流れが未来の方向と過去の方向の二方向あるものと考え、これに対応するように二種類の演算子 $[F]$ と $[P]$ を用いる。ここで、$[F]$ は「未来はいつも」「これからは」と解釈でき、$[P]$ は「過去はいつも」「これまでは」と解釈できる。
よって、フレーム (S,R)（ただし R は $R \subseteq M \times M$ とする）において、$[F],[P]$ は

$$M \models_s [F]A \Leftrightarrow sRt \text{ となるすべての } t \text{ で } M \models_t A$$

$$M \models_s [P]A \Leftrightarrow tRs \text{ となるすべての } t \text{ で } M \models_t A$$

と解釈される。

仮に、時間の流れが未来への一方向しかないと考えたときには、先に定義したような一般的な様相論理によって議論することができる。また、$\langle F\rangle A$ は $\neg[F]\neg A$ の、そして $\Box A$ は $[P]A \wedge A \wedge [F]A$ の省略形であるとする。

定義 2.6 (時間論理の体系)
時間論理の体系 K_t は以下の 4 つの公理を含む $[F]$ と $[P]$ における標準論理である。

C_F : $A \to [F]\langle P\rangle A.$

C_P : $A \to [P]\langle F\rangle A.$

4_F : $[F]A \to [F][F]A.$

4_P : $[P]A \to [P][P]A.$

時間論理は線形時間論理と分岐時間論理の２つに大別できる。線形時間論理は時間を直線的であると考えるのに対し、分岐時間論理は時間が一般に各時点で分岐しているとするものである。

線形時間論理　　分岐時間論理

本研究では、比較的取り扱いやすいといわれている線形時間論理に焦点をあてることにする。

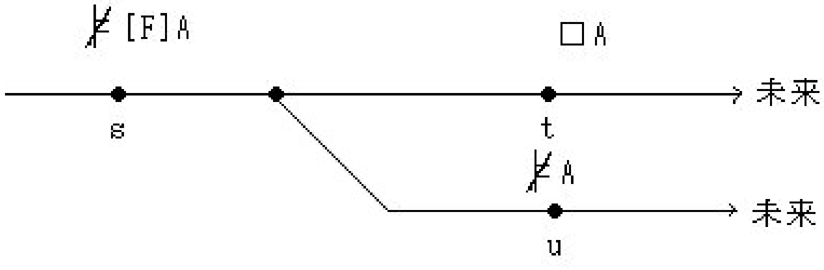
定義 2.7 (線形時間論理)
線形時間論理は最小時間論理 K_t のほかに２つの公理

$\Box A \to [F][P]A$

$\Box A \to [P][F]A$

を含む様相論理である。これらの公理は、時間が線形であることを表す。また、公理型 $C_F, C_P, 4_F, 4_P,$ 線形 からなる最小の時間論理を Lin と呼ぶ。

ここで、上記の２つの公理が線形をもつことを確かめておく。下図のような時間の流れが分岐していると仮定する。



ある点 t で、$\Box A$ が成り立つとする。また、分岐時間モデルなので、図のように u をとり、A が成り立たない点をとることができる。

このとき、公理型 $\Box A \to [P][F]A$ より t より過去のある地点 s において $[F]A$ が成り立つ。しかし、sRu となる u で A は成り立たず矛盾が生じる。よって、これら２つの公理は線形をもつ。

ここでいくつかの線形時間論理の具体例を挙げておく。

1. 離散時間論理 LinDisc

   最小の線形時間論理 Lin の公理に次の４つの公理を加えた体系を離散時間論理とする。

$$D_F \ : \langle F\rangle\top.$$
$$D_P \ : \langle P\rangle\top.$$
$$Z_F \ : [F]([F]A \to A) \to (\langle P\rangle[F]A \to [F]A).$$
$$Z_P \ : [P]([P]A \to A) \to (\langle F\rangle[P]A \to [P]A).$$

   ここで、与えられた線形時間論理のフレーム $(S,<)$ において、ある S の要素 s に対し

$$(S,<) \models_s D_P$$

   と仮定する。このとき

$$(S,<) \models_s D_P \Leftrightarrow (S,<) \models_s \langle P\rangle\top \Leftrightarrow s<t \text{ となるある } t \text{ に対し } (S,<) \models_t \top$$

   となる。元 s_0 が存在すると仮定すると

$$t < s_0$$

となり矛盾する。よって D_P は過去に始まりをもたないことを示す。同様の議論により D_F は未来に終わりをもたないことを示す。

次に Z_F, Z_P の性質について述べる。

命題 2.8 (Z_F, Z_Pの性質)
Z_F, Z_P を満たす線形時間論理のフレーム $(S,<)$ は、それぞれ未来、過去に離散的である。すなわち、与えられた $s \in S$ に対し、$v < s < u$ となる $v, u \in S$ をとると、$v < s$ および $s < u$ の間にある S の要素は有限である。

証明
はじめに、R が離散的ならば $(S,<) \models Z_F$ であることを背理法により証明する。線形時間論理のフレーム $(S,<)$ について、ある S の要素 s に対し

$$(S,<) \not\models_s Z_F$$

であると仮定する。このとき

$$\begin{aligned}(S,<) \not\models_s Z_F \Leftrightarrow & (S,<) \not\models_s [F]([F]A \to A) \to (\langle F \rangle [F]A \to [F]A) \\ \Leftrightarrow & (S,<) \not\models_s (\neg [F]([F]A \to A) \text{ または } (\langle F \rangle [F]A \to [F]A)) \\ \Leftrightarrow & (S,<) \models_s [F]([F]A \to A) \text{ かつ } (S,<) \not\models_s \langle F \rangle [F]A \to [F]A\end{aligned}$$

よって

(a) $(S,<) \models_s [F]([F]A \to A)$
(b) $(S,<) \not\models_s \langle F \rangle [F]A \to [F]A$

という 2 つの条件を満たさなければならない。このとき (a) から

$$s < t \text{ となるすべての } t \text{ について } (S,<) \models_t [F]A \text{ ならば } (S,<) \models_t A \ldots \text{(a')}$$

(b) から

$$s < u \text{ となるある } u \text{ で } (S,<) \models_u [F]A \text{ かつ } (S,<) \not\models_s [F]A \ldots \text{(b')}$$

であることがいえる。ここで、(b') より

$$s < v \leq u \text{ となるある } u_0 \text{で} \quad (S,<) \not\models_{u_0} A$$

となる。よって (a') より

$$(S,<) \not\models_{u_0} [F]A$$

となる。同時に $u_0 < u_1 \leq u$ となるある u_1 において

$$(S,<) \not\models_{u_1} [F]A$$

である。この手順は無限に繰り返され

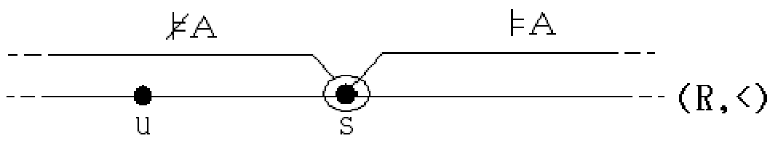
$$s < u_0 < u_1 < \ldots < u_n < u_{n+1} < \ldots < u$$

となって、s から u の間に無限に点が存在することになる。これは離散的であることに矛盾する。よって $(S,<) \models_s Z_F$ となる。

同様にして $(S,<) \models_s Z_P$ も示される。

次に、$(S,<) \models Z_F$ ならば R は離散的であることを示す。

対偶をとって証明する。R は離散的ではないとする。ここで、次のような実数フレームと付値を与える。



付値の与え方は

$$V(A) = \{t | s \leq t\}$$

とする。このとき

$$(R,<) \models [F]([F]A \rightarrow A)$$

となるが、$u < s$ となるすべての u で

$$(R,<) \not\models_u \langle F \rangle [F]A \rightarrow [F]A$$

である。これは、$u < s$ となる任意の点 u をとったときに uRs となる s で $[F]A$ が恒真であり、かつ、実数フレームは稠密であることから $u < v < s$ となる v が存在し、この v は $v < s$ であることから $(R,<) \not\models_v A$ となるため、必ず $(R,<) \not\models_s [F]A$ となることからいえる。よって対偶が示された。

2. 有理数時間論理 LinRat

有理数時間論理 LinRat は最小の線形時間論理 Lin に D_F, D_P と

$$X_F : [F][F]A \rightarrow [F]A$$

という公理型を加え拡張したものである。この LinRat は有理数フレーム $(Q,<)$ によって決定されることが知られている。

3. 実数時間論理 LinRe

実数時間論理 LinRe は最小の LinRat の公理に

$$Cont : \Box([P]A \to \langle F\rangle[P]A) \to ([P]A \to [F]A)$$

という公理型を加えたものである。この LinRat は有理数フレーム $(R, <)$ によって決定されることが知られている。

2.4　p-モルフィズム

次に定義する p-モルフィズムは有効な手段としてしばしば用いられるものである。

定義 2.9 (様相論理での p-モルフィズムの定義)
二つのモデル $M_1 = (S_1, R_1, V_1), M_2 = (S_2, R_2, V_2)$ について、写像 $f : S_1 \to S_2$ が

1. sR_1t ならば $f(s)R_2f(t)$
2. $f(s)R_2u$ ならば sR_1t かつ $f(t) = u$ なる t が存在する
3. $s \in V_1(p) \Leftrightarrow f(s) \in V_2(p)$

という 3 つの条件を満たすとき、f を様相論理での M_1から M_2へのp-モルフィズムという。

定義 2.10 (時間論理での p-モルフィズムの定義)
二つのモデル $M_1 = (S_1, R_1, V_1), M_2 = (S_2, R_2, V_2)$ に対し、写像 $f : S_1 \to S_2$ が

1. sR_1t ならば $f(s)R_2f(t)$
2. $f(s)R_2u$ ならば sR_1t かつ $f(t) = u$ なる t が存在する
3. $uR_2f(s)$ ならば tR_1s かつ $f(t) = u$ なる t が存在する
4. $s \in V_1(p) \Leftrightarrow f(s) \in V_2(p)$

という 4 つの条件を満たすとき、f を時間論理での M_1から M_2へのp-モルフィズムという。

次の補題は様相論理とその p-モルフィズム、時間論理とその p-モルフィズムのそれぞれについて成り立つ。

補題 2.11 (p-モルフィズムの付値に関する補助定理)
A は任意の論理式である。p-モルフィズム $f : S_1 \to S_2$ が存在するとき、任意の S_1 の要素 s について以下のことが成り立つ。

$$M_1 \models_s A \Leftrightarrow M_2 \models_{f(s)} A$$

証明
式の構成に関する帰納法を用いて証明する。

1. $A = p(\in \Phi)$ のとき
   V_1および V_2 に対する p-モルフィズムの定義から

   $$M_1 \models_s A \Leftrightarrow M_2 \models_{f(s)} A$$

2. $A = \perp$ のとき
   $\perp$ が成り立つことはないので、M_1, M_2ともに 必ず偽になることは明らかである。

3. $A = B \to C$ のとき
   定義から

   $$M_1 \models_s B \to C \Leftrightarrow M_1 \models_s B \text{ ならば } M_1 \models_s C$$

   帰納法の仮定から

   $$M_1 \models_s B \text{ ならば } M_1 \models_s C \Leftrightarrow M_2 \models_{f(s)} B \text{ ならば } M_2 \models_{f(s)} C$$

   定義から

   $$M_2 \models_{f(s)} B \text{ ならば } M_2 \models_{f(s)} C \Leftrightarrow M_2 \models_{f(s)} B \to C$$

4. [様相論理]$A = \Box B$ のとき
   $(\Rightarrow)$
   $M_1 \models_s \Box B$ と仮定する。また $f(s)R_2u$ であるとする。f は p-モルフィズムより、sRt かつ $f(t) = u$ となるような S_1 の要素 t が存在する。
   仮定から、$M_1 \models_s \Box B$ かつ sRt なので

   $$M_1 \models_t B$$

   帰納法の仮定から

   $$M_2 \models_{f(t)} B$$

   $f(t) = u$ より

   $$M_2 \models_u B$$

ここで、$f(s)Ru$ となるすべての u に対して $M_2 \models_u B$ となるから

$$M_2 \models_{f(s)} \Box B$$

となる。

$(\Leftarrow)$
$M_2 \models_{f(s)}$ と仮定する。sR_1t となる t を任意にとると、定義から $f(s)R_2f(t)$ となる。
仮定から、$M_2 \models_{f(s)}$ かつ $f(s)R_2f(t)$ なので

$$M_2 \models_{f(t)} B$$

帰納法の仮定から

$$M_1 \models_t B$$

この t は sR_1t となる t から任意にとったものであり、これが $M_1 \models_t B$ なのだから

$$M_1 \models_s \Box B$$

となる。

5. [時間論理]$A = [F]B$ および $A = [P]B$ のとき
$\Box$ を $[F]$ や $[P]$ におきかえ、$A = \Box B$ のときと同様に示すことができる。

補題 2.12 (p-モルフィズムの恒真に関する補助定理)
関数 f が、$F_1 = (S_1, R_1)$ から $F_2 = (S_2, R_2)$ への p-モルフィズムであり、かつ、f が上への写像でもあるとき

$$F_1 \models A \text{ ならば } F_2 \models A$$

が成り立つ。

証明
対偶（$F_2 \not\models A$ ならば $F_1 \not\models A$）をとって証明する。

関数 f が F_1から F_2 への p-モルフィズムであるとする。いま、論理式 C がモデル $M_2 = (S_2, R_2, V_2)$ で偽である (つまり $F_2 \not\models C$ である) とし、さらにある S_2 の要素 d に対して

$$d \notin V_2(C)$$

と仮定する。f が p-モルフィズムより、定義から F_2 の付置 V_1 は

$$s \in V_1(p) \Leftrightarrow f(s) \in V_2(p)$$

また、から任意の S_1 の要素 s と任意の論理式 A に対して

$$s \in V_1(A) \Leftrightarrow f(s) \in V_2(A) \ldots (\ast)$$

が得られる。f は上への写像であるから、$f(e) = d$ となる S_1 の要素 e が存在する。$(\ast)$ の対偶

$$s \notin V_1(A) \Leftrightarrow f(s) \notin V_2(A) \ldots (\ast\ast)$$

において s として e を、A として C をとると、仮定 $d(= f(e)) \notin V_2(C)$ から

$$e \notin V_1(C)$$

が得られる。よって $F_2 \not\models C$ が導かれる。以上により対偶が示された。

2.5 論理の性質

ここで、いくつかの論理の性質について定義する。本研究では、線形様相論理と線形時間論理の間に、ここで挙げるような論理の性質が成り立つかについて調べることにする。

定義 2.13 (健全性)
C をフレームまたはモデルのクラスとする。L が C に対して健全であるとは、すべての論理式 A に対して

$$\vdash_L A \text{ ならば } C \models A$$

が成り立つことである。

定義 2.14 (完全性)
Λが C に対して完全であるとは、すべての論理式 A に対して

$$C \models A \text{ ならば } \vdash_L A$$

が成り立つことである。

L が C に対して健全かつ完全であるとき、L は C によって決定されるという。

定義 2.15 (有限モデル性)
様相論理 L が有限フレームのあるクラスに関して完全であるとき、L は有限モデル性をもつという。次の定理が示すように、有限モデル性は論理の決定可能性を示す際に重要な役割を果たす。

有限モデル性を示すもっとも代表的な方法として、次章で取り上げる Γ−filtration がある。

定義 2.16 (有限公理化可能)
正規な様相論理 L が K にいくつかの公理型を付け加えた体系で定義できるとき、L は有限公理化可能であるという。

定理 2.17 (決定可能性)
正規な様相論理 L が有限公理化可能で、かつ、有限モデル性をもつならば、L は決定可能である。

2.6 Γ-filtration

これから述べる Γ-filtration は、有限モデル性を示すためのもっとも代表的かつ応用範囲の広い方法である。

モデル $M = (S, R, V)$ と部分論理式の下で閉じた $Fma(\Phi)$ の部分集合 Γ が与えられたとする。つまり、Γ の任意の要素 B に対して、B の部分論理式全体からなる集合 $Sf(B)$ は Γ の部分集合となる。このとき、任意の S の要素 s に対して

$$\Gamma_s = \{B \in \Gamma : M \models_s B\}$$

であると定義する。また

$$s \sim_\Gamma t \Leftrightarrow \Gamma_s = \Gamma_t$$

とする。つまり

$$s \sim_\Gamma t \Leftrightarrow \text{すべての } B \in \Gamma \text{において } (M \models_s B \Leftrightarrow M \models_t B)$$

となる。ここで、$\sim_\Gamma$ は S 上の同値関係になる。また、任意の S の要素 s に対して

$$|s| = \{t \in S : s \sim_\Gamma t\}$$

を $\sim_\Gamma -$ 同値類とする。さらに、このような同値類全体からなる集合を

$$S_\Gamma = \{|s| : s \in S\}$$

と定義する。

また、付値について Φ_Γ が Γ に属する原始論理式全体からなる集合である（つまり $\Phi_\Gamma = \phi \cap \Gamma$ である）と仮定して

$$V_\Gamma : \Phi_\Gamma \to 2^{S_\Gamma}$$

と定める。ここで

$$|s| \in V_\Gamma(p) \Leftrightarrow s \in V(p)$$

とおくとで、$p \in \Gamma$ のとき $p \in \Phi_\Gamma$ であり、V_Γ は well-defined である。

S_Γ 上の二項関係 R' が次の２つの条件を満たしているとき、R' は R の Γ-filtration であるという。

(F1) sRt ならば $|s|R'|t|$ かつ

(F2) $|s|R'|t|$ ならばすべての B に対して $\Box B \in \Gamma$かつ $M \models_s \Box B$ ならば $M \models_t B$

R' が $(F1)$ と $(F2)$ を満たすようなすべての Φ_Γ-モデル $M' = (S_\Gamma, R', V_\Gamma)$ は、モデル M の Γ-filtration と呼ばれている。

補題 2.18 (S_Γ の個数)
Γ が n 個の要素をもつとき、S_Γ は有限で高々2^n 個の要素をもつ。

証明

$$|s| = |t| \Leftrightarrow s \sim_\Gamma t \Leftrightarrow \Gamma_s = \Gamma_t$$

より

$$f(|s|) = \Gamma_s$$

として f を定めると、f は矛盾なく定義され、さらに S_Γ から Γ のべき集合への一対一写像となる。したがって、S_Γ は Γ の部分集合の数よりも多い要素はもっていない。また、Γ が n 個の要素をもつとき、Γ のべき集合は 2^n 個の要素からなる。よって、S_Γ は有限で高々2^n 個の要素をもつことが示された。

定理 2.19 (Γ-filtration の付値)
モデル $M = (S, R, V)$ と M の $\Gamma-$*-filtration* である $M' = (S', R', V')$ が与えられたとする。このとき S の任意の要素 s に対して、$B \in \Gamma$ ならば

$$M \models_s B \Leftrightarrow M' \models_{|s|} B$$

である。

証明
論理式 B の構成に関する帰納法で証明する。

1. $B = p$ のとき
   定義から
   $$M \models_s p \Leftrightarrow M' \models_{|s|} p$$
2. $B = \perp$ のとき
   $\perp$ が成り立つことはないので明らかに
   $$M \not\models_s \perp \Leftrightarrow M' \not\models_{|s|} \perp$$

3. $B = C \to D$ のとき
定義から
$$M \models_s C \to D \Leftrightarrow M \models_s C \text{ ならば } M \models_s D$$
帰納法の仮定から
$$M \models_s C \text{ ならば } M \models_s D \Leftrightarrow M' \models_{|s|} C \text{ ならば } M' \models_{|s|} D$$
定義から
$$M' \models_{|s|} C \text{ ならば } M' \models_{|s|} D \Leftrightarrow M' \models_{|s|} C \to D$$

4. $B = \Box C$ のとき
(⇒)
$M \models_s \Box C$ であると仮定する。ここで
$$\text{任意の } |t| \text{ について } |s|R'|t|$$
とする。仮定から $B \in \Gamma$かつ $B = \Box C$ より $\Box C \in \Gamma$ であり、かつ、$M \models_s \Box C$ であるので、(F2) から
$$M \models_t B$$
であることがいえる。ここで、帰納法の仮定から
$$M \models_s C \Leftrightarrow M' \models_{|s|} C$$
となる。つまり、任意の $|t|$ で $M' \models_{|s|} C$ であることがいえたので
$$M' \models_{|s|} B$$
となる。

(⇐)
対偶をとって証明する。$M \not\models_s \Box C$ であると仮定する。このとき定義から
$$sRt \text{ となるある } t \text{ に対して } M \not\models_t C$$
となる。(F1) および帰納法の仮定から
$$|s|R'|t| \text{ となるある } |t| \text{ に対して } M' \not\models_{|t|} C$$
がいえる。よって
$$M' \not\models_{|s|} \Box C$$
となり、対偶が示せた。

2.7　部分モデル

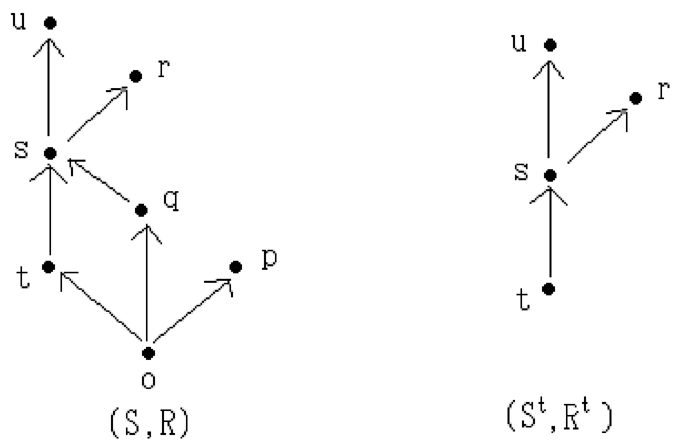
　モデル $M = (S, R, V)$ と任意の S の要素 t によって生成される M の部分モデル M^t を

$$M^t = (S^t, R^t, V^t)$$

とする。ただし、S^t, R^t, V^t はそれぞれ

$$\begin{aligned} S^t =& \{u \in S : tR^* u\} \\ R^t =& R \cap (S^t \times S^t) \\ V^t(p) =& V(p) \cap S^t \end{aligned}$$

とする (R^*は R の反射的推移的閉包である)。また、構造 $F^t = (S^t, R^t)$ を t によって生成された $F = (S, R)$ の部分フレームという。



部分フレームの例

補題 2.20 (部分モデルの付値)
任意の論理式 A および、任意の S^t の要素 u に対して

$$M^t \models_u A \Leftrightarrow M \models_u A$$

が成り立つ。

証明
式の構成に関する帰納法によって証明する。

1. $A = p$ のとき
   部分モデルの定義から
$$M^t \models_u p \Leftrightarrow M \models_u p$$

2. $A = \perp$ のとき
   $\perp$ が成り立つことはないので明らかに
$$M^t \not\models_u \perp \Leftrightarrow M \not\models_u \perp$$

3. $A = B \to C$ のとき
   定義から
$$M^t \models_u B \to C \Leftrightarrow M^t \models_u B \text{ ならば } M \models_s C$$
   帰納法の仮定から
$$M^t \models_u B \text{ ならば } M \models_s C \Leftrightarrow M \models_u B \text{ ならば } M \models_u C$$
   定義から
$$M \models_u B \text{ ならば } M \models_u C \Leftrightarrow M \models_u B \to C$$

4. $A = \Box B$ のとき
   $(\Rightarrow)$
   対偶をとって証明する。$M \not\models_u \Box B$ であると仮定する。このとき定義から
$$M \not\models_u \Box B \Leftrightarrow uRv \text{ となるある } v \text{ に対して } M \not\models_v B$$
   となる。ここで定義および帰納法の仮定から
$$uR^tv \text{ となるある } v \text{ で } M^t \not\models_v B$$
   となる。よって定義から
$$M^t \not\models_u \Box B$$
   となり、対偶が示された。

   $(\Leftarrow)$
   $M \models_u \Box B$ であると仮定する。ここで任意の S^t の要素 v において uR^tv という関係を仮定する。ここで、R^t の定義から
$$uRv$$
   がいえる。よって、仮定 $M \models_u \Box B$ から
$$M \models_v B$$

がいえる。ここで、帰納法の仮定より

$$M^t \models_v B$$

となる。つまり、任意の S^t の要素 v について uR^tv ならば $M^t \models_v B$ となるから、定義より

$$M^t \models_u \Box B$$

となる。

同様にして、$[F]B$ や $[P]B$ も示すことができる。

2.8　カノニカルモデル

カノニカルモデルを定義する前に、準備として無矛盾と極大無矛盾の定義をしたいと思う。

定義 2.21 ($L - consistent$)
ある論理 L と $Fma(\Phi)$ の部分集合 Γ に対して

$$\Gamma \nvdash_L \bot$$

であるとき、Γ は $L - consistent$（L で無矛盾）であるという。

定義 2.22 ($L - maximal$)
$Fma(\Phi)$ の部分集合 Γ に対して

- Γ が $L - consintent$　　かつ
- 任意の論理式 A に対して、$A \in \Gamma$ か、もしくは $\neg A \in \Gamma$

であるとき、Γ は $L - maximal$ (L で極大無矛盾) であるという。

$M = (S, R, V)$ は論理 L のモデルであるとする。つまり、$M \models L$ となる。ここで、すべての S の要素 s に対して

$$\Gamma_s = \{A \in Fma(\Phi) : M \models_s A\}$$

となるような集合 Γ_s を関連づける。このとき、$M \models_s \bot$ となることはありえないので、Γ_s は $L - consistent$ となる。また、すべての論理式 A に対し、A か $\neg A$ のどちらかが Γ_s の要素となる。

定理 2.23 ($Lindenbaum$ の定理)
$L - consistent$ な論理式の集合 Γ は、必ず $L - maximal$ な集合に含まれる。

証明

Φ が可算であると仮定すると、$Fma(\Phi)$ の要素全体を

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

というように数えあげることができる。このとき $L - consistent$ な論理式の集合 Γ を

$$\Delta_0 = \Gamma$$

とおき、さらに

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{A_n\} & \Delta_n \cup \{A_n\} \quad \text{が } L\text{-consistent のとき} \\ \Delta_n \cup \{\neg A_n\} & \text{その他の場合} \end{cases}$$

とする。このとき

$$\Delta = \bigcup \{\Delta_n : n > 0\}$$

と定める。このようにして、$Fma(\Phi)$ の任意の要素 A_n について、A_nまたは$\neg A_n$ を Δ_n の要素とし、無矛盾なまま拡張できるので Δは L-maximal になる。つまり $L - consistent$ な論理式の集合を元にして、$L - maximal$ な集合にまで拡張できることがわかる。

定義 2.24 (カノニカルモデル)
無矛盾な標準論理 L のカノニカルモデルを次のように定める。

$$M^L = (S^L, R^L, V^L)$$

ここで

$S^L = \{s \subseteq Fma(\Phi) : s \text{ は } L - maximal\}$
(S^L は極大無矛盾な集合 s の集合である)

$sR^L t \Leftrightarrow \{A \in Fma(\Phi) : \Box A \in s\} \subseteq t$
($sR^L t$ の必要十分条件は $\Box A$ が s の要素になるような論理式 A の集合が t に含まれることである)

$V^L(p) = \{s \in S_L : p \in s\}$
(付値の決め方は、S^L の要素 s に含まれる p は真とする。)

とする。

定理 2.25
任意の S^L の要素 s と、任意の論理式 A に対して

$$\Box B \in s \Leftrightarrow sR^L t \text{ となるすべての } t \text{ で } B \in t$$

証明
$(\Rightarrow)$
$\Box B \in s$ と仮定する。このとき任意の S^L の要素 t について $sR^L t$ とすると、R^L の定義から

$$\{B \in Fma(\Phi) : \Box B \in s\} \subseteq t$$

となる。よって

$$sR^L t \text{ となるすべての } t \text{ で } B \in t$$

がいえる。

$(\Leftarrow)$
$sR^L t$ となるすべての t で $B \in t$ を仮定する。ここで

$$\{A : \Gamma \vdash_L A\} = \bigcap \{\Delta \in S^L : \Gamma \subseteq \Delta\} \quad \ldots \quad (1)$$

という命題が正しいことを示す。

定義 2.26
$(\Rightarrow)$
$\Gamma \vdash_L A$ とする。また $\Gamma \subseteq \Delta$ かつ $\Delta \in S^L$ とする。ここで、$\neg A \in \Delta$ ならば

$$\Delta \vdash_L \neg A \text{ かつ } \Delta \vdash_L A$$

である。ゆえに

$$\Delta \vdash_L \perp$$

となり、$\Delta \in S^L$ という仮定に反する。したがって

$$\neg A \notin \Delta$$

となる。ここで、Δ が L-maximal であることから

$$A \in \Delta$$

がいえる。

$(\Leftarrow)$
$\Gamma \nvdash_L A$ とする。このとき

$$\neg\neg A \to A \in L$$

とすると、定義から

$$\Gamma \nvdash_L \neg\neg A$$

となり、これは

$$\Gamma \nvdash \neg A \rightarrow \perp$$

となる。このことから

$$\Gamma \cap \{\neg A\} \nvdash_L \perp$$

となるので、$\Gamma \cup \{\neg A\}$ は L-consistent である。したがって、ある S^L の要素 Δ に対し

$$\Gamma \cup \{\neg A\} \subseteq \Delta$$

となる。よって

$$A \notin \Delta$$

がいえる。

$$sR^L t \text{ となるすべての } t \text{ で } B \in t$$

という条件をいいかえると

$$B \text{ はすべての } \{A : \Box A \in s\} \text{ を含むすべての } L - maximal \text{ 集合に属する}$$

となるので

$$\{A : \Box A \in s\} \vdash_L B$$

となる。また、necessitation より

$$L \text{ が } normal \text{ なとき} \Gamma \vdash_L A \text{ ならば } \{\Box B : B \in \Gamma\} \vdash_L \Box A$$

が正しくなり、上のことから

$$\{\Box A : \Box A \in s\} \vdash_L \Box B$$

が導かれる。さらに一般に

$$\Gamma' \subseteq \Delta' \text{かつ} \Gamma' \vdash_L C \text{ ならば} \Delta' \vdash_L C$$

が成り立つので、$\Gamma' = \{\Box A : \Box A \in s\}$ かつ$\Delta' = s$ とすれば

$$s \vdash_L \Box B$$

となる。仮定は s は maximal であるから

$$\Box B \in s$$

が示される。

補題 2.27
任意の S^L の要素 s と、任意の論理式 A に対して

$$M^L \models_s A \Leftrightarrow A \in s$$

証明
式の構成に関する帰納法で証明する。

1. $A = p$ のとき
   V^L の定義から
   $$M^L \models_s p \Leftrightarrow p \in s$$

2. $A = \perp$ のとき
   $M^L \models_s \perp$ となることも、s が極大無矛盾であることから $\perp \in s$ となることもないので
   $$M^L \not\models_s A \Leftrightarrow A \notin s$$

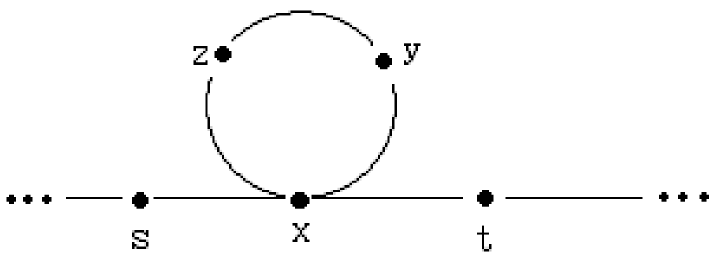
3. $A = B \rightarrow C$ のとき
   $(A \rightarrow B) \in \Gamma$ の必要十分条件は ($A \in \Gamma$ならば $B \in \Gamma$) なので、帰納法の仮定から示すことができる。

4. $A = \Box B$ のとき
   定理 2.26 を用いる。

2.9 クラスタ，バルーン，ダンベル，サークル

ここでは、この論文で議論される特徴的なフレームの形について述べ、定義していきたい。

二項関係 R が反対称関係（xRy かつ yRz ならば $x = y$）でないとき、つまり xRy かつ yRx かつ $x \neq y$ であるとき、クラスタとよばれる下図のようなかたまりができる。



ここで、このクラスタの正確な定義を与えておく。

定義 2.28 (クラスタ)
R が推移的なフレーム $F=(S,R)$ について、二項関係 $\approx$ を任意の S の要素　s,t に対し

$$s \approx t \Leftrightarrow s=t \text{ または } (sRt \text{ かつ } tRs)$$

と定義する。このとき s の属す同値類、すなわち

$$C_s = \{t : s \approx t\}$$

となるような集合 C_s を s の $R-$ クラスタという。またクラスタ間の擬順序は

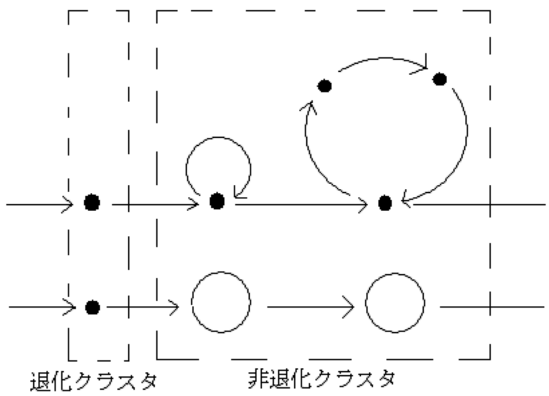
$$\begin{aligned} C_s \leq C_t &\Leftrightarrow sRt \\ C_s < C_t &\Leftrightarrow C_s \leq C_t \text{かつ } C_s \neq C_t \\ &\Leftrightarrow sRt \text{ かつ} \neg tRs \end{aligned}$$

と定める。

定義 2.29 (クラスタの種類)
クラスタには、退化クラスタと非退化クラスタの 2 種類がある。

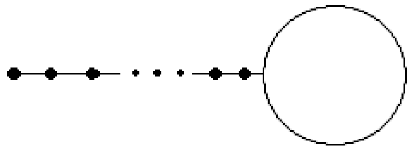
1. 退化クラスタ
   クラスタ C が $C \not\leq C$ であるとき、クラスタ C を退化クラスタと呼ぶ。退化クラスタ C は、$C=\{s\}$ の 1 点だけからなり反射的ではない (sRs でない) 。また、図では黒丸 ● で表現する。

2. 非退化クラスタ
   クラスタ C が $C \leq C$ であるとき、クラスタ C を非退化クラスタと呼ぶ。ここでクラスタ C は、$C=\{s\}$ の 1 点だけからなり反射的である (sRs となる) か、２点以上からなるクラスタである。また、図では白丸 ◯ で表現する。



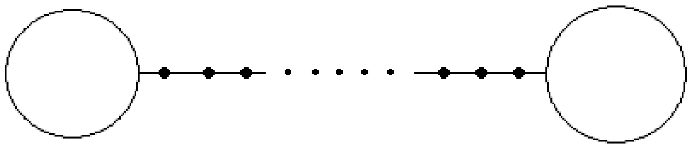
クラスタの列の例

定義 2.30 (バルーン)
右端（または左端）のみが非退化クラスタで、それ以外は退化クラスタである有限で推移的で連結性をもっているフレームをバルーンという。



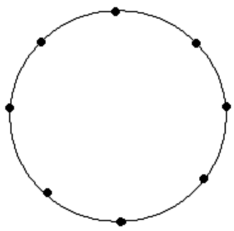
バルーンの例

定義 2.31 (ダンベル)
両端が非退化クラスタで、それ以外が退化クラスタである有限で推移的で連結性をもっているフレームをダンベルという。



ダンベルの例

定義 2.32 (サークル)
非退化クラスタ 1 つだけからなる有限のフレームをサークルという。



サークルの例

3　Goldblatt による線形様相論理と線形時間論理の完全性の証明方法

Goldblatt は、クラスタの概念を用いて離散的線形様相論理と離散的線形時間論理の完全性を証明しようとした。ここではその証明方法を紹介する。

はじめに離散的線形様相論理の自然数フレーム $(\omega, <)$ についての完全性を証明する。ただし ω は自然数全体の集合を表す。

3.1　線形様相論理に対する完全性の証明の outline

はじめに離散的線形様相論理の体系を以下のように定義する。

定義 3.1
離散的線形様相論理の体系は K4DLZ である。

以下では K4DLZ を Ω と表す。
それぞれの公理型および対応する意味論的性質は以下の通りである。

- 4:□A→□□A （推移的）
- D:□A→◇A （継続的（時間に終わりがないということ））
- L:□(A∧□A→B)∨□(B∧□B→A) （連結性（線形性））
- Z:□(□A→A)→(◇□A→□A) （ $(\omega, <)$ において離散的である）

一般的に完全性を証明するにはカノニカルモデルを用いる。K4DLZ の完全性の証明は

$$\nvdash_{\Omega} A \Rightarrow (\omega, <) \not\models A$$

という強い形で証明することができる。

これを

1. $\nvdash_{\Omega} A$ ならば、ある balloon F で $F \not\models A$

2. ある balloon F に対し $F \not\models A$ ならば $(\omega, <) \not\models A$

の二段階に分けて証明する。この証明方法では

1. から、Ω の完全性を示すことができる
1. と 2. から、Ω の有限モデル性を示すことができる

という利点がある。

3.2　第一モデルから最終モデルまで

はじめに以下の 5 つの手順によって

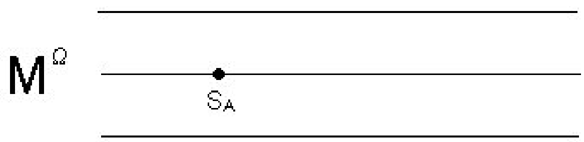
1) $\nvdash_\Omega A$ ならば、ある balloon F で $F \not\models A$

を示す。

[手順 1] **第一モデル**　M^Ω

$\nvdash_\Omega A$ をもとに、カノニカルモデル M^Ω を作る。これを第一モデルとする。

カノニカルモデルの一般性から、$M^\Omega \not\models A$ となる。つまり M^Ω の中に A が成り立たないような点 S_A が存在するということである。
ここで、M^Ω は推移的, 継続的, 弱連結となることを示すことができる。
しかし、M^Ω が連結となる保証は無いので、下図のような形であると考えられる。



[手順 2] **第二モデル**　M

第二モデル M は、M^Ω の s_A を含む連結成分で、さらに s_A から有限ステップで到達可能な点からなるものとする。M は数学的に次のように定義されている。

第一モデル M^Ω の関係 R の反射的推移的閉包を R^* とする。すなわち、$x, y \in M^\Omega$ に対し、R^* を

$xR^{*}y \Leftrightarrow$ ある $z_0, z_1, \ldots, z_n \in M^{\Omega}$ が存在し、

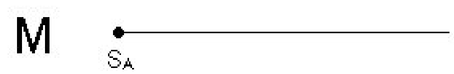
(1) $z_0 = x, z_n = y$　　　かつ

(2) $i < n$ ならば $z_i R z_{i+1} (0 \leqq n)$

により定めることとする。また、更に $S = \{t | s_A R^{*} t\}$ とし、V は

$$V(p) = V^{\Omega}(p) \cap S$$

とする。これらから、M = (S,R,V) と定める。　ここで、M は推移的, 継続的, 連結となっていることが示される。したがって、第二モデル M は下の図のように表され、$M \not\models_{S_A} A$ となる。



[手順 3]　**第三モデル**　M^{τ}

M の Γ-filtration M^{τ} を作る。これを第三モデルとする。ただし、 Γ は A の部分論理式全体からなる集合とする。
定理 2.20 より、A は s_Aの同値類$|s_A|$ で

$$M^{\tau} \not\models_{|S_A|} A$$

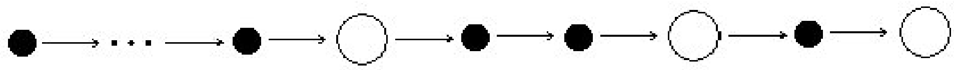
となっている。
　$M^{\tau} = (S_{\Gamma}, R^{\tau}, V_{\Gamma})$ において集合 S_{Γ} は有限であり、また M^{τ} は推移的, 継続的, 連結となることが示される。
　また、最後のクラスタを C_x とすると、C_x は非退化クラスタであり、公理型 D より $xR^{\tau}y$ となる y が存在する。クラスタの定義より

$$C_x \leq C_y$$

となっているが、C_x は最後のクラスタなので

$$C_x = C_y$$

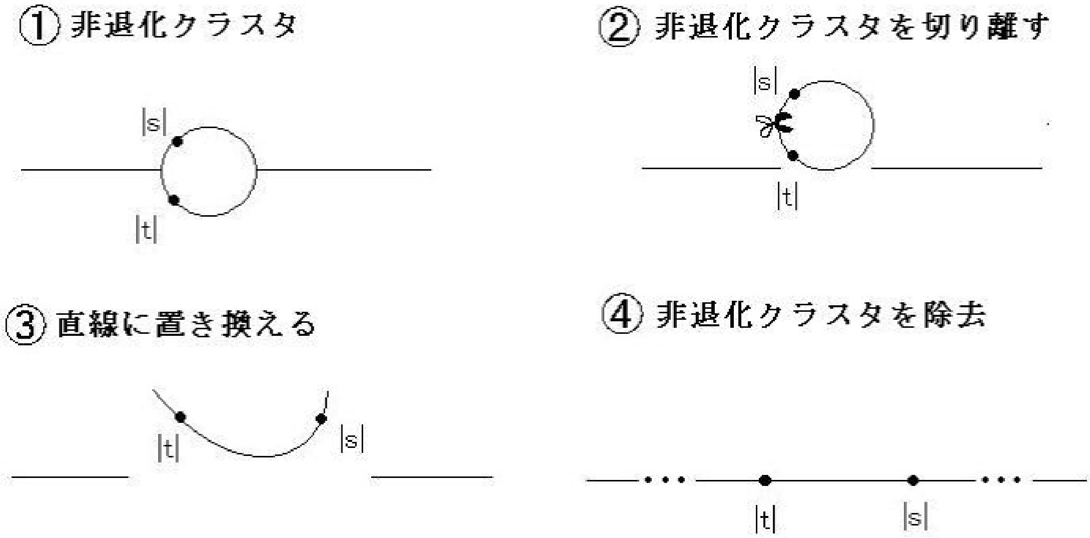
となる。よって、最後のクラスタは反射的になっているはずである。よって、最後のクラスタは非退化クラスタでなければならない。）したがって、M^{τ} は以下のような形をしている。



[手順4] **第四モデル**

第三モデル M^{τ} では、最後のクラスタが非退化クラスタとなっている他方、それより前のクラスタは退化クラスタと非退化クラスタが入り交じった状態で線形に繋がっていると考えられる。このままの状態では必ずしも $(\omega, <)$ からの p-モルフィズムを与えることができないので、下図のように非退化クラスタをいくつかの退化クラスタの列に置き換え、さらに置き換えた後も $|S_A|$ で A が成り立たないことを保ったままにしたい。

ここで Γ-filtration により、元のモデルと比べて Γ の要素の真理値については変わらないことが保証されているが、$\Box B$ の形の論理式については次項で紹介するように真理値が変わることも予想される。

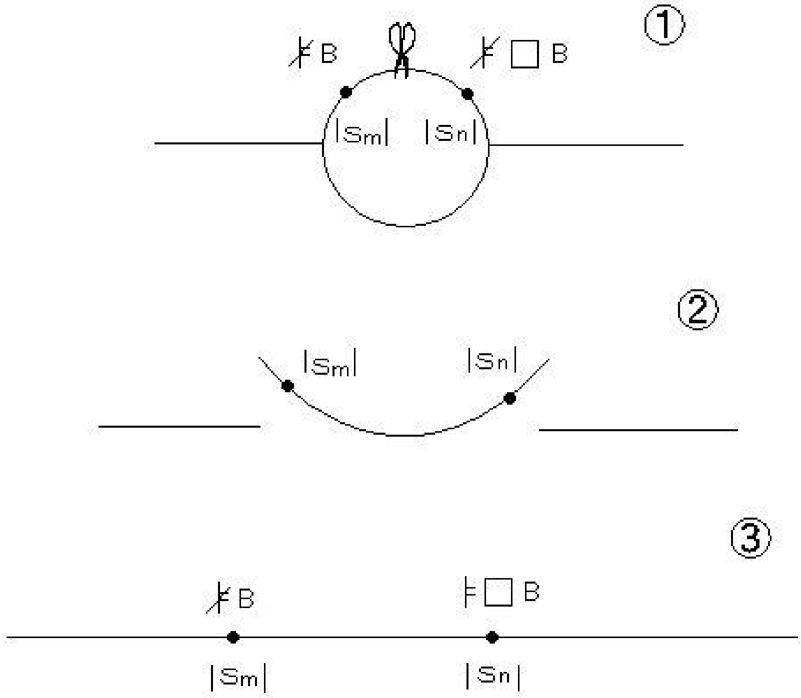


例えば、下図のようなフレームを考える。

(1) $|s_m|$ 以外のすべての点で A が成り立つとする。図1の場合 $|s_n|$ から $|s_m|$ に到達可能なので、$|s_n|$ では $\Box B$ は成り立たない。

(2) $|s_m|$ と $|s_n|$ を含む中央のクラスタを1のように切り開いて図2のように一本の線になるように伸ばし、さらに新しいフレームでは $|s_n|$ から $|s_m|$ へは到達不可能とする。

(3) すると、図3のようなフレームになり、このとき $|s_n|$ では $\Box B$ は成り立つようになるので、各点での真理値が保存されないことになる。



このように、$\Box B$ のような形をした論理式に対しては、真理値が一致しないという可能性が考えられる。

ここで、このようなことが起こらないことを次の補題によって示す。

補題 3.2 (Z-Lemma)
R^τ において $C_{|s|}$ を最後でない非退化クラスタと仮定する。このとき、$\Box B \in \Gamma$ かつ $M \not\models_s \Box B$ とすると、$M \not\models_t B$ かつ $C_{|s|} < C_{|t|}$ となる $t \in S$ が存在する。

証明

$\Box B \in \Gamma$ かつ $M \not\models_s \Box B$ であると仮定する。

1. $M \models_s \Diamond\Box B$ のとき

   Z は $\Box(\Box B \to B) \to (\Diamond\Box B \to \Box B)$ という形だったので、$M \models Z$ より

   $$M \models_s \Box(\Box B \to B) \text{ ならば } M \models_s \Box B$$

   となり矛盾する。ここで $M \not\models_s \Box(\Box B \to B)$ とすると sRt となるようなある点 t において

   $$M \not\models_t \Box B \to B \Leftrightarrow M \models_t \Box B \text{ かつ } M \not\models_t B$$

となる。このとき、R の Γ-Filtration である R^τ と二項関係 sRt から

$$|s|R^\tau|t|$$

となることがいえる。よって、定義から

$$C_{|s|} \leq C_{|t|}$$

となる。いま $|s| \sim |t|$ とすると、$M \models_t \Box B$ より $M \models_s \Box B$ となるがこれは矛盾する。よって

$$C_{|s|} < C_{|t|}$$

となる。

2. $M \not\models_s \Diamond\Box B$ のとき

$C_{|s|}$ は最後のクラスタでないから $C_{|s|} \leq C_{|u|}$ となる u が存在する。いま uRs または $s = u$ とすると、$C_{|u|} \leq C_{|s|}$ となるがこれは矛盾する。また、R は連続で、uRs でも $u = s$ でもないことから sRu となる。このとき、定義から

$$M \not\models_s \Diamond\Box B \Rightarrow sRx \text{ となるすべての } x \text{ について } M \not\models_x \Box B$$

となる。特に、x として u をとると

$$M \not\models_u \Box B$$

となる。ゆえに定義から uRt となるある点 t において $M \not\models_t B$ となる t が存在する。

以上より

$$sRu \text{ かつ } uRt \text{ ならば } C_{|s|} < C_{|u|} \leq C_{|t|}$$

が示される。

[手順 5] **最終モデル** M'

M' は、最初と最後が非退化クラスタであり、それ以外は手順 4 のように非退化クラスタは有限の退化クラスタの列に置き換えたモデル、つまり balloon である。ここで $B \in \Gamma$ となる任意の B に対して

$$M \models_s B \iff M' \models_{|s|} B$$

となる。ここで、特に $B = \Box D$ の形であるときに上の命題が成り立つことの証明を以下のように与えておく。

証明

(1) $\Box D \in \Gamma$かつ $M \models_s \Box D$ のとき sRt となる点 s, t に対応するクラスタの関係について

(a) $|s|R^\tau|t|$ かつ $C_{|s|} < C_{|t|}$ または

(b) $C_{|s|} = C_{|t|}$

となることがいえる。

(a) の場合は、定義から

$$M \models_s \Box D \Leftrightarrow sRt \text{ となるすべての } t \text{ に対して } M \models_t D$$

である。ここで帰納法の仮定から

$$M' \models_{|t|} D$$

となる。これは sRt となるすべての t に対して同じことがいえる。さらに $|s|R^\tau|t|$ であることから、

$$|s|R^\tau|t| \text{ となるすべての } |t| \text{ について } M' \models_{|t|} D$$

となる。よって、定義から

$$M' \models_{|s|} \Box D$$

がいえる。

(b) の場合は、ある非退化クラスタ C において、C の要素 $|s|, |t|$ について

$$|s|R^\tau|t| \text{ かつ } |t|R^\tau|s|$$

ということができる。ここで R の Γ-filtration の定義 (F2) より、$M \models_t D$ なので

$$M' \models_{|t|} D$$

といえる。よって

$$M' \models_{|s|} \Box D$$

がいえる。

したがっていずれの場合も $|s|R^\tau|t|$ と $M \models_s \Box D$ から、(F2) を適用して $M \models_t D$ が得られる。

(2) $\Box D \in \Gamma$かつ $M \not\models_s \Box D$ のとき

(a) $C_{|s|}$ が最後のクラスタでない場合
定義から

$$M \not\models_s \Box D \Leftrightarrow sRt \text{ となるある } t \text{ に対して } M \not\models_t D$$

となる。また、$C_{|s|}$ が最後のクラスタでないことから、 Z-Lemma より

$$C_{|s|} < C_{|t|}$$

となる。帰納法の仮定とクラスタの定義から

$$M' \not\models_{|t|} D \text{ かつ } |s|R'|t|$$

となる。したがって

$$M' \not\models_{|s|} \Box D$$

がいえる。

(b) $C_{|s|}$ が最後のクラスタの場合

R の Γ-filtration の定義 (F1) より、sRt ならば $|s|R^{\tau}|t|$ であることがいえる。 さらに Z-Lemma から

$$|s|R^{\tau}|t| \Leftrightarrow |s|R'|t|$$

である。また、帰納法の仮定から sRt となる任意の t について

$$M \not\models_t D \text{ ならば } M' \not\models_{|t|} D$$

となることがいえる。よって

$$|s|R'|t| \text{ かつ } \quad M' \not\models_{|t|} D$$

より

$$M' \not\models_{|} s|\Box D$$

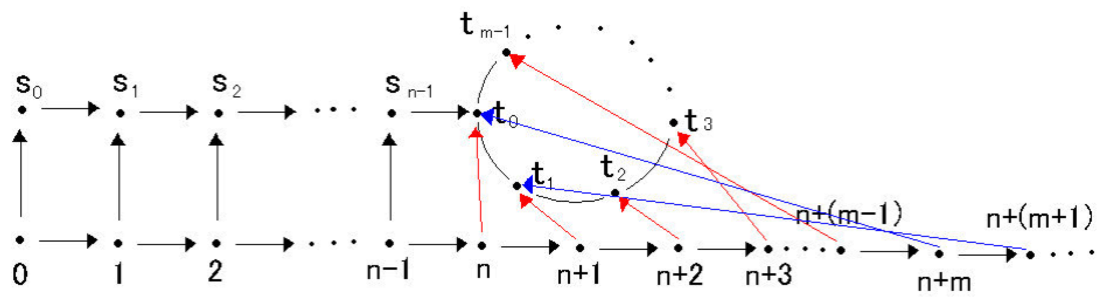
がいえる。

特に $M \not\models_{S_A} A$ ならば $M' \not\models_{|S_A|} A$ となるので、A は balloon M' で 偽となる。

以上の手法によって
1) $\nvdash_{\Omega} A \Rightarrow$ ある balloon F で $F \not\models A$
が示された。

3.3 自然数フレームから balloon への p-モルフィズム

次に
2) ある balloon F で $F \not\models A \Rightarrow (\omega, <) \not\models A$
を示す。
これは $(\omega, <)$ から balloon$F$ への p-モルフィズム f を与えることによって示される。



実際に $f : \omega \to F$ を以下のように定めると、f は p-モルフィズムになる。

$$f(a) = \begin{cases} s_x & 0 \leq a \leq n-1 \text{ のとき} \\ t_a(\text{ただし、}x\text{ は }a-n\text{ を }m\text{ で割ったあまり}) & n \leq a \text{ のとき} \end{cases}$$

このようにして一方向からなる離散的線形様相論理 K4DLZ の完全性が証明された。

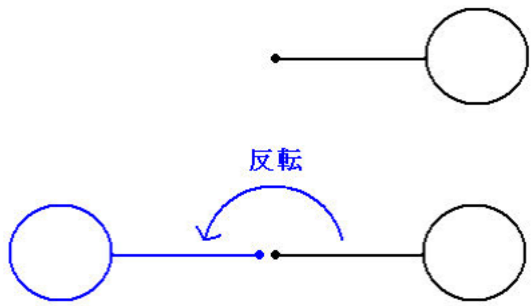
つぎに二方向からなる離散的線形時間論理 LinDisc の完全性を証明したいと思う。

3.4　線形時間論理に対する完全性の証明の outline

Goldblatt は、線形様相論理 K4DLZ の $(\omega, <)$ に対する完全性の証明を利用し、同様にして線形時間論理 LinDisc の整数フレーム $(Z, <)$ に対する完全性が証明できると考えた。証明の outline は以下の通りである。

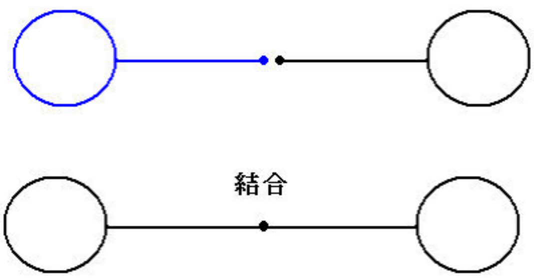
[手順 1] **反転**

はじめに、バルーンを反転させる。右端の最後に非退化クラスタを持つバルーンは、3.1 や 3.2 で示した通り $(\omega, <)$ に対応している。自然数フレーム $(\omega, <)$ において　ω は 0 または正の整数全体の集合だから、反転させたバルーンは 0 または負の整数全体の集合からなるフレームとして考えることができる。



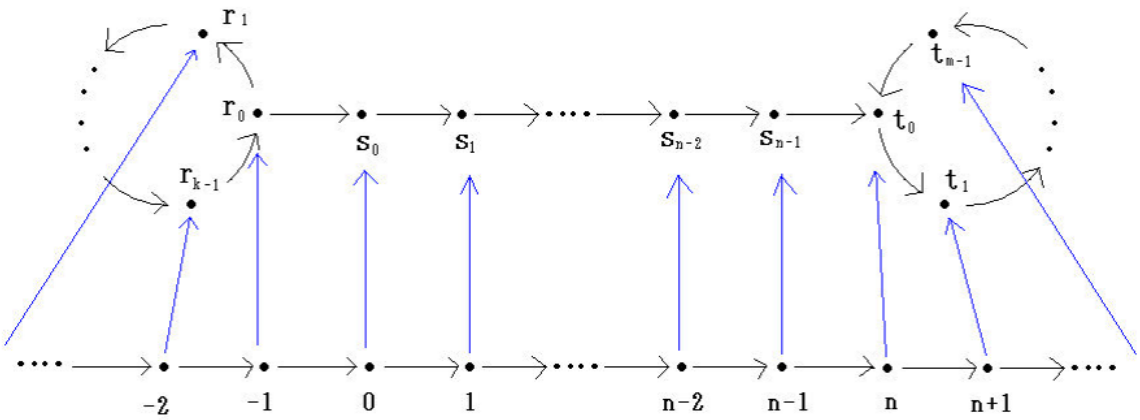
[手順 2] **結合**

次に、反転させたバルーンともとのバルーンを 0 の点で結合する。こうすることで、両端のみが非退化クラスタであるモデルであるダンベルができる。0 を含む正の整数に対応するフレームと 0 を含む負の整数に対応するフレームを結合させたので、ダンベルはすべての整数に対応するフレーム $(Z, <)$ に対応しているといえる。



[手順３] **p-モルフィズム**

最後に整数フレームからダンベル D への p-モルフィズム f を考えてみる。体系 K4DLZ の場合と同様に、このような写像 f として、有限個だけシフトすることにより次のような形であると考えても一般性を失わない。



$f : Z \to D$

$$f(a) = \begin{cases} r_x(\text{ただし、}x\text{ は }-a-1\text{ を }k\text{ で割ったあまり}) & a < 0\text{ のとき} \\ s_a & 0 \leq a \leq n-1\text{ のとき} \\ t_y(\text{ただし、}y\text{ は }a-n\text{ を }m\text{ で割ったあまり}) & n \leq a\text{ のとき} \end{cases}$$

以上のようにして証明される。

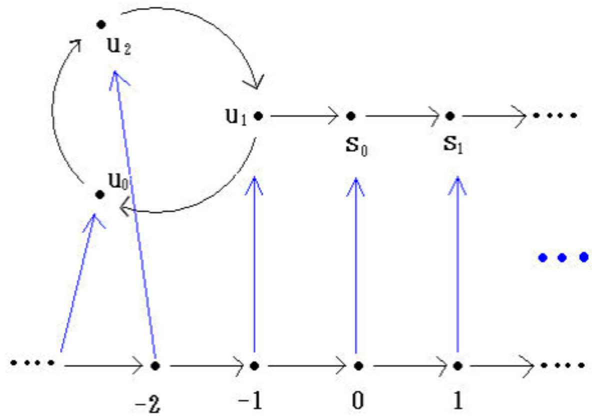
一見正しいように見えるこの証明には、２つの問題点が隠れている。次章では、この証明方法の問題点について述べたいと思う。

4 Goldblattの証明方法の問題点

離散的線形様相論理K 4 DLZの自然数フレームに対する完全性の証明では、バルーンを使った証明方法が有効だったが、離散的線形時間論理LinDiscの整数フレームに対する完全性の証明には問題が生じることが、米森[8]により明らかにされた。この章では、どのような問題が発生するかを示し，その原因を明らかにしたいと思う。

4.1 p-モルフィズムに関する問題点

はじめに、整数フレームからダンベルDへのp-モルフィズムについて調べてみる。前章で挙げたp-モルフィズムの例をもう一度見てみよう。ここで、最初の非退化クラスタからそれに続く退化クラスタ、および最後の非退化クラスタとその直前の退化クラスタを拡大してみて見ることにする。ここでは簡単のため、非退化クラスタ内の点を3つとし、その3点をそれぞれ　$u_0, u_1, u_2,$　とする（つまり、$u_x(x=0,1,2)$ならば左端の非退化クラスタの中の点であるということになる。)。また、特に最初の非退化クラスタからそれに続く退化クラスタにかけての部分に注目したいと思う。



$D=(S,R,V)$に対し、写像$f: Z \to S$を以下のように定める。

$$f(a)=\begin{cases} u_x(\text{ただし、}x\text{は}-a\text{を}3\text{で割ったあまり}) & a<0\text{のとき} \\ s_a & 0 \le a \le n-1\text{のとき} \end{cases}$$

ここで、p-モルフィズムの定義を思い出したい。

二つのモデル$M_1=(S_1,R_1,V_1), M_2=(S_2,R_2,V_2)$について様相論理でのp-モルフィズムの定義は、写像$f: S_1 \to S_2$が

1. sR_1t ならば $f(s)R_2f(t)$
2. $f(s)R_2u$ ならば sR_1t かつ $f(t)=u$ なる t が存在する
3. $s\in V_1(p)\Leftrightarrow f(s)\in V_2(p)$

という 3 つの条件を満たすことであった。しかし、時間論理での p-モルフィズムの定義においては $[P]$ と $[F]$ の二つの演算子があるため、これらに加え

4. $uR_2f(s)$ ならば tR_1s かつ $f(t)=u$ なる t が存在する

という条件を満たさなければならない。

LinDisc が整数フレームに関して完全であることを証明するためには、与えられた写像 f がもちろん時間論理での p-モルフィズムのすべての条件を満たすことを示さなくてはならない。

しかし、ダンベルの左端付近に注目すると、p-モルフィズムの条件 2 を満たさなくなることがわかる。

具体的にいえば、ダンベルの定義から、一番最初のクラスタは必ず非退化クラスタになるので

$$f(-1)Ru_0$$

となっている。ここで、p-モルフィズムの条件 2 から

$$-1<i \text{ かつ } F(i)=u_0 \text{なる } i \text{ が存在する}$$

はずである。しかしここで $i=0$ について考えると

$$f(0)=s_0$$

なので、定義から左端の非退化クラスタの中に $f(0)$ は含まれないことがわかる。よって

$$f(0)\neq u_0$$

となる。同様にすべての $0<i$ なる i について

$$f(i)=u_0$$

となることはないので、f は p-モルフィズムの条件を満たさないことがわかる。

同様の議論により，右端付近の退化クラスタと非退化クラスタにおいて、f は p-モルフィズムの条件 3 を満たさないことがわかる。

以上より、整数フレームからダンベルへの p-モルフィズムは存在しないということがわかる。また、このような問題が起こった理由は、様相論理と時間論理の p-モルフィズムの定義を混同したためだといえる。

4.2 Z_F と Z_P に関する問題点

次に、整数フレームで恒真である公理型が、ダンベルでも恒真であるかどうかを確かめたい。このとき、Z_F と Z_P において偽となることが２つ目の問題点である。

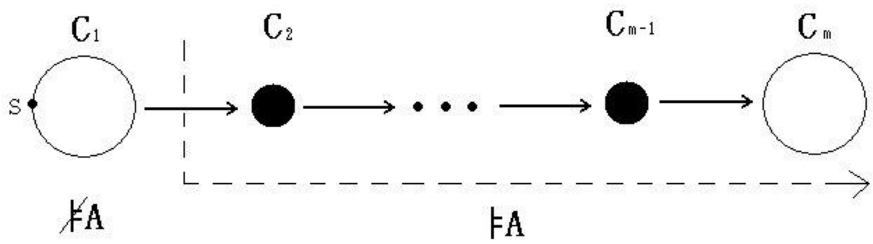
命題 4.1
あるダンベル D において、$D \not\models Z_F$ および $D \not\models Z_P$ である。

証明
例として、Z_F が偽になるようなダンベル $D = (S, R, V)$ を与える。

下図のように、左端の非退化クラスタ以外のすべてのクラスタでは A が成り立つように付値を与える。つまり、$s \in C_1$ とし、さらに

$$sRt \text{ かつ} \neg tRs \Leftrightarrow D \models_t A$$

であるように付値を与えるものとする。



ここで、

$$\begin{aligned}
D \not\models_s Z_F \Leftrightarrow & D \not\models_s [F]([F]A \to A) \to (\langle F \rangle [F]A \to [F]A) \\
\Leftrightarrow & D \not\models_s (\neg [F]([F]A \to A) \text{ または } (\langle F \rangle [F]A \to [F]A)) \\
\Leftrightarrow & D \models_s [F]([F]A \to A) \text{ かつ } D \not\models_s \langle F \rangle [F]A \to [F]A \\
\Leftrightarrow & D \models_s [F]([F]A \to A) \text{ かつ } D \not\models_s (\neg \langle F \rangle [F]A \text{ または } [F]A) \\
\Leftrightarrow & D \models_s [F]([F]A \to A) \text{ かつ } D \models_s \langle F \rangle [F]A \text{ かつ } \not\models_s [F]A
\end{aligned}$$

となる。よって、$D \not\models_s Z_F$ の必要十分条件は、

1. $D \models_s [F]([F]A \to A)$
2. $D \models_s \langle F \rangle [F]A$
3. $D \not\models_s [F]A$

の３つの条件が成り立つことであることがわかる。

ここで実際に３つの条件が成り立つかどうかを調べてみる。

1.　$D \models_s [F]([F]A \to A)$ について

条件１の必要十分条件は

$$\begin{aligned} D \models_s [F]([F]A \to A) &\Leftrightarrow sRt \text{ となるすべての } t \text{ に対して } D \models_t [F]A \to A \\ &\Leftrightarrow sRt \text{ となるすべての } t \text{ に対して } D \not\models_t [F]A \text{ または } D \models_t A \end{aligned}$$

である。つまり

(1) $D \not\models_t [F]A$

(2) $D \models_t A$

のいずれかを満たせば条件１は成り立つ。ここで、任意に sRt となる t をとる。この t に対して、

- tRs が成り立つとき (すなわち $t \in C_1$のとき)
  C_1 の中に A が成り立たない点 u が存在し、$t, u \in C_1$ より tRu かつ $D \not\models_u A$ より $D \not\models_t [F]A$ となり (1) を満たす。
- tRs が成り立たないとき (すなわち $t \notin C_1$のとき)
  定義 (sRt かつ$\neg tRs \Leftrightarrow \models_t A$) より $D \models_t A$ だから (2) を満たす。

よって、条件１は成り立つ。

2.　$D \models_s \langle F\rangle[F]A$ について

条件２の必要十分条件は

$$D \models_s < F > [F]A \Leftrightarrow sRt \text{ となるある } t \text{ に対して } D \models_t [F]A$$

である。これは、$t \notin C_1$ のときは定義から明らかに $D \models_t [F]A$ が成り立つので、条件２も成り立つことがいえる。

3.　$D \not\models_s [F]A$ について

条件３の必要十分条件は

$$\not\models_s [F]A \Leftrightarrow sRt \text{ となるある } t \text{ に対して } D \not\models_t A$$

である。ここで、定義から C_1 の中に A が成り立たない点 u が存在し、t として u をとると条件 3 が成り立つことがわかる。

以上より、例に挙げたダンベル D は、3 つの条件を満たすので

$$D \not\models Z_F$$

であることが証明された。同様にして、$D \not\models Z_P$ であることも証明できる。

このような問題が起こる原因として、Z_F に関しては一番最後が非退化クラスタになっていることであり、Z_P に関しては一番最初が非退化クラスタになっていることが考えられる。

5　サークルで特徴づけられる時間論理 L_C の公理化

前章では、ダンベルで Z_F および Z_P が偽となることが示された。では、どのようなフレームであれば Z_F や Z_P は恒真になるだろうか。また、そのようなフレームのクラスで特徴づけられる体系はどのような公理からなるものだろうか。

この章では、この 2 つに的を絞って調べていきたいと思う。

5.1　LinDisc の公理をすべて満たすフレーム

LinDisc の公理に D_F と D_P が含まれるため、必ず最初と最後のクラスタは非退化クラスタでなければならない。しかし、Z_F や Z_P を成り立たせるためには、最初のクラスタが非退化クラスタでそれ以外が退化クラスタであることと、最後のクラスタが非退化クラスタでそれ以外が退化クラスタになるという 2 つの条件を同時に満たさなくてはならない。そこで考えられるのが非退化クラスタが最初で最後のクラスタになる、つまり、非退化クラスタ 1 つだけからなるフレームである。このようなフレームは、定義 2.32 よりサークルと呼ばれているものである。ここではサークルを一般的に C' と表すことにする。

定理 5.1
任意のサークルで Z_F,Z_P は真になる。

証明
背理法により証明する。

$C' \not\models Z_F$ と仮定する。定義から

$$C' \not\models [F]([F]A \to A) \to (\langle F\rangle[F]A \to [F]A)$$

となるが、これは

(1) $C' \models [F]([F]A \to A)$

(2) $C' \models \langle F\rangle[F]A$

(3) $C' \not\models [F]A$

という 3 つの条件を同時に満たさなければならないということである。ここで、非退化クラスタで

1. $C' \models A$ のとき
   C' の任意の点 $|x|$ において $C' \models_{|x|} A$ となり、かつ、定義からサークル内の任意の点 $|s|$ から任意の点 $|t|$ の間には必ず二項関係 $|s|R|t|$ が成り立っている。よって、$C' \models [F]A$ が成り立つので $C' \not\models [F]A$ は矛盾する。

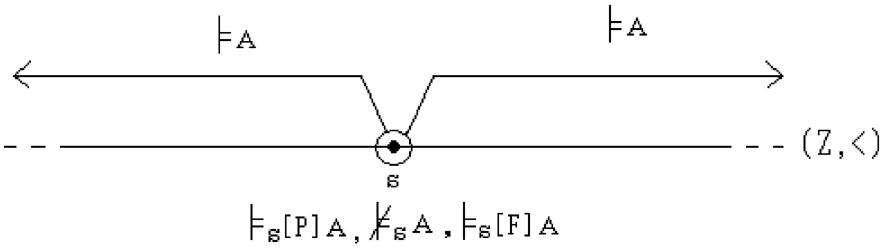
2. $C' \not\models A$ のとき

定義からサークル内のある点 $|u|$ において $C' \not\models_{|u|} A$ となるような $|u|$ が存在する。サークル内の任意の点 $|s|, |t|$ と点 $|u|$ の間には必ず二項関係 $|s|R|t|$ かつ $|t|R|u|$ が成り立っている。よって、サークル内のどんな点 $|s|$ をとっても、$|s|R|t|$ となるような任意の点について、$|t|R|u|$ かつ $C' \not\models_{|u|} A$ が成り立つ。このため $C' \models \langle F \rangle [F]A$ は矛盾する。

以上より $C' \models Z_F$ となる。同様にして $C' \models Z_P$ も示される。

これまでに体系 L の公理はサークルで恒真になることが示されている。しかし、ここである問題が生まれる。それは、サークルと整数フレームに対しての反射律である。

整数フレーム $(Z, <)$ では、どんな整数 n をとっても $n < n$ となることはない。そこで、下図のように点 s でのみ論理式 A が成り立たず、それ以外の点では A が成り立つモデルを考えたとき、s では $[F]A$ や $[P]A$ が成り立っても A が成り立たなくなる。つまり、公理型 T_F や T_P は整数フレームで恒真ではなくなってしまうので
$(Z, <) \not\models [F]A \to A$
$(Z, <) \not\models [P]A \to A$
であるといえる。



これに対し、サークルではサークル内のすべての点 s において定義から sRs が成り立っているので $C' \models [F]A \to A$ かつ $C' \models [P]A \to A$ といえる。よって、サークル C' によって特徴づけられる体系 L_C と LinDisc の体系 L では

- L_C では LinDisc の公理はすべて恒真
- Z_F, Z_P は L に属さないが、L_C では恒真

であることから

$$L \subsetneq L_C$$

という関係が成り立っていることがわかる。

5.2 サークルと反射律

5.3 公理化のための予想と証明

ここで、L_C の公理化をする。

予想

サークルは LinDisc の性質をもっているので、推移的、継続的、線形、離散的、反射的である。そのうえ前項で述べたように、サークルは反射的であることがいえる。よって、体系 L_C は LinDisc の体系 L に T_F および T_P を加えた体系 $L+T_F+T_P$ なると予想される。(ここで、今後の議論のために $L' = L+T_F+T_P$ としておく。) この予想が正しいことを以下で示す。

証明の手順

1) 任意のサークル C' で T_F, T_P が恒真になることを示す。(L がサークル C' で恒真になることは、これまでの議論で示されている。よって、サークルで特徴づけられている時間論理は T_F, T_P を持っていることを示せばよいことになる。)

2) L' で L_C を特徴づけることができることを示す。(この証明は、Goldblatt の証明法に基づいて行うことにする。)

定理 5.2 (サークルの公理化 (1))
サークルで特徴づけられる体系 L_C は体系 $L'(= L+T_F+T_P)$ と等しくなる。

証明

1. 任意のサークル C' で T_F, T_P は恒真である。

背理法により証明する。あるサークル C'' で $C'' \not\models T_F$ と仮定する。つまりサークル内にある点 s が存在し、$C'' \not\models_s T_F$ となっている。
これは定義から

$$C'' \not\models_s [F]A \to A$$

となる。つまり

(1) $C'' \models_s [F]A$ かつ

(2) $C'' \not\models_s A$

という 2 つの条件を同時に満たすことになる。ここで、(1) が真であることから、定義より

$$sRt \text{ となるすべての } t \text{ において } C'' \models_t A$$

であることがいえる。ここで、サークルの定義と C'' は推移的であることから sRt かつ tRs ならば sRs となる。ところが、sRs という関係が成り立つなら、t を s とおいたとき $C' \models_s A$ となるはずである。しかしこれは (2) と矛盾する。

よって 任意のサークル C' に対して $C' \models T_F$ となる。

同様にして $C' \models T_P$ も示すことができる。

2. L'で L_C を特徴づけることができる

対偶をとって証明する。つまり、L' で証明可能でない論理式 A に対し、あるサークル C'' で A が偽になることを示す。

はじめに $\nvdash_{L'} A$ とする。

第一モデル

$\nvdash_{L'} A$ から、カノニカルモデル $M^{L'}$ を作る。このとき定理 2.27 から

$$\nvdash_{L'} A \Rightarrow M^{L'} \not\models A$$

である。

第二モデル

カノニカルモデル $M^{L'}$ の部分モデル M を作る。このとき補題 2.21 から $s \in M$ となる s について

$$M^{L'} \not\models_s A \Rightarrow M \not\models_s A$$

である。

第三モデル

M の Γ-filtration である M^τ を作る。(ここで Γ は A の部分論理式全体からなる集合とする。) このとき定理 2.20 から s と s の同値類 $|s|$ について

$$M \not\models_s A \Rightarrow M^\tau \not\models_{|s|} A$$

である。

ここまではダンベルのときと同じように考えられる。3 章で提示した第三モデルの形は、両端が非退化クラスタで、途中は退化クラスタと非退化クラスタが入り交じった線形なものを考えてきたが、今回は Z_F および Z_P が含まれているため M^τ の形は必ずサークルになっていることに注意したい。よって

$$M^\tau \not\models A \Leftrightarrow C'' \not\models A$$

がいえる。以上により

$$\not\vdash_{L'} A \Rightarrow C'' \not\models A$$

となり、L' で証明可能でない論理式 A に対し、あるサークルで A が偽になるものを示すことができた。

よって、サークルは $C_P, C_F, 4_P, 4_F, D_P, D_F, Z_P, Z_F, T_P, T_F,$ および線形性の公理で公理化できることが示された。

5.4 L_C の公理化についての再考

時間論理 L_C は上記のように公理化できるが、これらの公理を見直し、より簡単な公理を与えることを試みる。

考察

1. $[F]A$ と $[P]A$ の同値性について

   はじめに、$C_F, C_P, 5_F, T_F$ を公理として認める。

   - $[F]A \to [P]A$ について
     C_P の A を改めて $[F]A$ で置き換えると

     $$[F]A \to [P]\langle F\rangle[F]A$$

     が成り立つ。また、5_F の necessitation

     $$[P]\langle F\rangle[F]A \to [P][F]A \quad \ldots(2)$$

     は成り立つので、(1) と (2) の detachment から

     $$[F]A \to [P][F]A \quad \ldots(3)$$

     が成り立つ。さらに T_F の necessitation

     $$[P][F]A \to [P]A \quad \ldots(4)$$

も成り立つので、(3) と (4) の detachment から

$$\frac{[F]A \to [P][F]A \qquad [P][F]A \to [P]A}{[F]A \to [P]A}$$

となり導かれる。

- $[P]A \to [F]A$ について

  T_F の双対と 5_F の双対の detachment から

  $$\frac{A \to \langle F\rangle A \qquad \langle F\rangle A \to [F]\langle F\rangle A}{A \to [F]\langle F\rangle A}$$

  となり、導かれた

  $$A \to [F]\langle F\rangle A \quad \ldots(1)$$

  は成り立つ。また、(1) の necessitation

  $$[P]A \to [F]\langle F\rangle A \quad \ldots(2)$$

  も成り立つ。ここで C_F の双対の necessitation

  $$[F]\langle F\rangle A \to [F]A \quad \ldots(3)$$

  が成り立つので、(2) と (3) の detachment から

  $$\frac{[P]A \to [F]\langle F\rangle A \qquad [F]\langle F\rangle A \to [F]A}{[P]A \to [F]A}$$

  となり導かれる。

この同値性が示されるということは、$[F]A$ と $[P]A$ は同等に見なせ、双対である $\langle F\rangle A$ と $\langle P\rangle A$ も同等に見なせる。よって以下では各公理の $F(4_F, D_F$など$)$ が導かれることを示すことで、直ちに $P(4_P, D_P$など$)$ を示すことができる。

2. $4_F(4_D)$ について

   5_F と T_F を公理として認めるとする。ここで、$[F]A$ が成り立つことを仮定する。ここで、5_F と T_F の detachment から

   $$\frac{\langle F\rangle[F]A \to [F]A \qquad [F]A \to A}{\langle F\rangle[F]A \to A}$$

   となり、導かれた

   $$\langle F\rangle[F]A \to A \quad \ldots(1)$$

   は成り立つ。また、(1) の双対

   $$A \to [F]\langle F\rangle A \quad \ldots(1)'$$

もまた成り立つ。ここで、A を改めて $[F]A$ で置き換えると

$$[F]A \to [F]\langle F\rangle[F]A \quad \ldots(2)$$

が得られる。このとき、5_F の necessitation

$$[F]\langle F\rangle[F]A \to [F][F]A \quad \ldots(3)$$

は成り立つので、(2) と (3) の detachment から

$$\frac{[F]A \to [F]\langle F\rangle[F]A \qquad [F]\langle F\rangle[F]A \to [F][F]A}{[F]A \to [F][F]A}$$

となる。よって、5_F と T_F を公理として認めたとき 4_F が導かれる。

3. $D_F(D_P)$ について

   T_F を公理として認めるとする。T_F と T_F の双対の detachment から

$$\frac{[F]A \to A \qquad A \to \langle F\rangle A}{[F]A \to \langle F\rangle A}$$

   となり、$[F]A \to \langle F\rangle A$ が成り立つことがいえる。ここで、$[F]A \to \langle F\rangle A$ と $\langle F\rangle\top$ は同値より、T_F を公理として認めることで D_F が導かれることがわかった。

4. $Z_F(Z_P)$ について

$$Z_F : [F]([F]A \to A) \to (\langle F\rangle[F]A \to [F]A)$$

   に注目したい。$\to$ の右側は 5_F の公理型と同じなので、5_F を公理として認めれば

$$\langle F\rangle[F]A \to [F]A$$

   は恒真になる。このとき

$$[F]([F]A \to A) \to (\langle F\rangle[F]A \to [F]A)$$

   は恒真になる。よって、Z_F は 5_F を公理として認めることで導かれる。

5. 線形性の公理について

   線形性の公理は

$$\Box A \to [F][P]A$$

$$\Box A \to [P][F]A$$

であった。
また、$\langle F\rangle A \to \langle P\rangle A$ が恒真であることから、A を $\langle P\rangle A$ で置き換えると

$$\langle F\rangle\langle P\rangle A \to \langle P\rangle\langle P\rangle A \quad \ldots(1)$$

が恒真であるといえる。ここで、(1) と 4_P の双対の detachment から

$$\frac{\langle F\rangle\langle P\rangle A \to \langle P\rangle\langle P\rangle A \qquad \langle P\rangle\langle P\rangle A \to \langle P\rangle A}{\langle F\rangle\langle P\rangle A \to \langle P\rangle A}$$

がいえる。さらに、detachment で得られた $[F]\langle P\rangle A \to \langle P\rangle A$ と恒真である $\langle P\rangle A \to \langle F\rangle A$ の detachment から

$$\frac{\langle F\rangle\langle P\rangle A \to \langle P\rangle A \qquad \langle P\rangle A \to \langle F\rangle A}{\langle F\rangle\langle P\rangle A \to \langle F\rangle A}$$

がいえる。また

$$\langle F\rangle A \to \langle F\rangle A \vee A \vee \langle P\rangle A \quad \ldots(2)$$

は恒真である。detachment で得られた $\langle F\rangle\langle P\rangle A \to \langle F\rangle A$ と (2) の detachment から

$$\frac{\langle F\rangle\langle P\rangle A \to \langle F\rangle A \qquad \langle F\rangle A \to \langle F\rangle A \vee A \vee \langle P\rangle A}{\langle F\rangle\langle P\rangle A \to \langle F\rangle A \vee A \vee \langle P\rangle A}$$

となり、線形性の公理型のうち $\Box A \to [F][P]A$ の双対が導かれる。同様にして、線形の公理型のうち $\Box A \to [P][F]A$ も 5_F と T_F を公理として認めることにより導くことができる。

1.〜5. より体系 L' について以下のことがいえる。

1. $C_F, C_P, T_F, 5_F$ を公理として認めれば，$[F]A \leftrightarrow [P]A$ を導くことができるため，F に関する公理と P に関する公理を区別できなくなる。
2. 4_F は 5_F と T_F を公理として認めれば導くことができる。
3. D_F は T_F を公理として認めれば導くことができる。
4. Z_F は 5_F を公理として認めれば導くことができる。
5. 線形 は，$C_F, C_P, T_F, 5_F$ を公理として認めれば $[F]A \leftrightarrow [P]A$ と 4_P を導けることを使って，導くことができる。

以上のように、定理 5.2 とこれらの考察より L_C は $C_F, C_P, 5_F, T_F$ で公理化できることがわかる。

次に、このことを定理 5.2 を用いないで直接的に証明してみよう。

定理 5.3 (サークルの公理化 (2))
サークルで特徴づけられる体系 L_C は体系 L^* ($= C_F, C_P, 5_F, T_F$) と等しくなる。

証明

1. 任意のサークル C' で $C_F, C_P, 5_F, T_F$ は恒真である。
背理法により証明する。

1) C_F について
あるサークル C'' で $C'' \not\models C_F$ とする。つまり、サークル内にある点 s が存在し、$C'' \not\models_s C_F$ となっている。これは定義から

$$C'' \not\models_s A \rightarrow [F]\langle P\rangle A$$

となる。つまり

(1) $C'' \models_s A$ かつ

(2) $C'' \not\models_s [F]\langle P\rangle A$

という 2 つの条件を同時に満たすことになる。ここで、(1) が真であるとする。しかし、(2) から

$$C'' \not\models_s [F]\langle P\rangle A \Leftrightarrow sRt \text{となるある} t \text{に対して} tRu \text{となるすべての} u \text{で} C'' \not\models_u A$$

となり、u として s をとると $C'' \not\models_s A$ となるので矛盾する。よって、$C' \models C_F$ がいえる。

2) C_P について
C_F と同様にして示す。

3) 5_F について
あるサークル C'' で $C'' \not\models 5_F$ とする。つまり、サークル内にある点 s が存在し、$C'' \not\models_s 5_F$ となっている。これは定義から

$$C'' \not\models_s \langle F\rangle [F]A \rightarrow [F]A$$

となる。つまり

(1) $C'' \models_s \langle F\rangle [F]A$ かつ

(2) $C'' \not\models_s [F]A$

という２つの条件を同時に満たすことになる。ここで、(2) が真であるとする。しかし、(1) から

$$C'' \models_s \langle F\rangle[F]A \Leftrightarrow sRt \text{ となるある } t \text{ に対して } tRu \text{ となるすべての } u \text{ で } C'' \models_u A$$

となる。ここで、サークルの定義から任意の点 u で sRu なる関係が存在し、$C' \models A$ となるので $C'' \models_s [F]A$ となり (2) に矛盾する。よって、$C' \models 5_F$ がいえる。

4) T_F について
　定理 5.2 の証明を参照。

2. L^* でサークルが特徴づけられる。

Goldblatt の証明法に基づいて行う。L^* について、第一モデルから第三モデルは、定理 5.2 と同様に示す。ここで、L^* は公理型 5_F と T_F を含むため、その性質は未来の方向に向かってユークリッド的、かつ、反射的である。よって、二項関係 R について

(a) 任意の s, t, u に対して sRt かつ sRu ならば tRu かつ uRt　　　かつ

(b) 任意の s に対して sRs

であることがいえる。まず (a) で u を s とすると

(1)　任意の s, t に対して sRt かつ sRs ならば sRt かつ tRs

となる。また、(b) より sRs が成り立つ。したがって、(1) は

(2)　任意の s, t に対し sRt ならば tRs

と表されることになる。クラスタの定義から第三モデルは非退化クラスタ 1 つだけからなるモデルになることがわかる。よって、第三モデルの形は必ずサークルになっている。以上より

$$\nvdash_{L^*} A \Rightarrow C' \not\models A$$

が示される。

5.5 C_P に関する議論

今までの公理型は C_F と C_P が同時に存在したため、$[F]$,$[P]$ というに種類の様相を二項関係 R 1つだけで表現してきた。しかしここでは、C_P を削ることで起こる問題を調べたいので、C_F については R_F を、C_P については R_P という二項関係を明示的に区別して議論をする。

公理 $C_F, T_F, 5_F$ からなる論理を考える。このとき、この論理を特徴づけるフレームの二項関係 R_F は

1. 任意の要素 s, t について、sR_Ft ならば tR_Ps である。
2. 任意の要素 s について sR_Fs である。
3. 任意の要素 s, t, u について sR_Ft かつ sR_Fu ならば tR_Fu かつ uR_Ft である。

となっている。ここで、sR_Fu として sR_Fs をとると、

任意の要素 s, t について sR_Ft かつ sR_Fs ならば tR_Fs かつ sR_Ft である。

となる。このことから

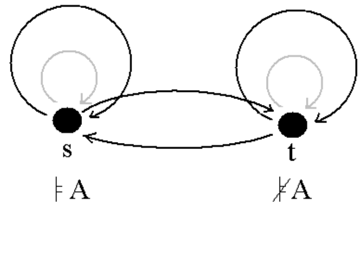
任意の要素 s, t について sR_Ft ならば tR_Fs である

ことがいえる。これだけを見ると、C_P がなくてもこの論理はサークルによって特徴づけられているように見える。しかし、以下のモデル $\mathfrak{M} = \langle \{s, t\}, R_F, R_P, V \rangle$ を与えることができるため,

$$R_F := \{(s, s), (t, t)\}$$

$$R_P := \{(s, s), (s, t), (t, s), (t, t)\}$$

$$V(A) := \{s\}$$



$C_F, 5_F, T_F$ が特徴づける論理 L^{*-} と $C_F, C_P, T_F, 5_F$ が特徴づける論理 L^* は $L^{*-} \subsetneq L^*$ という関係になることがわかる。よって、$C_F, 5_F, T_F$ だけではサークルを公理化できない。

このようなことが起こる理由は、C_F によって sR_Ft ならば tR_Ps であることを保証しているが、C_P がないため tR_Ps ならば sR_Ft であるかどうかはわからないので、一つの二項関係で $[F]$ と $[P]$ を解釈できないためであると考えられる。

ただし、必ずしも論理の中に C_P が含まれなければならないわけではない。C_P を削る代わりに

$$[F]A \to [P]A$$

が導かれるように別の公理を付け加えれば良い。なぜなら、$[F]A \to [P]A$ の A を $\langle P\rangle A$ に置き換えると

$$[F]\langle P\rangle A \to [P]\langle P\rangle A \quad \ldots(1)$$

が得られる。ここで、C_F の公理型と (1) の detachment から

$$\frac{A \to [F]\langle P\rangle A \qquad [F]\langle P\rangle A \to [P]\langle P\rangle A}{A \to [P]\langle P\rangle A}$$

となり

$$A \to [P]\langle P\rangle A \quad \ldots(2)$$

が得られる。また、$[F]A \to [P]A$ の双対 $\langle P\rangle A \to \langle F\rangle A$ の necessitation

$$[P]\langle P\rangle A \to [P]\langle F\rangle A \quad \ldots(3)$$

が得られる。ここで、(2) と (3) の detachment から

$$\frac{A \to [P]\langle P\rangle A \qquad [P]\langle P\rangle A \to [P]\langle F\rangle A}{A \to [P]\langle F\rangle A}$$

からとなり、C_P を導くことができる。このことから，$C_F, T_F, 5_F, [F]A \to [P]A$ からなる論理もサークルを特徴づける論理であるとわかる。

6　様々な線形時間論理

これまでに、線形な様相論理として離散的線形様相論理と離散的線形時間論理 LinDisc をとりあげてきた。線形な様相論理には、時間の各時点が離散的なものばかりでなく、稠密になったものも考えられる。有理数時間論理や実数時間論理が稠密な時間論理の例として挙げられるだろう。そこで、ここでは稠密な線形様相論理や線形時間論理の紹介を行う。

6.1　稠密な線形様相論理

稠密な線形様相論理の体系は次のように定義される。

定義 6.1
稠密な線形様相論理の体系は K4DLX である。ここで、公理型 X は

$$X : \Box\Box A \to \Box A$$

である。また、対応する意味論的性質は稠密であり、一階述語論理によって

$$R \text{ が稠密} \Leftrightarrow \forall s \forall t (sRt \to \exists u (sRu \land uRt))$$

と定義できる。

体系 K4DLX では、定義から稠密であることはいえるが、連続か不連続かまでは判断できない。よって、有理数フレームも実数フレームも K4DLX によって決定される。

6.2　時間論理と連続・不連続

稠密な線形時間論理として、有理数時間論理 LinRat や実数時間論理 LinRe などが挙げられる。ここで注目したいのは、有理数時間論理 LinRat は有理数フレームに、実数時間論理 LinRe は実数フレームに対応していることである。つまり、稠密な線形様相論理では連続か不連続かの区別を付けることができなかったが、時間論理ではその区別が付くのである。次の定理は、この理由を明らかにする。

定理 6.2
任意のフレーム $F = (S, V)$ に対して

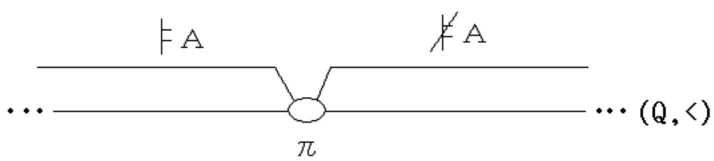
$$F \models \Box([P]A \to \langle F \rangle [P]A) \to ([P]A \to [F]A) \Leftrightarrow F \text{ は連続}$$

である。

証明

(⇒)

対偶をとって証明する。F は不連続であると仮定し、$F \not\models \Box([P]A \to \langle F\rangle[P]A) \to ([P]A \to [F]A)$ を示す。ここで、以下のような反例を挙げる。有理数フレームに、次のような付値を与える。



$$V(A) = \{s \in Q | s < \pi\}$$

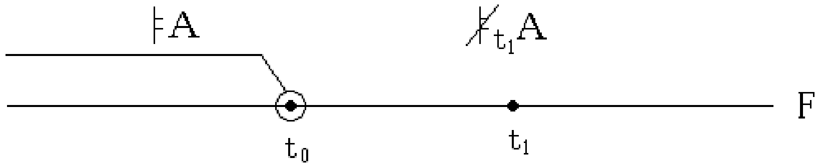
このとき、$x < \pi$ となる点 x で

$$F \models_x \Box([P]A \to \langle F\rangle[P]A) \text{ かつ } F \not\models_x ([P]A \to [F]A)$$

となる。よって、対偶が示された。

(⇐)

対偶をとって証明する。$F \not\models \Box([P]A \to \langle F\rangle[P]A) \to ([P]A \to [F]A)$ であると仮定する。このとき、下図のような点 t_0 で偽になるモデルを考えられる。



このモデルでは

$$t < t_0 \text{となるすべての } t \text{ に対して } F \models_t A$$

となっており、かつ

$$t_0 < t_1 \text{となるある } t_1 \text{に対して } F \not\models_{t_1} A$$

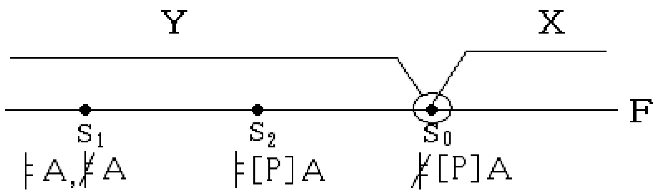
となっている。このとき

$$Y = \{s | s \models [P]A\}$$

という集合を与えると、t_0 は Y の要素となる。また、$t' < t_0$ となるすべての t' も Y の要素となる。さらに、$F \not\models_{t_1} A$ より $t_1 < t''$ となる t'' は Y の要素にはならない。ここで

$$X = F - Y$$

とする。$F \models \Box([P]A \rightarrow \langle F\rangle[P]A)$ から Y には最大数がないことになる。よって、F が連続であると仮定すると、X には最大数が存在することになる。つまり、$F \not\models_{s_0} [P]A$ となる X の要素の中で最小の点 s_0 が存在することになる。このとき、s_0 よりも左に $F \not\models_{s_1} A$ となるような点 s_1 が存在することになる。この s_1 は X の要素のうち最小の点 s_0 よりも左にあることから、Y の要素となることがわかる。しかし、Y は最大値をもたないので、Y の要素の中で s_0 よりも右側に $F \models_{s_2} [P]A$ なる s_2 という点を取ることができる。ここで、$s_1 < s_2$ より $F \models_{s_1} A$ となるはずだが、これは $F \not\models_{s_1} A$ と矛盾する。



以上により、対偶が示された。

時間論理のように、2 種類の演算子があれば連続と不連続の区別が付くことがわかるため、連続である実数のフレームと不連続である有理数のフレームが別の論理に対応するのである。

7　まとめと今後の課題

離散時間論理 LinDisc の完全性の証明は Goldblatt によって与えられていた。しかし、2006 年の米森の修士論文により以下の２つの問題点が指摘された。

(1)　整数フレームからダンベルへの p-モルフィズムが存在しない

(2)　ダンベルで LinDisc の公理 Z_F および Z_P が恒真ではない

このような問題が起こった原因として

(1)′　線形様相論理と線形時間論理での p-モルフィズムの定義を混同してしまった

(2)′　Z_F が成り立つには最後のクラスタが非退化クラスタでそれ以外が退化クラスタでなければならないのに対し、Z_P が成り立つには最初のクラスタが非退化クラスタでそれ以外が退化クラスタでなければいけないので、ダンベルというフレームでは矛盾する

ということが考えられる。ここで、LinDisc の公理をすべて満たすフレームとして非退化クラスタ 1 つだけからなるフレームであるサークルを考えることができる。しかし、サークルでは反射律が成り立ってしまうため、LinDisc とは異なる体系になってしまう。このとき、サークルによって特徴づけられる体系 L_C は、定理 5.2 から

$$L_C = \text{LinDisc の公理型} + T_F + T_P$$

であることがわかった。さらに定理 5.3 より上の公理を見直したより簡単な公理

$$L_C = C_F + C_P + 5_F + T_F$$

を与えることができた。

今後の課題として、6 章で取り上げたような様々な線形時間論理での完全性や有限モデル性、決定可能性といった論理の性質についても調べていきたい。

参考文献

[1] R.Goldblatt, *logics of time and computation*,CSLI Lecture Notes,Num.7, 1992.

[2] R.Goldblatt, *Modal lojics of computation*,Victoria University of Wellington,draft.

[3] D.M.Gabbay,I.Hodkinson and M.Reynolds,*temporal Logic-Mathematical foundations and computational aspects Volume 1*,Oxford logic guides,1994

[4] M.Zakharyaschev,F.Wolter and A.Chagrov,Adovanced modal logic,*Handbook of Philosophical Logic*,Vol.3,1998

[5] George Boolos,*The Logic of Provability*,Cambridge university press,1993

[6] 小野寛晰, 情報科学における論理, 日本評論社,1994

[7] 内野幸治,時間論理とその表現可能性,北陸先端科学技術大学院大学修士論文,2003

[8] 米森裕典, 離散時間論理 LinDisc の完全性の証明をめぐって, 北陸先端科学技術大学院大学修士論文,2006

謝辞

　本研究を行うにあたり丁寧にご指導くださいました小野寛晰教授に深く御礼申し上げます。また、2年間の学生生活全般においてお世話になりました研究室の皆様、共に励ましあった友人たちに深く感謝いたします。

　皆さんのおかげで無事に研究を終えることができました。本当にありがとうございました。