

Title	平面における伸縮を許したリンケージの裏返し判定問題
Author(s)	藤本, 洋一
Citation	
Issue Date	2008-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/4308
Rights	
Description	Supervisor: 上原隆平准教授, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

平面における伸縮を許したリンケージの
裏返し判定問題

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

藤本 洋一

2008年3月

修士論文

平面における伸縮を許したリンクージの
裏返し判定問題

指導教官 上原隆平 准教授

審査委員主査 上原隆平 准教授
審査委員 浅野哲夫 教授
審査委員 金子峰雄 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

0610076 藤本 洋一

提出年月: 2008年2月

概要

リンケージとは1本以上の線分の端点をグラフのように連結したものである。本研究では、平面上における辺の伸縮を許したリンケージの裏返し問題を考える。裏返しとは、変形後の配置が変形前の配置の鏡像となるような再配置を言う。辺の伸縮を許さないリンケージの場合、三角形を部分構造に持つものは裏返すことができない。一方で、辺の伸縮を許すことで任意のリンケージを裏返すことが可能となる。そこで、辺の伸縮率の上界を与え、その条件で裏返すことが可能かどうかを判定することを目的とする。

目次

第1章	序論	1
1.1	背景と目的	1
1.2	本論文の構成	2
第2章	準備	3
2.1	リンケージの再配置	3
2.2	既存の結果	3
2.3	辺の伸縮の導入	4
第3章	n 辺からなるサイクルでの伸縮率	5
3.1	伸縮率の上界	5
3.2	与えられたサイクルの最適伸縮率	6
第4章	Outer-Planar グラフへの拡張	11
4.1	Outer-Planar グラフ	11
4.2	Outer-Planar グラフでの伸縮率	11
4.3	Outer-Planar グラフでの伸縮率の上界	12
4.4	与えられた Outer-Planar グラフの最適伸縮率を求める	12
第5章	一般の平面グラフの裏返し	15
5.1	裏返しが困難なグラフ	15
5.2	ホイールの最適伸縮率の上界	17
第6章	結論	32
6.1	今後の課題	32
	謝辞	33

第1章 序論

1.1 背景と目的

リンケージとは、端点を連結した線分の集合である。一般のグラフの d 次元空間への埋め込みでは辺の長さを考慮しないが、リンケージでは辺で結ばれた 2 頂点間の距離が変わらないもののみが可能である。本論文では、とくに 2 次元ユークリッド空間上のリンケージを単にリンケージと呼ぶ。また、リンケージは一定の長さの棒と自由に回転するジョイントからなる力学的なモデルとして考えることもできる。図 1.1 はリンケージとグラフ、力学的モデルとの関係を示したものである。

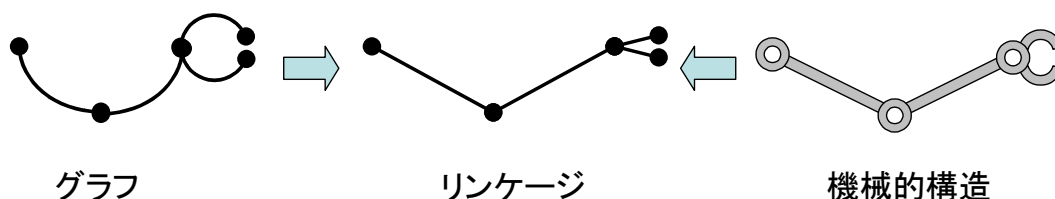


図 1.1: リンケージとグラフ

リンケージの再配置とは、 n 頂点からなるリンケージの d 次元空間での配置を \mathbb{R}^{dn} の空間における点、再配置を \mathbb{R}^{dn} における初期配置に対応する点から目的とする配置に対応する点への連続な経路と考えると、その d 次元空間における 2 点間の経路が存在するかどうかを判定することに相当する。リンケージの再配置問題は、グラフの性質と幾何学的な性質を持つことから、グラフ理論、計算幾何学、計算量理論、トポロジーの理論と関連がある。リンケージの再配置に関する研究では、問題の困難性を示す手法として、計算機の動作を模倣するリンケージを構成するものがある。一方、実際に問題を解決する手法としては、アルゴリズムの提案がある。

応用分野としては、なめらかなグラフ変形アニメーションや、力学的構造の解析、ロボットアームのモーションプランニング、分子構造のモデリングが考えられる。特に、分子構造のモデリングにおいては分子間距離は一定ではない [1]。したがって、リンケージに辺の伸縮を取り入れたモデル化を行うことは実用上の意義があるが、そのような研究結果はまだ示されていない。

本研究では、平面上での辺の交差を許したリンケージの裏返し問題を考える。ここで、裏返しとは変形後の配置が変形前の配置の鏡像となるような連続な再配置を言う。このとき、三角形を部分構造に持つようなリンケージは裏返すことができない。そこで、辺の伸縮率

を与え, 各辺を自由に伸縮してよいとしたときに裏返すことが可能かどうかを判定することを目的とする.

1.2 本論文の構成

本論文では, 第2章で用語の導入と既存の結果について述べ, 第3章で n 辺からなるサイクルの裏返しに必要な伸縮率を示し, 第4章で Outer-Planar グラフへの拡張を示す. 第5章では一般の平面グラフの裏返しについて述べ, 第6章をまとめとする.

第2章 準備

本研究で用いる用語を次のように定義する. リンケージ $L = (V, E)$ は頂点集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ と辺の集合 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ からなるものとする. 辺 e_k は端点 v_i, v_j と, 正の長さ $|e_k|$ を持つ. リンケージの辺の長さを考慮しない場合には一般のグラフと区別しないものとする.

また, l_i を i 番目に長い辺の長さとする. このとき辺の長さの集合は $L = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ ($l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_m$) である. 辺の長さの関係を満たすインデックスの取り方は複数存在するが, 本研究ではその中の任意の 1 通りを扱うものとする.

2.1 リンケージの再配置

辺 e_k の両端点が v_i, v_j であるとき, $\delta(v_i, v_j)$ を頂点 v_i, v_j 間の距離とすると, リンケージの辺の長さが一定であることは, それぞれの辺について $|e_k| = \delta(v_i, v_j)$ を満たすことと同値である. したがって, m 本の辺からなるリンケージの配置は, m 個の式からなる連立方程式の解である.

定義 2.1.1. リンケージの配置とは, 任意の 2 頂点 $v_i, v_j \in V$ について, それらの間に辺 $v_i, v_j \in E$ が存在するならば, 距離 $\delta(v_i, v_j)$ がその辺の長さ $|e_k|$ と等しい d 次元空間への埋め込みである.

ある配置と別の配置を, 全体の回転と平行移動により重ね合わせることが可能であれば, それらは同一の配置とみなす.

定義 2.1.2. リンケージの再配置とは, 辺の長さを変えずに, それぞれの頂点において任意の 2 辺のなす角が連続に変化する変形過程である.

定義 2.1.3. 平面において, 元の配置の鏡像となる配置へ再配置することを裏返しと言う.

図 2.1 は四角形 $abcd$ を裏返す様子を表したものである.

2.2 既存の結果

既存のリンケージに関する研究の多くは, 再配置に関するものである. それらには, 辺の交差を許すものと許さないものがあり, それぞれ対象をパスや木, サイクルに限定した

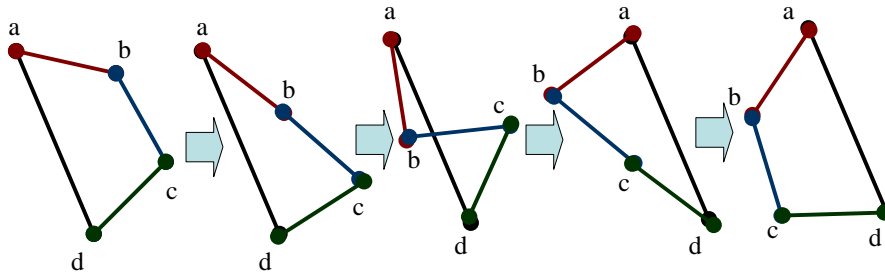


図 2.1: 四角形の裏返し

研究結果がある [1]. また, 2次元だけでなく3次元や一般の d 次元の場合も研究されているが, 特に2次元と3次元では再配置が困難であることが知られている [3]. 2次元における辺の交差を許すリンケージでは, サイクルを裏返すことができる必要十分条件と, 裏返せる場合は $O(n)$ ステップで実行できることが分かっている.

定理 2.2.1. [4] あるサイクル C において, C に含まれる辺の長さの和を M , サイクルの辺の数を n , l_i を i 番目に長い辺の長さとする (ただし $1 \leq i \leq n$). このとき, C の裏返しが可能であることの必要十分条件は,

$$l_2 + l_3 \leq \frac{M}{2}.$$

すなわち, $l_2 + l_3 \leq l_1 + l_4 + \dots + l_n$ である.

一方, 辺の交差を許さないリンケージでは, パスや木を一直線上に再配置する問題や, サイクルを凸にする問題について研究がなされている [3]. さらに, 再配置問題の計算量に関する研究もなされており, リンケージの再配置問題が一般に PSPACE 完全であることが知られている [2].

2.3 辺の伸縮の導入

辺の伸縮を許さない場合, 平面上では裏返しが不可能な場合が存在する. しかし, 多少の辺の伸縮を許せば任意のグラフの裏返しが可能となるため, 応用性が高まると考えられる. 本研究では辺の伸縮率 $\alpha \geq 1$ を与えて, 長さ l の辺は $\frac{1}{\alpha}l$ 以上 αl 以下の長さに自由に伸縮できるものとする. 伸縮率を導入することで, 決定問題を α の最小化問題という, より応用の広い最適化問題にすることができる.

第3章 n 辺からなるサイクルでの伸縮率

この章では、サイクルの裏返しに必要な伸縮率について述べる。前章で辺の伸縮を許さない場合のサイクルの裏返しについて述べたが、ある程度の辺の伸縮を許すことで、一般のサイクルの裏返しが可能となる。

3.1 伸縮率の上界

まず、サイクルの裏返しについて、どれだけ辺の伸縮を許せば任意のサイクルの裏返しが可能となるのかを考える。また、任意のサイクルの裏返しが可能となる最小の伸縮率を伸縮率の上界という。サイクルの裏返しに必要な伸縮率を α とするとき、 $\alpha = \sqrt{2}$ となるサイクルが存在する。例としてはサイクルが $n = 3$ の正三角形の場合で、図 3.1 のようにちょうど $\sqrt{2}$ 倍の伸縮で裏返しが可能である。

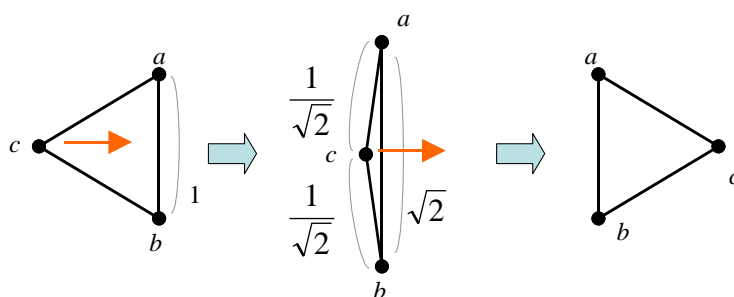


図 3.1: 正三角形の裏返し

定理 3.1.1. 任意の $n \geq 3$ に対して、 n 頂点からなるサイクルは高々 $\sqrt{2}$ の伸縮率 α で裏返せる。

証明. 図 3.2 のようにサイクル上の頂点から任意の 2 頂点 a, b を選び、 ab の 2 つの経路のうち短いほうの長さを x 、長い方の長さを y とする。このとき $|y - x|$ が最小となるような頂点 a, b を選んだ場合に $y > 2x$ が成り立つと仮定して矛盾を導く。ここで、 bc 間の距離を z とすると $z \leq y/2$ であるような頂点 c を選ぶ。そのような c は三角不等式と $n \geq 3$ より必ず存在する。

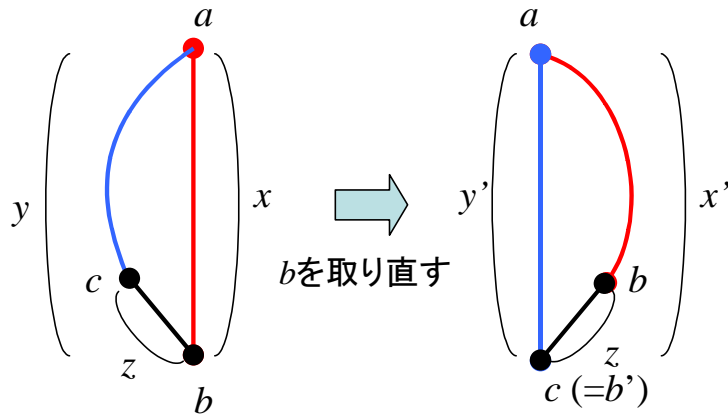


図 3.2: 端点の取り方

このとき, c を新たに頂点 b' として 2 頂点 a, b' を取ると, 同様に x', y' が考えられ $|y' - x'|$ は,

$$\begin{aligned}
 |y' - x'| &= (x + z) - (y - z) \\
 &= x - y + 2z \\
 &\leq x \\
 &< y - x
 \end{aligned}$$

となり, $|y - x|$ が最小であるという仮定に矛盾するので, $|y - x|$ が最小となるような頂点 a, b において $y > 2x$ は成り立たない.

よって, 一般のサイクルにおいて $y \leq 2x$ となる a, b の取り方が存在する. したがって, そのような a, b が両端となるように x の辺を伸ばし, y の辺を縮める操作を行うことでサイクルを裏返すことができる. このときの伸縮率は高々 $\sqrt{2}$ となるので, サイクルの伸縮率の上界は $\sqrt{2}$ である. \square

3.2 与えられたサイクルの最適伸縮率

定理 3.1.1 の証明で考えた通り, サイクル上の適当な 2 点を取り, それらが両端となるように引き伸ばせば裏返すことができる. しかし, これは必ずしも裏返しに必要な最小の伸縮率にならない. 例えば, 図 3.3 のサイクルにおいては, 上界の証明法と同様に 2 頂点 a, b を取ることができ, 伸縮率 $\sqrt{7/5}$ で裏返すことができる. しかし, このサイクルは定理 2.2.1 の式を満たすので, 実際には伸縮しないで裏返すことができる.

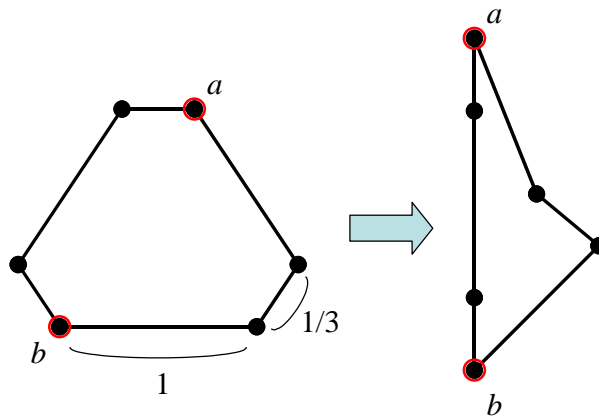


図 3.3: 上界の証明法で最小の伸縮率が求められない例

与えられたサイクルの裏返しが可能となる伸縮率のうち、最小のものをそのサイクルの最適伸縮率と呼ぶ。

あるサイクルが与えられた時に、最適伸縮率を求める方法を考える。まず、定理 2.2.1 が成立する場合、伸縮は不要である。そうでない場合は辺の伸縮が必要であり、次式が成り立つ。

$$l_2 + l_3 > \frac{M}{2}.$$

ここで最適な伸縮の結果、裏返しが可能になったと仮定する。 l'_i を伸縮後のサイクルの i 番目に長い辺の長さ、 M' を伸縮後の辺の長さの和とすると、伸縮が最適であることにより次式が成り立つ。

$$l'_2 + l'_3 = \frac{M'}{2}.$$

直感的には元の l_2, l_3 の辺を縮め、その他の辺を伸ばせばよい。しかし、伸縮前と伸縮後の辺の長さから辺への写像をそれぞれ f, f' とすると、 $f(l_i) = f'(l'_i)$ は必ずしも真とは限らない。なぜならば、伸縮の過程で長さの順序 L が変わる可能性があるからである。

定理 3.2.1. 伸縮後の 2 番目, 3 番目に長い辺の組が定めれば伸縮率は一意に定まる。

伸縮前の i 番目, j 番目 ($1 \leq i < j \leq n$) に長い辺が伸縮後に 2 番目, 3 番目に長い辺となったとする。このとき $f(l_i) = f'(l'_2)$ かつ $f(l_j) = f'(l'_3)$ である。この場合の最小の伸縮率 α_{ij} は次式によって求めることができる。

$$\begin{aligned}
l'_2 + l'_3 = l'_1 + l'_4 + \cdots + l'_n &\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha_{ij}}(l_i + l_j) = \alpha_{ij}(M - (l_i + l_j)) \\
&\Leftrightarrow \alpha_{ij} = \sqrt{\frac{l_i + l_j}{M - (l_i + l_j)}}
\end{aligned}$$

このような伸縮後に 2 番目, 3 番目に長い辺を縮む辺, その他の辺を伸びる辺と呼ぶ. 最適な伸縮率においては, 縮む辺は等しい倍率で縮むとしてよいので, 縮む辺の中で長さの順序が変化することはない. つまり, $f(l_i) = f'(l'_3)$ かつ $f(l_j) = f'(l'_2)$ となることはない.

このようにして定められる伸縮率のうち, 最小のものが最適伸縮率 α である.

定理 3.2.2. 辺の伸縮を許したサイクルの裏返しの過程において, 裏返しが可能な最小の伸縮率ならば辺の長さの順序は変化しない.

証明. まず, $f(l_2) = f'(l'_2), f(l_3) = f'(l'_3)$ の場合の伸縮率を α_0 とすると,

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{2(l_2 + l_3)}{M}} \quad (3.1)$$

$$\text{かつ } \alpha_0 = \sqrt{\frac{l_2 + l_3}{l_1 + l_4 + \cdots + l_n}} = \sqrt{\frac{l_2 + l_3}{M - (l_2 + l_3)}} \quad (3.2)$$

である. ここで, 縮む辺の組がもともと何番目に長かったのかについて, 以下の場合分けが考えられる.

$f(l_1) = f'(l'_2), f(l_2) = f'(l'_3)$ または, $f(l_1) = f'(l'_2), f(l_3) = f'(l'_3)$ の場合の伸縮率 α_{12}, α_{13} をそれぞれ求めると,

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} &= \sqrt{\frac{l_1 + l_2}{M - (l_1 + l_2)}} \\
&\geq \sqrt{\frac{l_2 + l_3}{M - (l_2 + l_3)}} = \alpha_0 \\
\alpha_{13} &= \sqrt{\frac{l_1 + l_3}{M - (l_1 + l_3)}} \\
&\geq \sqrt{\frac{l_2 + l_3}{M - (l_2 + l_3)}} = \alpha_0
\end{aligned}$$

である. よって, α_{12}, α_{13} は最小の伸縮率ではない. その他の場合には以下の 3 通りがある.

- $i \geq 4$ について, $f(l_2) = f'(l'_2), f(l_i) = f'(l'_3)$ または, $f(l_3) = f'(l'_2), f(l_i) = f'(l'_3)$ の場合
- $i \geq 4$ について, $f(l_1) = f'(l'_2), f(l_i) = f'(l'_3)$ の場合
- $j > i \geq 4$ について, $f(l_i) = f'(l'_2), f(l_j) = f'(l'_3)$ の場合

これらの場合, 伸縮前に $l_i (i \geq 4)$ の辺が, 伸縮後に l'_3 となる. 伸縮の過程で $f(l_3)$ の長さと $f(l_i)$ の長さが等しくなった時の伸縮率を β とすると,

$$\frac{1}{\beta} l_3 = \beta l_i$$

$$\beta = \sqrt{\frac{l_3}{l_i}}$$

$\beta \geq \alpha_0$ を示す,

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha_0} &= \frac{\sqrt{\frac{l_3}{l_i}}}{\sqrt{\frac{l_2+l_3}{l_1+l_4+\dots+l_n}}} \\ &= \sqrt{\frac{l_1 l_3 + (l_4 + \dots + l_n) l_3}{l_2 l_i + l_3 l_i}} \\ &\geq 1 \quad (\because l_1 l_3 \geq l_2 l_i \text{ かつ } l_3 l_4 \geq l_3 l_i) \end{aligned}$$

よって, 辺の長さの順序は変化しない. □

定理 3.2.3. 頂点数 n のサイクルが与えられた時, その裏返しに必要な最小の伸縮率は $O(n)$ 時間 $O(n)$ 領域で計算可能である

証明. 定理 3.2.2 より, 縮む辺には元の l_2, l_3 を取ればよい. よって, 求める伸縮率 α_0 は式 (3.1)(あるいは式 (3.2)) を使えば線形時間かつ線形領域で求められる. □

実際に最適伸縮率を求めるアルゴリズムを Algorithm 1 に示す.

Algorithm 1: サイクルの最適伸縮率

Data: C

Result: C の最適伸縮率

```
1 begin
2    $M \leftarrow C$  に含まれる全ての辺の長さの和
3    $l_2 \leftarrow C$  に含まれる 2 番目に長い辺の長さ
4    $l_3 \leftarrow C$  に含まれる 3 番目に長い辺の長さ
5   return  $\sqrt{\frac{l_2+l_3}{M-(l_2+l_3)}}$ 
6 end
```

第4章 Outer-Planar グラフへの拡張

4.1 Outer-Planar グラフ

Outer-Planar グラフとは、全ての頂点が外平面 (Outer-Plane) に接するような平面描画 D を持つグラフである。サイクルに近い性質を持つことから、サイクルでの結果は自然に Outer-Planar グラフへ拡張することが可能であると考えられる。

ここで、Outer-Planar グラフに含まれるサイクルのうち、平面描画 D において内側にサイクルを含まないものを極小なサイクルと呼ぶ。

定理 4.1.1. *Outer-Planar* グラフの 2 つの極小なサイクルは高々 1 本の辺しか共有しない。

証明. *Outer-Planar* グラフはその定義より、全ての頂点を結んだサイクルと弦からなる。したがって、隣接する極小なサイクルは 1 本の弦のみを共有する。 \square

4.2 Outer-Planar グラフでの伸縮率

サイクルでの裏返しの条件 (定理 2.2.1) は Outer-Planar グラフにおける任意のサイクルについて成り立つ。すなわち、裏返しの過程で、あるサイクル C の辺を伸縮する場合、図 4.1 のように隣接するサイクル全体を共有する辺と同じだけ伸縮すればよい。辺は交差してもよいので、 C を裏返したあとで、すべての辺の長さをまた元の長さに戻すことができる。

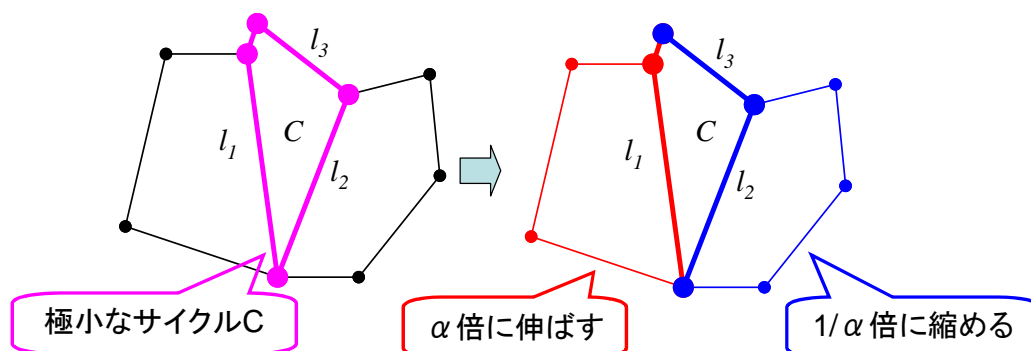


図 4.1: Outer-Planar グラフの伸縮

よって, Outer-Planar グラフの裏返しに必要な伸縮率は Outer-Planar グラフに含まれる極小なサイクルの伸縮率の最大値である.

4.3 Outer-Planar グラフでの伸縮率の上界

明らかにサイクルの場合と同様に $\sqrt{2}$ である.

4.4 与えられた Outer-Planar グラフの最適伸縮率を求める

個々の極小なサイクルの最適伸縮率を求めて, その最大値を求めることで最適伸縮率を求めることができる. まず, Outer-Planar グラフの平面描画において, 外平面を除いた平面に対する双対グラフは木になることを示す.

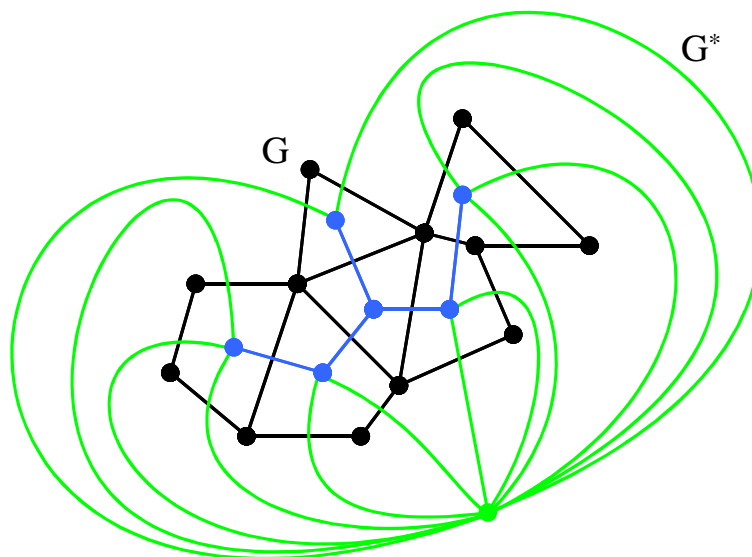


図 4.2: Outer-Planar グラフとその双対

定理 4.4.1. *Outer-Planar* グラフの平面描画において, 外平面を除いた平面に対する双対グラフは木になる.

証明. Outer-Planar グラフ $G = (V, E, F)$ の双対グラフを $G^* = (V^*, E^*, F^*)$ とする. このとき $|V^*| = |F|$, $|E^*| = |E|$, $|F^*| = |V|$ である. 外平面 f_o に対応する頂点を v_o^* とすると, G において頂点 v_i と平面 f_j が接するならば, G^* において f_i^* と v_j^* は接する.

G^* における任意のサイクルは v_o^* を含むことを背理法により示す. G^* に v_o^* を含まないサイクル $C^* = (V_C^*, E_C^*)$ が存在したとする. このとき, G において C^* の内側の平面 f_C^* に対応する頂点 v_C が存在する. また, v_C は V_C^* に対応する平面の集合 F_C に含まれる平面の

みと接している. しかし, $v_o^* \notin V_C^*$ より v_C は f_o と接していないので, Outer-Planar グラフの定義に反する. よって G^* に v_o^* を含まないサイクルは存在しない.

G^* の任意のサイクルは v_o^* を含むので, $G^* - v_o^*$ はサイクルを持たない. また, Outer-Planar グラフの外平面を除いても全ての平面は連結なので $G^* - v_o^*$ は連結グラフである. よって $G^* - v_o^*$ は木である. \square

次に, Outer-Planar グラフから構成した木 $T^* = G^* - v_o^*$ の頂点数が元のグラフの頂点数 n の線型であることを示す.

定理 4.4.2. T^* の頂点数は n の線型である.

証明. Outer-Planar グラフ G の頂点数を n , 辺の数を m , 面の数を f とするとき, オイラーの公式 ($n - m + f = 2$) が成り立つ. ここで, 辺は高々2回しかサイクルの上に現れない ($f \leq 2m$) ことから, 平面グラフにおける面数 f は頂点数 n の線型である. また, 双対グラフ G^* における頂点数 n^* は f と等しい. よって T^* の頂点数は $O(n)$ である. \square

以下のステップで線形時間で Outer-Planar グラフの最適伸縮率を求めることができる. T^* の上でそれぞれの頂点をたどり, それに沿って対応するサイクルの最適伸縮率を計算する. 求めた最適伸縮率のうちの最大値が全体の最適伸縮率である. 以上の操作を Algorithm 2 の擬似コードにより示す.

Algorithm 2: Outer-Planar グラフの最適伸縮率

Data: G の配置
Result: G の最適伸縮率

```

1 begin
2    $G^* \leftarrow G$  の双対グラフ
3    $T^* \leftarrow G^* - v_o^*$ 
4    $\alpha \leftarrow 1$ 
5   for DFS または BFS により  $T^*$  の頂点  $v^*$  を列挙 do
6      $C \leftarrow G$  において  $v^*$  に対応する面  $f$  を構成するサイクル
7      $\beta \leftarrow$  サイクル  $C$  の最適伸縮率
8     if  $\beta > \alpha$  then
9        $\alpha \leftarrow \beta$ 
10  return  $\alpha$ 
11 end
```

定理 3.2.3 より, サイクルの最適伸縮率は辺の数の線形時間で計算可能である. Outer-Planar グラフにおいて, 外平面に接している辺は1つだけのサイクルに含まれ, 外平面に接しない辺は高々2つのサイクルに含まれる. G の各辺 e はステップ 6, 7 で操作の対象になるが, e をはさむ両側のサイクルによる2回, または外周上の e は1回しか操作対象にな

らない. よって, アルゴリズムの実行時間は $O(n)$. ただし, m は G の辺の数. G は平面グラフなので, $m = O(n)$. ただし, n は G の頂点数. よって, アルゴリズムの計算量は $O(n)$ である.

第5章 一般の平面グラフの裏返し

本章では一般の平面グラフでの裏返しについて述べる.

5.1 裏返しが困難なグラフ

裏返しが困難なグラフの例として, ホイールが挙げられる. 本節では, ホイールの最適伸縮率の下界を示し, それにより一般の平面グラフの最適伸縮率の上界は存在しないことを示す.

n 頂点からなるホイール W_n とは, $n - 1$ 頂点のサイクルと 1 頂点の中心点からなり, 中心点とサイクル上の全ての頂点との間に辺が存在するグラフである. 図 5.1 に W_4, W_7, W_9 の例を示す.

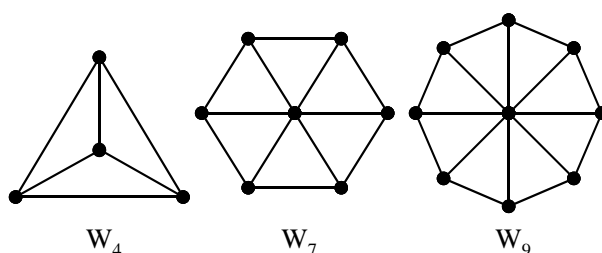


図 5.1: ホイールの例

定理 5.1.1. 任意の定数 $\alpha > 1$ に対して, 伸縮率 α では裏返せない平面グラフが存在する

証明. ある伸縮率が与えられた場合にその伸縮率では裏返せないホイール W_n が存在することを示す.

W_n は外周が正 $n - 1$ 角形, 中心点はその多角形の重心にあるものとする. 中心点を c , 外周上の点を v_i ($0 \leq i < n - 1$), $\delta(c, v_i) = 1$ とする. この時, $\angle v_i c v_{(i+1) \bmod (n-1)}$ は $\frac{2\pi}{n-1}$ であるから, $\delta(v_i, v_{(i+1) \bmod (n-1)}) = 2 \sin \frac{\pi}{n-1}$ である.

ここで, ホイールを裏返すためには中心点を一度外周の外に出さなくてはならないことを示す.

この主張の証明はトポロジーの理論による. 平面上の穴の周りの経路は位相同型な群 (ホモトピー) となり, 例えば穴の周りを時計回りに 1 回まわるループと, 1 回もまわらない

ループ, さらに反時計回りに1回まわるループはそれぞれ等価ではない [5]. ホイールの中心点を平面上の穴, ホイールの外周を方向付けられた経路と見ると, ホイールの裏返しは穴の周りを時計回りに1回まわるループを反時計回りに1回まわるループになめらかに移すことに相当する. したがって, 裏返しの過程で, ホイールの中心点は図 5.2 のように, 外周のいずれかの1辺から外平面に出る必要がある.

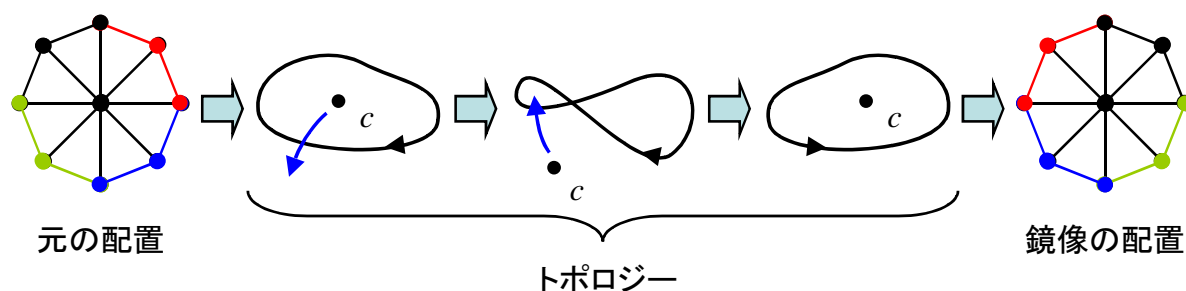


図 5.2: トポロジーの結果の利用

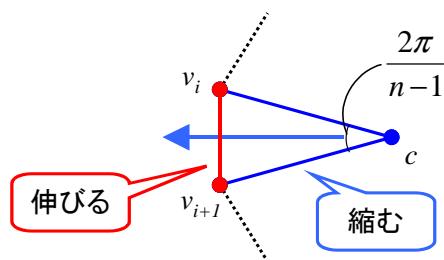


図 5.3: ホイールの中心点の移動

ホイールの中心点 c がある辺 $\{v_i, v_{(i+1) \bmod (n-1)}\}$ 上を通過する時に必要な最小の伸縮率を α' とすると,

$$\alpha' 2 \sin \frac{\pi}{n-1} = \frac{2}{\alpha'}$$

より以下が成立する.

$$\alpha' = \sqrt{\frac{1}{\sin \frac{\pi}{n-1}}}.$$

α' は n の取り方によりいくらでも大きくできる. したがって, 与えられた α に対して十分大きな n を取れば, $\alpha' > \alpha$ となり伸縮率 α で裏返せないホイール W_n を構成することが可能である.

□

よって, 一般の平面グラフの伸縮率に上界は存在しない.

5.2 ホイールの最適伸縮率の上界

前節ではホイールの最適伸縮率の下界を示した。この節ではその下界を実現するホイールの裏返しのアルゴリズムを示す。

定理 5.2.1. 2次元平面上的のリンケージにおいて、ある配置から直線上の配置へ再配置が可能ならば、裏返しが可能である。

証明. あるリンケージの初期配置 C から直線上の配置 C' へ再配置が可能ならば、同様に鏡像となる配置 C'' から C' への再配置も可能でなくてはならない。よって裏返しが可能である。□

これにより、ホイール W_n ($n = 7$ または $n \geq 9$) が直線上へ再配置可能であることを示し、下界での裏返しが可能であることを示す。

定理 5.2.2. ホイール W_n ($n = 7$ または $n \geq 9$) は伸縮率 $\sqrt{\frac{1}{\sin \frac{\pi}{n-1}}}$ で裏返しが可能である。

この定理はアルゴリズムを用いて構成的手法により示す。正 $n - 1$ 角形の外周を持ち、外周上の頂点の重心に中心点を持つホイール W_n ($n \geq 7$) を構成する。 $k = \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$ とする。スポークの長さを 1 とすると、外周上の辺の長さは $l = 2 \sin \frac{\pi}{n-1}$ である。また、定理 5.1.1 で示した最適伸縮率の下界は $\alpha = \sqrt{\frac{2}{l}}$ である。

W_n の外周上の任意の頂点 v_0 を選び、 $1 \leq i \leq k$ について、 v_0 から外周上での距離が i であるような頂点のうち、時計回りのものを v_{+i} 、反時計回りのものを v_{-i} とする。ただし、 $n - 1$ が偶数の場合は $v_{+k} = v_{-k}$ である。 $v_{\pm i}$ は v_{+i} と v_{-i} の両方を指すものとする。また、 W_n の中心点を c とする。中心点 c における隣接するスポーク間の角度は $\theta = \frac{2\pi}{n-1}$ である。同様に、 W_n の外周上の辺のうち、 $v_{\pm(i-1)}$ と $v_{\pm i}$ を頂点に持つ辺を $r_{\pm i}$ とする。また、 c と $v_{\pm i}$ を端点に持つスポークを $s_{\pm i}$ とし、 v_0 と c を通る直線を m とする。

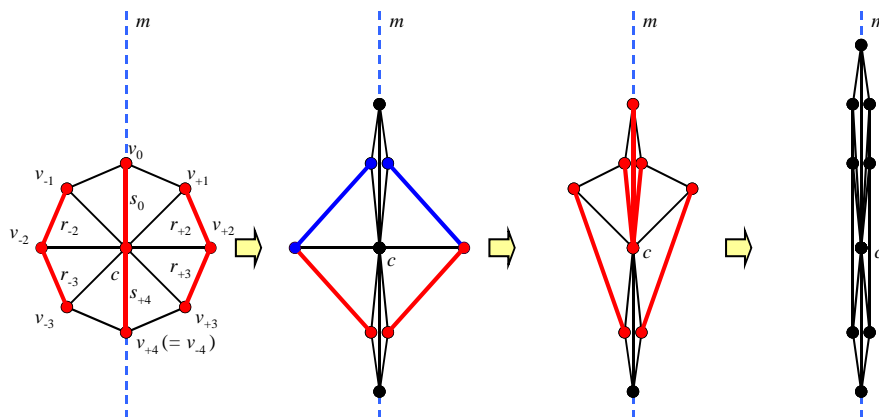


図 5.4: W_9 の裏返し

このような W_n の初期配置に対し次のようなアルゴリズムを適用し、逐次的に一直線上へ再配置する。図 5.4 は W_9 を提案アルゴリズムにより一直線上へ再配置する様子を示したものである。

最初に、 $n - 1$ が奇数の場合の初期配置では、 $v_{\pm k}$ は m に対して図 5.5 のような配置をとるそこで、前処理を行い $n - 1$ が偶数の場合と同様に扱えるよう変形する。

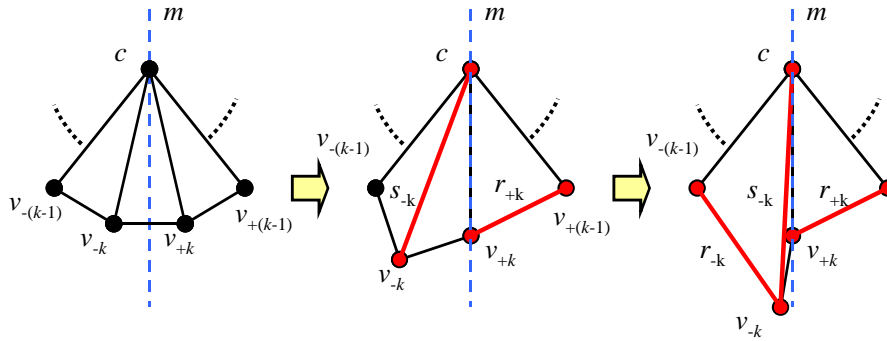


図 5.5: $n - 1$ が奇数の場合の前処理

次の操作では、まず $s_0, r_{\pm 2}$ 以外の辺の長さを固定する。この時、図 5.6 の (b) の赤線で示した辺による変形のみが可能である。そして、 $v_{\pm 1}$ が m 上に移動するまで s_0 を m 上で単調に伸ばす。伸ばし終わった状態が図 5.6 の (c) である。

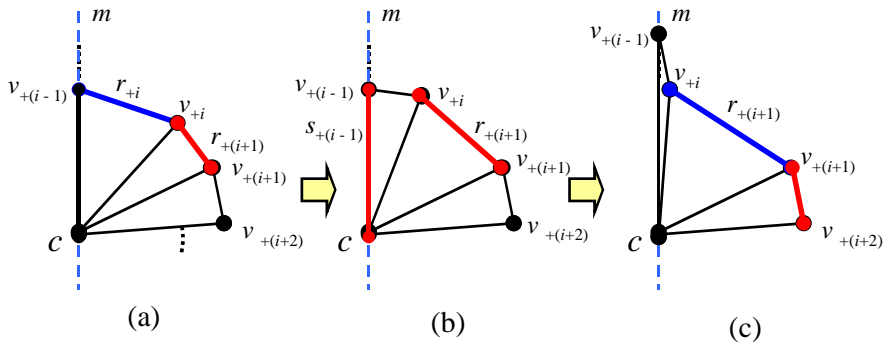


図 5.6: i 番目の繰り返し

次に、今の操作で伸びた $r_{\pm 2}$ を元の長さ l まで縮める操作を行う。図 5.6 の (a) の赤線で示したように $r_{\pm 2}, r_{\pm 3}$ 以外の辺の長さを固定し、 $|r_{\pm 2}| = l$ となるまで $r_{\pm 2}$ を単調に縮める。縮め終わった状態が再び図 5.6 の (b) である。

以上の操作を $v_{\lfloor k/2 \rfloor}$ が m 上に移動するまで繰り返す。ただし、最後のループでは伸びた辺を縮める処理は行わない。 $\lfloor k/2 \rfloor \leq i \leq k$ については、 $i' = k - i$ として同様に処理する。

最後に, k が偶数の場合は図 5.7 のような状態となる. この時 $s_{\pm k/2}$ を m 上の v_0 側へ移動するように変形する. これは, 前処理のために $v_{\pm k}$ 側のスポークは v_0 側よりも伸び率が大きい可能性があるためである.

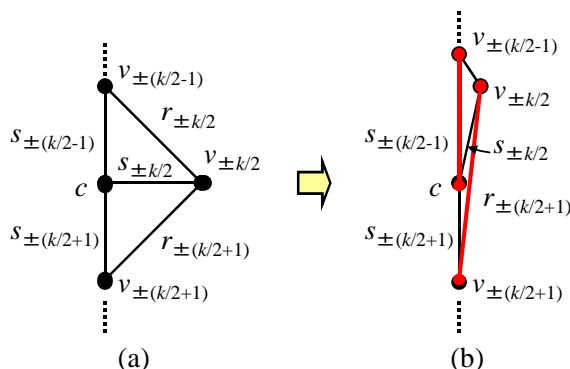


図 5.7: k が偶数の場合の後処理

以上のアルゴリズムを擬似コードで Algorithm 3 に示す.

このアルゴリズムを実行して得られる配置では, 全ての v_i は直線 m 上にある. したがって, 定理 5.2.1 より裏返しが可能である.

以下では, このアルゴリズムの実行過程で辺の伸びが単調であることを以下の補題により示す.

まず, 3 行目から 7 行目の処理では, s_{-k} を 5 行目と 7 行目の 2 回に分けて伸ばす. この過程で r_{+k} の長さが単調増加であることを示す.

補題 5.2.2.1. 5 行目で s_{-k} を伸ばすと r_{+k} の長さは単調に増加する.

証明. r_{+k} の長さは $x = |s_{-k}|$ ($1 \leq x \leq 1+l$) の関数 $f_1(x)$ で表される. $f_1(x)$ が x に関して単調増加であることを示すことにより, r_{+k} が単調に伸びることを示す. s_{-k} を伸ばすと, s_{-k} に隣接する中心角である $\angle v_{-(k-1)}cv_{-k}$ と $\angle v_{-k}cv_{+k}$ が変化する. 余弦定理より,

$$\begin{aligned} \angle v_{-(k-1)}cv_{-k} &= \angle v_{-k}cv_{+k} \\ &= \arccos \frac{x^2 + 1 - l^2}{2x} \end{aligned}$$

Algorithm 3: ホイールの裏返し

Data: W_n, W_n の配置

Result: W_n の一直線上への配置

```
1 begin
2    $k \leftarrow \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ 
3   if  $(n-1) \bmod 2 = 1$  then
4      $r_{+k}$  と  $s_{-k}$  以外の辺の長さを固定
5      $v_{+k}$  が  $m$  上に移動するまで  $s_{-k}$  を伸ばす
6      $r_{-k}$  と  $s_{-k}$  以外の辺の長さを固定
7      $v_{-k}$  が  $m$  上に移動するまで  $s_{-k}$  を伸ばす
8    $s_0, r_{\pm 2}$  以外の辺の長さを固定
9    $v_{\pm 1}$  が  $m$  上に移動するまで  $s_0$  を  $m$  上で単調に伸ばす
10   $s_{\pm k}, r_{\pm(k-1)}$  以外の辺の長さを固定
11   $v_{\pm(k-1)}$  が  $m$  上に移動するまで  $s_{\pm k}$  を  $m$  上で単調に伸ばす
12   $i \leftarrow 1$ 
13  while  $v_{\pm \lfloor k/2 \rfloor}$  が  $m$  上にない do
14     $r_{\pm i}, r_{\pm i+1}$  以外の辺の長さを固定
15     $|r_{\pm i}| = l$  となるまで  $r_{\pm i}$  を単調に縮める
16     $s_0, \dots, s_{\pm i}, r_{\pm i+1}$  以外の辺の長さを固定
17     $s_{\pm i}$  を  $v_{\pm i+1}$  が  $m$  上に移動するまで単調に伸ばす
18     $r_{\pm(k-i)}, r_{\pm(k-(i+1))}$  以外の辺の長さを固定
19     $|r_{\pm(k-i)}| = l$  となるまで  $r_{\pm(k-i)}$  を単調に縮める
20     $s_{\pm(k-i)}, \dots, s_{\pm k}, r_{\pm(k-(i+1))}$  以外の辺の長さを固定
21     $s_{\pm(k-i)}$  を  $v_{\pm(k-(i+1))}$  が  $m$  上に移動するまで単調に伸ばす
22     $i \leftarrow i + 1$ 
23  if  $k \bmod 2 = 0$  then
24     $r_{\pm k/2}, r_{\pm k/2+1}$  以外の辺の長さを固定
25     $|r_{\pm k/2}| = l$  となるまで  $r_{\pm k/2}$  を縮める
26     $s_0, \dots, s_i, r_{\pm k/2+1}$  以外の辺の長さを固定
27     $s_0, \dots, s_i$  を  $v_{\pm k/2}$  が  $m$  上に移動するまで単調に伸ばす
28 end
```

である. $\varphi = \angle v_{-(k-1)}cv_{-k} = \angle v_{-k}cv_{+k}$ とおくと,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2 \sin \frac{3\theta - 2\varphi}{2} \\ &= 2 \sin \left(\frac{3\theta}{2} - \varphi \right) \\ &= 2 \left(\sin \frac{3\theta}{2} \cos \varphi - \cos \frac{3\theta}{2} \sin \varphi \right) \\ &= 2 \left(\frac{x^2 + 1 - l^2}{2x} \sin \frac{3\theta}{2} - \sqrt{1 - \left(\frac{x^2 + 1 - l^2}{2x} \right)^2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

である. $f_1(x)$ を x で微分すると,

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 2 \left(-\frac{\frac{(x^2-l^2+1)^2}{2x^3} - \frac{x^2-l^2+1}{x}}{2\sqrt{1-\frac{(x^2-l^2+1)^2}{4x^2}}} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{x^2-l^2+1}{2x^2} \sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{x^4 - (l^2 - 1)^2}{4x^3 \sqrt{1 - \frac{(x^2-l^2+1)^2}{4x^2}}} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{x^2 + l^2 - 1}{2x^2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

が得られる. $1 \leq x \leq 1+l$ の範囲で $f_1'(x) \geq 0$ より $f_1(x)$ は単調増加. よって, r_{+k} は単調に伸びる. \square

補題 5.2.2.2. γ 行目で s_{-k} を伸ばすと $r_{-(k-1)}$ の長さは単調に増加する.

証明. $r_{-(k-1)}$ の長さは $x = |s_{-k}|$ ($\sqrt{1+l^2} < x \leq 1+l$) の関数 $f_2(x)$ で表される. $f_2(x)$ が x に関して単調増加であることを示すことにより, $r_{-(k-1)}$ が単調に伸びることを示す.

まず, $x > \sqrt{1+l^2}$ を示す. v_{+k} が m 上にあり, かつ $x \leq \sqrt{1+l^2}$ であると仮定すると, 四角形 $cv_{-(k-1)}v_{-k}v_{+k}$ の面積は $S \leq l$ である. しかし, $d(v_{-(k-1)}, v_{+k}) = \frac{S}{x} \leq l$ となり, v_{+k} が m 上にあるという仮定に反する. よって, $x > \sqrt{1+l^2}$ が成り立つ.

s_{-k} を伸ばすと, s_{-k} と s_{+k} の中心角である $\angle v_{-k}cv_{+k}$ が変化する. $\angle v_{-(k-1)}cv_{+k} = \frac{3\theta}{2}$ より,

$$\begin{aligned} \angle v_{-(k-1)}cv_{-k} &= \angle v_{-(k-1)}cv_{+k} - \angle v_{-k}cv_{+k} \\ &= \frac{3\theta}{2} - \angle v_{-k}cv_{+k} \end{aligned}$$

である. また,

$$\angle v_{-k}cv_{+k} = \arccos \frac{x^2 + 1 - l^2}{2x}$$

である. $\varphi = \angle v_{-k}cv_{+k}$ とおくと,

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= \sqrt{1 + x^2 - 2x \cos \angle v_{-(k-1)}cv_{-k}} \\
&= \sqrt{1 + x^2 - 2x \cos \left(\frac{3\theta}{2} - \varphi \right)} \\
&= \sqrt{1 + x^2 - 2x \left(\cos \frac{3\theta}{2} \cos \varphi + \sin \frac{3\theta}{2} \sin \varphi \right)} \\
&= \sqrt{1 + x^2 - 2x \left(\frac{x^2 + 1 - l^2}{2x} \cos \frac{3\theta}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{x^2 + 1 - l^2}{2x} \right)^2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)}
\end{aligned}$$

となる. $f_2(x)$ を x で微分すると,

$$f_2'(x) = \frac{\frac{x^2 - l^2 - 1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2 - l^2 + 1}{2x} \right)^2}} \sin \frac{3\theta}{2} + 2x \left(1 - \cos \frac{3\theta}{2} \right)}{2\sqrt{-2x \left(\sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) \sqrt{1 - \frac{(x^2 - l^2 + 1)^2}{4x^2}} + \frac{\cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) (x^2 - l^2 + 1)}{2x} \right) + x^2 + 1}}$$

が得られる. $\sqrt{1 + l^2} < x \leq 1 + l$ の範囲で $f_2'(x) \geq 0$ より $f_2(x)$ は単調増加. よって, $r_{-(k-1)}$ は単調に伸びる. \square

13 行目から 22 行目の処理では, 外周の辺 $r_{\pm i} (1 \leq i \leq k)$ は単調に伸びた後, 単調に縮む. 最初に $i < \lfloor k/2 \rfloor$ の場合を考える.

補題 5.2.2.3. 15 行目と 19 行目において, $r_{\pm(i-1)}$ の長さを l まで縮めると $r_{\pm i}$ は単調に伸びる.

証明. $r_{\pm i}$ の長さは $x = |r_{\pm(i-1)}| (x \geq l)$ の関数 $f_3(x)$ で表される. $f_3(x)$ が x に関して単調減少であることを示すことにより, $r_{\pm i}$ が単調に伸びることを示す. $r_{\pm(i-1)}$ を縮めると, $r_{\pm(i-1)}$ の中心角である $\angle v_{\pm(i-2)}cv_{\pm(i-1)}$ が変化する.

$$\angle v_{\pm(i-2)}cv_{\pm(i-1)} = \arccos \frac{2 - x^2}{2}$$

である. ここで, $\angle v_{\pm(i-1)}cv_{\pm i}$ を $\angle v_{\pm(i-2)}cv_{\pm(i-1)}$ で表すと,

$$\angle v_{\pm(i-1)}cv_{\pm i} = i\theta - \angle v_{\pm(i-2)}cv_{\pm(i-1)}$$

である. $\varphi = \angle v_{\pm(i-2)}cv_{\pm(i-1)}$ とおくと,

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= 2 \sin \frac{\angle v_{\pm(i-1)}cv_{\pm i}}{2} \\
&= 2 \sin \left(\frac{i\theta}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \\
&= 2 \left(\sin \frac{i\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{i\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\
&= 2 \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} \sin \frac{i\theta}{2} - \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}} \cos \frac{i\theta}{2} \right) \\
&= 2 \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{2-x^2}{2}}{2}} \sin \frac{i\theta}{2} - \sqrt{\frac{1 - \frac{2-x^2}{2}}{2}} \cos \frac{i\theta}{2} \right) \\
&= 2 \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \sin \frac{i\theta}{2} - \frac{x}{2} \cos \frac{i\theta}{2} \right)
\end{aligned}$$

$f_3(x)$ を微分すると,

$$f'_3(x) = -2 \left(\frac{x}{2\sqrt{4-x^2}} \sin \frac{i\theta}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{i\theta}{2} \right)$$

が得られる. $r_{\pm(i-1)}$ を縮めると $r_{\pm i}$ が伸びることを示したいので, $f_3(x)$ が単調減少であることを示せばよい. $x \geq l$ の範囲で $f'_3(x) \leq 0$ より $f_3(x)$ は単調減少. よって, $r_{\pm i}$ は単調に伸びる. \square

2 回目に $r_{\pm i}$ が伸びる過程では, $s_{\pm i}$ の長さを 1 から $1+l$ まで伸ばす.

補題 5.2.2.4. 9 行目, 11 行目, 17 行目と 21 行目において $s_{\pm i}$ を伸ばすと $r_{\pm i}$ の長さは単調に増加する.

証明. $r_{\pm i}$ の長さは $x = |s_{\pm i}|$ ($x \geq 1$) の関数 $f_4(x)$ で表される. $f_4(x)$ が x に関して単調増加であることを示すことにより, $r_{\pm i}$ が単調に伸びることを示す. $s_{\pm i}$ を伸ばすと, $s_{\pm i}$ と $s_{\pm(i+1)}$ の中心角である $\angle v_{\pm i}cv_{\pm(i+1)}$ が変化する. 余弦定理より,

$$\angle v_{\pm i}cv_{\pm(i+1)} = \arccos \left(\frac{1 + x^2 - l^2}{2x} \right)$$

である. $\varphi = \angle v_{\pm i} c v_{\pm(i+1)}$ とおくと,

$$\begin{aligned}
f_4(x) &= 2 \sin \frac{i\theta - \angle v_{\pm i} c v_{\pm(i+1)}}{2} \\
&= 2 \sin \left(\frac{i\theta}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \\
&= 2 \left(\sin \frac{i\theta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{i\theta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\
&= 2 \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} \sin \frac{i\theta}{2} - \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}} \cos \frac{i\theta}{2} \right) \\
&= 2 \left(\sqrt{\frac{2x + 1 + x^2 - l^2}{4x}} \sin \frac{i\theta}{2} - \sqrt{\frac{2x - 1 - x^2 + l^2}{4x}} \cos \frac{i\theta}{2} \right)
\end{aligned}$$

$f_4(x)$ を微分すると,

$$\begin{aligned}
f_4'(x) &= 2 \left(\frac{\frac{2x+2}{x} - \frac{x^2+2x-l^2+1}{x^2}}{4\sqrt{\frac{x^2+2x-l^2+1}{x}}} \sin \frac{i\theta}{2} - \frac{\frac{2-2x}{x} - \frac{-x^2+2x+l^2-1}{x^2}}{4\sqrt{\frac{-x^2+2x+l^2-1}{x}}} \cos \frac{i\theta}{2} \right) \\
&= 2 \left(\frac{x^2 + l^2 - 1}{4x^2 \sqrt{\frac{x^2+2x-l^2+1}{x}}} \sin \frac{i\theta}{2} + \frac{x^2 + l^2 - 1}{4x^2 \sqrt{\frac{-x^2+2x+l^2-1}{x}}} \cos \frac{i\theta}{2} \right)
\end{aligned}$$

が得られる. $x \geq l$ の範囲で $f_4'(x) \geq 0$ より $f_4(x)$ は単調増加. よって, $r_{\pm i}$ は単調かつ連続に伸びる. \square

25 行目と 27 行目の処理では, $r_{\pm k/2}$ を縮め, $s_{\pm k/2-1}$ を伸ばす. まず $r_{\pm k/2}$ を縮める場合を考える.

補題 5.2.2.5. 25 行目において, $r_{\pm(k/2)}$ の長さを l まで縮めると $r_{\pm k/2+1}$ は単調に伸びる.

証明. $r_{\pm k/2+1}$ の長さは $x = |r_{\pm(k/2)}|$ の関数 $f_5(x)$ で表される. $f_5(x)$ が x に関して単調減少であることを示すことにより, $r_{\pm k/2+1}$ が単調に伸びることを示す. $r_{\pm(k/2)}$ を縮めると, $r_{\pm(k/2)}$ の中心角である $\angle v_{\pm(k/2-1)} c v_{\pm(k/2)}$ が変化する. 余弦定理より,

$$\angle v_{\pm(k/2-1)} c v_{\pm(k/2)} = \arccos \frac{2 - x^2}{2}$$

である. ここで, $\angle v_{\pm(k/2)} c v_{\pm(k/2+1)}$ を $\angle v_{\pm(k/2-1)} c v_{\pm(k/2)}$ で表すと,

$$\angle v_{\pm(k/2)} c v_{\pm(k/2+1)} = \pi - \angle v_{\pm(k/2-1)} c v_{\pm(k/2)}$$

である. $\varphi = \angle v_{\pm(k/2-1)}cv_{\pm(k/2)}$ とおくと,

$$\begin{aligned} f_5(x) &= \sqrt{1 + 1 - 2 \cos \angle v_{\pm(k/2)}cv_{\pm(k/2+1)}} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos(\pi - \varphi)} \\ &= \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} \\ &= \sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

$f_5(x)$ を微分すると,

$$f_5'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

が得られる. $r_{\pm k/2}$ を縮めると $r_{\pm k/2+1}$ が伸びることを示したいので, $f_5(x)$ が単調減少であることを示せばよい. $x \geq l$ の範囲で $f_5'(x) \leq 0$ より $f_5(x)$ は単調減少. よって, $r_{\pm k/2+1}$ は単調に伸びる. \square

次に $r_{\pm k/2+1}$ が伸びる過程では, $s_{\pm k/2-1}$ の長さを 1 から $1 + l$ まで伸ばす.

補題 5.2.2.6. 27行目において $s_{\pm k/2-1}$ を伸ばすと $r_{\pm k/2+1}$ の長さは単調に増加する.

証明. $r_{\pm k/2+1}$ の長さは $x = |s_{\pm k/2-1}|$ の関数 $f_6(x)$ で表される. $f_6(x)$ が x に関して単調増加であることを示すことにより, $r_{\pm k/2+1}$ が単調に伸びることを示す. $s_{\pm k/2-1}$ を伸ばすと, $s_{\pm k/2-1}$ と $s_{\pm k/2}$ の中心角である $\angle v_{\pm(k/2-1)}cv_{\pm(k/2)}$ が変化する. 余弦定理より,

$$\angle v_{\pm(k/2-1)}cv_{\pm(k/2)} = \arccos \frac{x^2 - 1 - l^2}{2x}$$

である. ここで, $\angle v_{\pm(k/2)}cv_{\pm(k/2+1)}$ を $\angle v_{\pm(k/2-1)}cv_{\pm(k/2)}$ で表すと,

$$\angle v_{\pm(k/2)}cv_{\pm(k/2+1)} = \pi - \angle v_{\pm(k/2-1)}cv_{\pm(k/2)}$$

である. $\varphi = \angle v_{\pm(k/2-1)}cv_{\pm(k/2)}$ とおくと,

$$\begin{aligned} f_6(x) &= \sqrt{1 + 1 - 2 \cos \angle v_{\pm(k/2)}cv_{\pm(k/2+1)}} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos(\pi - \varphi)} \\ &= \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} \\ &= \sqrt{2 + \frac{x^2 - 1 - l^2}{x}} \end{aligned}$$

$f_6(x)$ を微分すると,

$$f_6'(x) = \frac{x^2 + l^2 + 1}{2x^2 \sqrt{\frac{x^2 - l^2 - 1}{x} + 2}}$$

が得られる. $1 \leq x \leq 1 + l$ の範囲で $f_6'(x) \geq 0$ より $f_6(x)$ は単調増加. よって, $r_{\pm k/2+1}$ は単調かつ連続に伸びる. \square

これらの補題により、アルゴリズムにおけるそれぞれの操作での辺の伸縮が単調であることが分かった。証明では伸縮率の最大値が W_n の伸縮率の下界を超えないことを示す。

定理 5.2.2 の証明。以上の補題により、提案アルゴリズムのそれぞれの操作における辺の伸びが単調である。補題 5.2.2.3 と補題 5.2.2.4 では $i \leq \lfloor k/2 \rfloor$ の場合のみについて示したが、 $i \geq \lfloor k/2 \rfloor$ の場合にも $i' = k - i$ と取り直すことで同様に確かめられる。

ある伸縮率 α に対して、伸びのみを考慮した場合の伸び率 $\alpha' = \alpha^2 = \frac{l}{2}$ である。伸び率の最大値について、 r_0 と $r_{\pm k}$ は伸ばす操作を行わないので最大値は 1、 $r_{\pm \lfloor k/2 \rfloor}$ の最大値は α' である。一般の r_i は一度単調に伸びた後、単調に縮めるので、伸び率が最大となるのは 9 行目、11 行目、17 行目と 21 行目の操作が終わった状態であり、図 5.6 の (b) の状態である。このとき $|s_{\pm(i-1)}| = 1$ で $v_{\pm(i-1)}$ は m 上にあり、 $v_{\pm i}$ は初期配置のままである。 $v_{\pm i}$ と $v_{\pm(i+1)}$ のなす角は $i\theta$ であるので、 $r_{\pm i}$ の伸縮率の最大値は $\sqrt{2 - 2 \cos i\theta}$ である。これを α' と比較すると、

$$\begin{aligned} \frac{|r_{\pm i}|}{\alpha'} &= \frac{l\sqrt{2 - 2 \cos i\theta}}{2} \\ &= l\sqrt{\frac{1 - \cos i\theta}{2}} \end{aligned}$$

であるが、 $l < 1$ かつ $\frac{1 - \cos i\theta}{2} \leq 1$ より、 $\frac{|r_{\pm i}|}{\alpha'} \leq 1$ である。よって $s_{\pm i}$ の伸び率は α' より小さい。

スポーク $s_{\pm i}$ ($0 \leq i \leq k$) は単調かつ連続に伸ばすので、最大値のみ考えればよい。 $s_{\pm i}$ の伸び率の最大値は $(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - i)l + 1$ 倍である。スポークの伸び率の最大値は s_0 の場合で $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor l + 1$ 倍である。ただし、前処理か後処理を行った場合には $s_{\pm k}$ はさらに l だけ伸び、この場合は $\lceil \frac{k}{2} \rceil l + 1$ 倍である。

Case 1: $n - 1$ が偶数かつ k が奇数の場合 ($n = 7, 11, 15, \dots, 4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$))

この場合には前処理も後処理も行わない。この場合に伸び率が最大となるのは s_0 と $s_{\pm k}$ であるが、 $|s_0| = |s_{\pm k}|$ なので s_0 の伸び率を α' と比較すると、

$$\begin{aligned} \frac{|s_0|}{\alpha'} &= \frac{l(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor l + 1)}{2} \\ &= \frac{l(\frac{k-1}{2}l + 1)}{2} \\ &= \frac{l(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1)l + 1}{2} \\ &= \frac{l(\frac{n-1}{2} - 1)l + 1}{2} \\ &= \frac{(n-3) \sin^2 \frac{\pi}{n-1} + 2 \sin \frac{\pi}{n-1}}{2} \end{aligned}$$

である. 右辺を $g_1(n)$ とおくと, $g_1(7) = 1$ より $\frac{|s_0|}{\alpha'} \leq 1$ が成り立つ. それより大きい n については, 近似を用いて示す. $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲では $\sin \theta \leq \theta$ が成り立つ. $n \geq 7$ より, $\frac{\pi}{n-1} \leq \frac{\pi}{2}$ であるので,

$$\begin{aligned} \frac{|s_0|}{\alpha'} &\leq \frac{(n-3) \left(\frac{\pi}{n-1}\right)^2 + 2\frac{\pi}{n-1}}{2} \\ &= \frac{\frac{n-3}{n-1}\pi^2 + 2\pi}{2(n-1)} \\ &= \frac{\frac{n-3}{n-1}\pi^2 + 2\pi}{2(n-1)} \end{aligned}$$

である. 右辺を $h_1(n)$ とおき n で微分すると,

$$h_1'(n) = -\frac{(\pi^2 + 2\pi)n - 5\pi^2 - 2\pi}{2(n-1)^3}$$

$n \geq 5$ のとき $h_1'(n) \leq 0$ より, $h_1(n)$ は単調減少. また, $h_1(8) \leq 1$ である. よって, s_0 の伸び率は α' 以下である.

Case 2: $n-1$ が奇数かつ k が奇数の場合 ($n = 12, 16, \dots, 4k+8$ ($k \in \mathbb{N}$))

この場合には前処理のみ行うので, s_{-k} が l だけ伸びる. この場合の $|s_{-k}|$ を α' と比較すると,

$$\begin{aligned} \frac{|s_{-k}|}{\alpha'} &= \frac{l \left(\lceil \frac{k}{2} \rceil l + 1\right)}{2} \\ &= \frac{l \left(\frac{k+1}{2} l + 1\right)}{2} \\ &= \frac{l \left(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1\right) l + 1}{2} \\ &= \frac{l \left(\frac{n-2}{2} + 1\right) l + 1}{2} \\ &= \frac{n \sin^2 \frac{\pi}{n-1} + 2 \sin \frac{\pi}{n-1}}{2} \end{aligned}$$

となる. Case 1 と同様に, 近似を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{|s_{-k}|}{\alpha'} &\leq \frac{n \left(\frac{\pi}{n-1}\right)^2 + 2\frac{\pi}{n-1}}{2} \\ &= \frac{\frac{n}{n-1}\pi^2 + 2\pi}{2(n-1)} \end{aligned}$$

である. 右辺を $h_2(n)$ とおき n で微分すると,

$$h_2'(n) = -\frac{(\pi^2 + 2\pi) + \pi^2 - 2\pi}{2(n-1)^3}$$

$n \geq 1$ のとき $h_2'(n) \leq 0$ より, $h_2(n)$ は単調減少. また, $h_2(10) \leq 1$ である. よって, この場合の s_0 の伸び率も α' と同じか小さい.

Case 3: $n-1$ が偶数かつ k が偶数の場合 ($n = 9, 13, 17, \dots, 4k+5$ ($k \in \mathbb{N}$))

この場合には後処理のみ行うので s_0 が l だけ伸びる. この場合の $|s_0|$ を α' と比較すると,

$$\begin{aligned} \frac{|s_0|}{\alpha'} &= \frac{l(\lceil \frac{k}{2} \rceil l + 1)}{2} \\ &= \frac{l(\frac{k}{2}l + 1)}{2} \\ &= \frac{l(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor l + 1)}{2} \\ &= \frac{l(\frac{n-1}{2}l + 1)}{2} \\ &= \frac{(n-1)\sin^2 \frac{\pi}{n-1} + 2\sin \frac{\pi}{n-1}}{2} \end{aligned}$$

となり, $n = 9$ のとき 1 より小さい. $n \geq 10$ の場合は Case 1 と同様に近似を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{|s_0|}{\alpha'} &\leq \frac{(n-1)\left(\frac{\pi}{n-1}\right)^2 + 2\frac{\pi}{n-1}}{2} \\ &= \frac{\pi^2 + 2\pi}{2(n-1)} \end{aligned}$$

である. これは $n \geq 10$ の範囲で 1 より小さい. よってこの場合の s_0 の伸び率は α' より小さい.

Case 4: $n-1$ が奇数かつ k が偶数の場合 ($n = 10, 14, 18, \dots, 4k+6$ ($k \in \mathbb{N}$))

この場合には前処理と後処理の両方を行うので, s_0 と s_{-k} の両方とも l だけ伸びる. こ

の場合の $|s_0|$ を α' と比較すると,

$$\begin{aligned}\frac{|s_0|}{\alpha'} &= \frac{l(\lceil \frac{k}{2} \rceil l + 1)}{2} \\ &= \frac{l(\frac{k}{2}l + 1)}{2} \\ &= \frac{l(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor l + 1)}{2} \\ &= \frac{l(\frac{n-2}{2}l + 1)}{2} \\ &= \frac{(n-2)\sin^2 \frac{\pi}{n-1} + 2\sin \frac{\pi}{n-1}}{2}\end{aligned}$$

が得られる. Case 1 と同様に, 近似を用いると,

$$\begin{aligned}\frac{|s_0|}{\alpha'} &\leq \frac{(n-2)\left(\frac{\pi}{n-1}\right)^2 + 2\frac{\pi}{n-1}}{2} \\ &= \frac{\frac{n-2}{n-1}\pi^2 + 2\pi}{2(n-1)}\end{aligned}$$

である.

右辺を $h_4(n)$ とおき n で微分すると,

$$h_4'(n) = -\frac{(\pi^2 + 2\pi)n - 3\pi^2 - 2\pi}{2(n-1)^3}$$

$n \geq 3$ のとき $h_4'(n) \leq 0$ より, $h_4(n)$ は単調減少. また, $h_4(9) \leq 1$ である. よってこの場合の s_0 の伸び率は α' より小さい.

以上より, $n = 7$ および $n \geq 9$ において W_n の伸縮率の下界による裏返しが可能である. \square

$n \leq 6$ と $n = 8$ での上界の証明は簡単ではない.

定理 5.2.3. ホイール W_4 の最適伸縮率 α_4 は $\sqrt{2} \leq \alpha_4 \leq \sqrt{1 + \sqrt{3}}$ である.

証明. 正三角形の外周を持ち, 外周上の頂点の重心に中心点を持つホイール W_4 を考える. 定理 5.1.1 より, 最適伸縮率の下界は $\sqrt{\frac{1}{\sin \frac{\pi}{4-1}}} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ であるが, 外周が正三角形なので図 3.1 より, 少なくとも $\sqrt{2}$ 倍の伸縮は必要である. よって, W_4 は伸縮率 $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ で裏返すことはできない.

次に, $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ 倍の伸縮を許せば裏返すことが可能であることを示す. 図 5.8 のように, Algorithm 3 の前処理のみを W_4 に適用する. W_4 の場合, $k = 1$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $l = \sqrt{3}$ である.

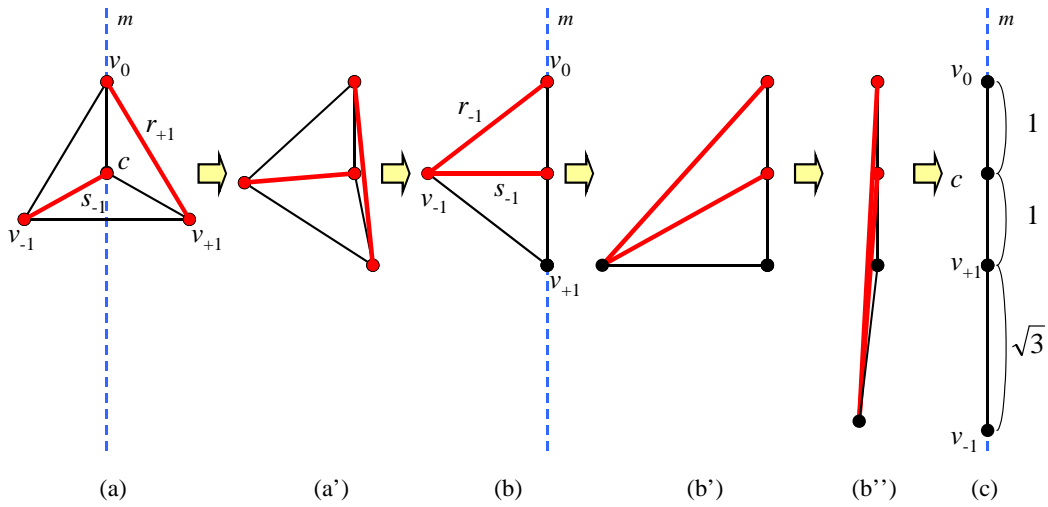


図 5.8: W_4 の裏返し

これは定理 5.2.2 での仮定と異なるので、それぞれの操作による辺の伸びが単調であることを改めて証明する。

中心点を c 、外周上の頂点を $v_i (-1 \leq i \leq 1)$ 、 v_0 と c を通る直線を m とする。また、 $|cv_i| = 1$ 、 $|v_i v_j| = l = \sqrt{3}$ 、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ とする。

まず、補題 5.2.2.1 と同様に v_{+1} を m 上へ移動する。図 5.8 の (a) から (b) のように変形する。

r_{+1} の長さは $x = |s_{-1}|$ ($1 \leq x \leq \sqrt{2}$) の関数 $f_1(x)$ で表される。 $f_1(x)$ が x に関して単調増加であることを示すことにより、 r_{+1} が単調に伸びることを示す。 s_{-1} を伸ばすと、 s_{-1} に隣接する中心角である $\angle v_0 c v_{-1}$ と $\angle v_{-1} c v_{+1}$ が変化する。余弦定理より、

$$\begin{aligned} \angle v_0 c v_{-1} &= \angle v_{-1} c v_{+1} \\ &= \arccos \frac{x^2 + 1 - l^2}{2x} \end{aligned}$$

である。

$$f_1(x) = 2\sqrt{1 - \left(\frac{x^2 - 2}{2x}\right)^2}$$

である。 $f_1(x)$ を x で微分すると、

$$f_1'(x) = \frac{4 - x^4}{4x^3 \sqrt{1 - \frac{(x^2 - 2)^2}{4x^2}}}$$

が得られる。 $1 \leq x \leq \sqrt{2}$ の範囲で $f_1'(x) \geq 0$ より $f_1(x)$ は単調増加。よって、 r_{+1} は単調に伸びる。

次に, 補題 5.2.2.2 と同様に v_{-1} を m 上へ移動する. 図 5.8 の (b) から (c) のように変形する. $r_{-(k-1)}$ の長さは $x = |s_{-1}|$ ($\sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$) の関数 $f_2(x)$ で表される. $f_2(x)$ が x に関して単調増加であることを示すことにより, $r_{-(k-1)}$ が単調に伸びることを示す.

s_{-k} を伸ばすと, s_{-k} と s_{+k} の中心角である $\angle v_{-k}cv_{+k}$ が変化する. $\angle v_{-(k-1)}cv_{+k} = \frac{3\theta}{2}$ より,

$$\begin{aligned}\angle v_{-(k-1)}cv_{-k} &= \angle v_{-(k-1)}cv_{+k} - \angle v_{-k}cv_{+k} \\ &= \frac{3\theta}{2} - \angle v_{-k}cv_{+k}\end{aligned}$$

である. また,

$$\angle v_{-k}cv_{+k} = \arccos \frac{x^2 + 1 - l^2}{2x}$$

である. $\varphi = \angle v_{-k}cv_{+k}$ とおくと,

$$f_2(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$$

となる. $f_2(x)$ を x で微分すると,

$$f_2'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - 1}}$$

が得られる. $1 \leq x \leq 1 + l$ の範囲で $f_2'(x) \geq 0$ より $f_2(x)$ は単調増加. よって, $r_{-(k-1)}$ は単調に伸びる.

それぞれの操作で辺の伸びが単調であることが分かった. したがって, 辺の伸びが最大となるのは図 5.8 の (c) のように W_4 を直線上に再配置したときである. もっとも伸び率の大きい辺は s_{-1} で, s_{-1} の長さの最大値は $1 + \sqrt{3}$ である. よって, 伸縮率 $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ での裏返しが可能である. \square

第6章 結論

6.1 今後の課題

ホイールの裏返しの伸縮率の下界を示し, $W_n(n = 7, n \geq 9)$ の場合の下界と上界が等しいことを示したが, $n = 4, 5, 6, 8$ での上界を示すことは今後の課題である.

また, ホイールを含まないグラフクラスへの拡張, さらに一般の平面グラフの裏返し問題の困難性の証明も今後の課題である.

既存の結果より頂点の移動が PSPACE 困難であることが分かっているが, 現時点では「裏返し問題」と「頂点を移動できるかどうかの判定問題」は比較不能である. したがって, PSPACE 困難性の証明は今後の課題である.

謝辞

本研究を行うにあたり、日頃より懇切丁寧な御指導を賜りました上原隆平准教授に、心より感謝致します。また、浅野哲夫教授、元木光雄助教、清見礼助教にはゼミなどにおいて適切な御教示を頂き、厚く御礼申し上げます。また、情報基礎学講座の皆様には公私にわたり、お世話になりました。この場を借りて感謝致します。最後に、大学院での研究を支えてくれた家族に感謝します。

参考文献

- [1] Erik D. Demaine and Joseph O'Rourke, "Geometric Folding Algorithms", Cambridge University Press, 2007.
- [2] H. Alt, C. Knauer, G. Rote and S. Whitesides, "On the complexity of the linkage reconfiguration problem", Proceedings of the 19th Annual Symposium on Computational Geometry, 164-170, 2003.
- [3] Jason H. Cantarella, Erik D. Demaine, Hayley N. Iben, and James F. O'Brien, "An energy-driven approach to linkage unfolding", In Proceedings of the 20th Annual ACM Symposium on Computational Geometry, 2004.
- [4] W. J. Lenhart and S. H. Whitesides, "Reconfiguring closed polygonal chains in Euclidean d -space", Discrete Comput. Geom., Vol. 13, 123-140, 1995.
- [5] 杉原厚吉, "トポロジー", 朝倉書店, 2001.