JAIST Repository
https://dspace.jaist.ac.jp/

Title	多項式時間グラフ再構築問題に関する研究
Author(s)	菅原，祐介
Citation	
Issue Date	2008-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/4346
Rights	
Description	Supervisor:上原　隆平，情報科学研究科，修士

JAIST
JAPAN
ADVANCED INSTITUTE OF
SCIENCE AND TECHNOLOGY

Japan Advanced Institute of Science and Technology

多項式時間グラフ再構築問題に関する研究

菅原 祐介 (0610047)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2008 年 2 月 7 日

キーワード: グラフアルゴリズム, グラフ再構築問題,proper interval graph, quasi threshold graph.

計算機で扱う多くの問題は，グラフ構造でモデル化することができる．こうした問題を効率よく解くには，グラフ理論とアルゴリズム理論がともに重要な役割を果たす．

与えられた 2 つのグラフが同型であるかどうかを判定する「グラフ同型性判定問題」は，こうしたアルゴリズム理論とグラフ理論に深く関係する問題の中でも，もっとも基本的な問題の 1 つである．しかし，この問題を効率よく解くアルゴリズムが存在するかどうかは，数十年間わかっていない．

グラフの同型性判定問題と同様，数十年解かれていない未解決問題に，**「グラフの再構築予想」**がある．まず，n 頂点 $v_1, v_2, ..., v_n$ からなるグラフ G^* を考える．ここで $i = 1, 2, ..., n$ に対して，G^* から v_i を取り除いて得られるグラフを G_i とする．これら n 個の G_i から構成される集合を G^* の $Deck$ と呼ぶ．グラフ再構築予想とは，頂点にラベルがついていない $(n-1)$ 頂点からなるグラフが n 個与えられた時，これらを $Deck$ として持つような n 頂点のグラフは高々1 つであるという予想である．この再構築予想は，$n > 2$ のときに例外なく成立すると予想されているが，ごく簡単な場合にしかその正しさは証明されていない．

一方で，グラフの再構築予想と，グラフの同型性判定問題の複雑さについては，深い関係があることが知られている．そこで，グラフの再構築を実際に行うアルゴリズムと，その計算量や正当性を研究することは，グラフの再構築予想が成立するグラフクラスの拡張や，グラフの同型性判定問題の複雑さの解析にもつながる研究であると考えられる．

本論文では，与えられた $Deck$ からグラフ G^* を再構築するアルゴリズムを提案する．より正確には，本論文の再構築アルゴリズムでは，与えられた $Deck$ に対応する G^* が存在しなければそれを判定し，存在すればそのような G^* を 1 つ出力する．出力される G^* の一意性は本研究では保障されないことに注意する．本論文で扱う**グラフ再構築問題**を次のように定義する．入力を頂点数 $(n-1)$ の n 個のグラフとし，入力のグラフを $Deck$ とする頂点数 n のグラフ G^* が存在するならばそれを出力し，G^* が存在しない場合，No を出力する．

Copyright © 2008 by Yusuke Sugawara

グラフの再構築問題に対しては，それを解く自明なアルゴリズムが存在する．単純なアルゴリズムは以下のようになる．まず，$Deck$ の中の G_1 を適当に選ぶ．次に G_1 に頂点 v を追加し，v と G_1 の $n-1$ 個の頂点の間に辺を張る．辺の張り方 2^{n-1} 通りのそれぞれについて対応する G^+ を作る．そして，G^+ の $Deck$ が入力の $Deck$ と一致するかどうかを同型性を判定するアルゴリズムを繰り返し用いてチェックする．最後に，入力の $Deck$ と自らの $Deck$ が一致する G^+ があればその G^+ を G^* として出力し，一致するものがなければ No を出力する．しかし，自明なアルゴリズムでは G^* の候補を入力サイズに対して指数回構築する．さらに，同型性判定を入力サイズに対して指数関数的回数行う必要がある．本研究では，グラフクラスを限定することにより，与えられた $Deck$ からグラフ G^* を再構築する多項式時間アルゴリズムを研究する．

あるグラフクラスに対して，多項式時間で $Deck$ からグラフ G^* を構築するアルゴリズムが存在するのであれば，そのグラフクラスに対する再構築予想の証明も相対的に簡単であることが予想される．また，こうしたアルゴリズムの解析を通じて，再構築予想に対する知見が得られることを期待できる．これまではグラフの再構築予想は，成立するかどうか，という静的でかつおおまかな指標しか与えることができなかったが，多項式時間計算可能性という新しい指標を与えることで，再構築予想の困難さの階層構造を提案することができる．

本研究では，遺伝的 (グラフ G^* がそのグラフクラスに属していれば，$Deck$ のすべてのグラフがそのグラフクラスに属している) で，かつ同型性判定がグラフのサイズの多項式時間でできるグラフクラスを対象とする．グラフクラスについて遺伝的で同型性判定問題が多項式時間で判定できるグラフクラスとして代表的なものに interval graphs や cographs, distance-hereditary graphs があげられる．

本研究では，まず，C を遺伝的でかつ同型性判定問題が多項式時間で解くことができるグラフのクラスとするとき，C に属する任意の非連結グラフ G^* のグラフ再構築問題は，C に属する連結なグラフの再構築問題に多項式時間で帰着できることを示した．

次に具体的なグラフクラスとして **proper interval graphs** と **quasi threshold graphs** を取り上げる．proper interval graphs は **interval graphs** のサブクラスであり quasi threshold graphs は **cographs** のサブクラスであり，cographs は **distance-hereditary graphs** のサブクラスである．また，本論文で取り上げたこれらのグラフクラスは遺伝的である．これらのグラフクラスに対して proper interval graph の $O(n^3m)$ 時間再構築アルゴリズムと quasi threshold graph の $O(nm)$ 時間再構築アルゴリズムを示した．