JAIST Repository
https://dspace.jaist.ac.jp/

Title	ディジタル・ハーフトーニング：アルゴリズム工学の視点
Author(s)	浅野，哲夫
Citation	情報処理，43(5)：554-561
Issue Date	2002-05-15
Type	Journal Article
Text version	publisher
URL	http://hdl.handle.net/10119/4568
Rights	社団法人　情報処理学会，浅野哲夫，情報処理学会論文誌，43(5)，2002，554-561．　ここに掲載した著作物の利用に関する注意：本著作物の著作権は（社）情報処理学会に帰属します。本著作物は著作権者である情報処理学会の許可のもとに掲載するものです。ご利用に当たっては「著作権法」ならびに「情報処理学会倫理綱領」に従うことをお願いいたします。 Notice for the use of this material: The copyright of this material is retained by the Information Processing Society of Japan (IPSJ). This material is published on this web site with the agreement of the author (s) and the IPSJ. Please be complied with Copyright Law of Japan and the Code of Ethics of the IPSJ if any users wish to reproduce, make derivative work, distribute or make available to the public any part or whole thereof. All Rights Reserved, Copyright (C) Information Processing Society of Japan.
Description	

JAIST
JAPAN
ADVANCED INSTITUTE OF
SCIENCE AND TECHNOLOGY

Japan Advanced Institute of Science and Technology

解説

ディジタル・ハーフトーニング
：アルゴリズム工学の視点

浅野 哲夫
北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科
t-asano@jaist.ac.jp

ハーフトーニングとは

ディジタルカメラの普及に伴ってカラープリンタの性能も飛躍的に改善されています．最近では低価格のプリンタでもかなり美しくカラー画像を出力できるようになりましたが，ディジタルカメラが1画素あたり赤青緑の各成分を最低でも8ビット（256段階の明るさ）で表現できるのに対して，インクジェットプリンタなどでは各画素で基本的にインクを置くか置かないかの2通りの選択しかできないために，いかに限られた色数のインクをうまく組み合わせて中間色を表現するかが出力画像の良し悪しを決めることになります．ここでは議論を簡単にするために，連続階調を持つ濃淡画像を白黒の2値画像で近似するという問題を考えることにします．この技術をディジタル・ハーフトーニング（Digital Halftoning）と呼んでいます．

図-1は，固定閾値による単純な2値化法による出力と誤差拡散法と呼ばれる方法で求めた出力2値画像を比較したものですが，明らかな差があることが分かるでしょう．

明るさは8ビットとか12ビットの離散的な整数で表されるのですが，ここでは簡単のために，明るさを0（黒）から1（白）までの実数で表すことにします．入力の画像は各要素が各画素の明るさを表す行列として表現されますから，ディジタル・ハーフトーニングの問題は，0から1までの実数値からなる行列を0か1の値を持つ2値行列に変換する問題だということになります．要するに0から1までの値を0か1に丸めればいいのですから，たとえば中間の0.5と比較して，0.5以上の値は1に，0.5未満の値は0に丸めるという単純な方法が考えられます．もちろん，こんな単純な方法でも人間が見て分かる画像を作り出すことが多いのですが，商品として売れるような画質を出すことは不可能です．それは，画素間の関係を考慮せずに各画素を別々に処理したことに原因があることはいうまでもないでしょう．

このようにディジタル・ハーフトーニングとは基本的には行列丸めの問題なのですが，画素を独立に処理するのではなく，なるべく広い範囲を考慮して丸めを実行する必要があります．画素間の処理をどのように関連付けるかについて，これまで実に多数の方法が提案されてきました．本稿では，まず代表的な従来法を紹介することから始めて，アルゴリズム研究者ならどこに焦点を当てて理論を展開するかを解説します．

代表的な従来法
――単純2値化法

各画素の明るさを0から1までの実数値で表した入力行列を0または1の値だけからなる2値行列に丸める最も簡単な方法は，0.5以上なら1に切り上げ，0.5未満なら0に切り下げるというものです．この方法を単純2値化法（simple thresholding）と呼ぶことにしましょう．この方法で確かに2値行列が得られますが，こんな単純な方法で2値化して連続階調を持つ入力画像とよく似た画像が得られると期待することはできません．実際，すべての画素の明るさが0.5であれば，その画像は灰色に見えますが，単純2値化法の出力画像ではすべての画素の値が1になりますから，真っ白の画像が得られることになります．明るさを0.5からほんの少しだけ下げて0.49にしても，画像としてはほとんど同じ灰色画像ですが，出力は今度は真っ黒になってしまいます．この例は極端ですが，いずれにしても明るさの絶対値に非常に敏感なこの方法が実際に使われることはないでしょう．

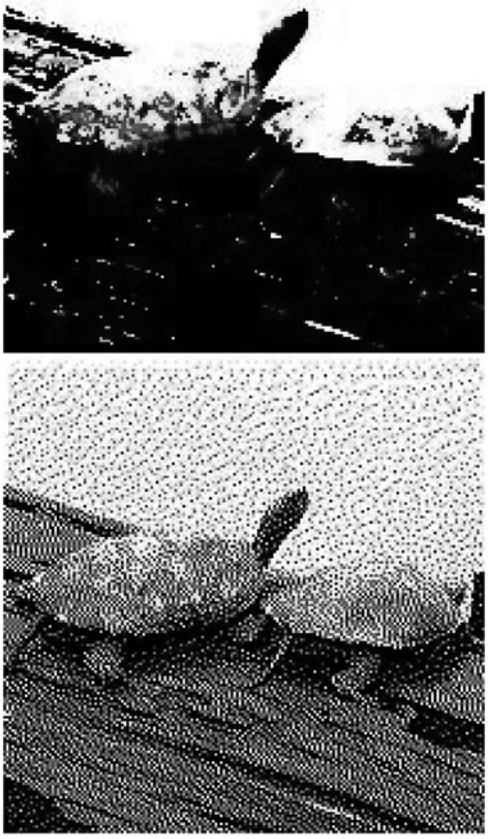

図-1　固定閾値による単純な2値化法（上）と誤差拡散法（下）で得られる2値画像の比較（実際にはカラーでの出力）

1	33	9	41	3	35	11	43
49	17	57	25	51	19	59	27
13	45	5	37	15	47	7	39
61	29	53	21	63	31	55	23
4	36	12	44	2	34	10	42
52	20	60	28	50	18	58	26
16	48	8	40	14	46	6	38
64	32	56	24	62	30	54	22

図-2　Bayerの8×8ディザ行列

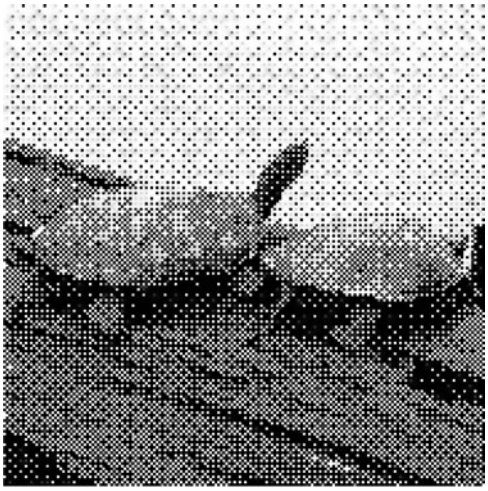

図-3　オーダードディザ法による2値化

――オーダードディザ法

単純2値化法では画像全体で0.5という固定の閾値を使って2値化を行いましたが，場所によって異なる閾値を用いるのがオーダードディザ法（Ordered Dither法）です．この方法では，**図-2**に示したような行列を周期的に並べることにより，入力の画像全体を覆い尽くします．このような小行列はディザ行列と呼ばれています．1から64までの整数がちょうど一度ずつ現れていることに注意してください．

画像をディザ行列で覆い尽くすと，各画素には行列の1つの要素が対応することになりますが，その値を65で割った値を2値化のための閾値として用います．たとえば，7に対応するところでは，入力画像における対応画素の明るさが7/65以上なら出力の値を1に，7/65未満なら出力の値を0にします．

今度は灰色の画像が入力された場合でも，約半数の画素は0に，残りは1に丸めることになりますから，多少明るさが変化しても安定的に灰色に見える画像を出力することができます．**図-3**は，この方法によって得られた2値画像を示したものです．

――誤差拡散法

誤差拡散法（Error Diffusion）とか誤差伝播法の名前で知られている方法では明るさの平均値を保つことが可能です．この方法では，単純2値化法と同様に固定の閾値を使いますが，丸めの際に生じた誤差を周囲の未処理画素に拡散するところに違いがあります．たとえば，ある画素の明るさが0.4だったとしましょう．これは固定の閾値である0.5未満ですから，0に丸めることになります．この丸めの誤差は0.4ということになりますが，この誤差を周囲の未処理画素に拡散するのです．一方，明るさが0.7であれば1に丸められますが，このときの誤差は−0.3です．

画素をラスターの順に走査するものとしましょう．そうすると，未処理画素は，右，左下，下，右下ということになります．これらの画素に**図-4**に示した割合で誤差を伝播するのです．

誤差拡散法では丸めの誤差を伝えていきますから，

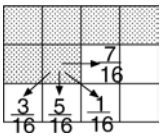

図-4　誤差拡散法における拡散係数（Floyd-Steinberg法）

入力画像の明るさの総和と出力画像の明るさの総和の差は高々1以内ということになります．

これまでに，単純2値化法，オーダードディザ法，誤差拡散法について見てきました．単純2値化法でも意外に良い結果が得られることがありますが，細部の再現性には問題があります．その点，オーダードディザ法は細部の再現性の点では優れていますが，特有の模様が見えてしまうという欠点があります．誤差拡散法は安定的に良い画質の画像を生成することができるので，実際のプリンタでもよく使われています．

従来法の変形と関連問題

前章では主たる方法の原理だけを説明しましたが，実用に供するためにはさまざまなチューニングが必要となります．本章では，従来法に対してどのような変形が可能かを探るとともに，アルゴリズムに関連する問題について考えます．

――単純2値化法の変形

先に説明した単純2値化法は，それぞれの画素を独立に2値化するもので，アルゴリズム的には最も簡単なものです．しかし，画像全体で固定の閾値を用いるために，中間色（灰色）の領域をうまく表現できません．この欠点を補う1つの方法は白色雑音法と呼ばれるものです．すなわち，各画素の明るさを0～1の白色雑音と比較するというものです．白色雑音は[0,1]区間の一様乱数と考えることができますから，結局，[0,1]区間の乱数との大小比較で出力のレベルを決めることになります．たとえば，画素の明るさが0.3の場合，0.3以下の乱数が生成される確率は0.3ですから，この画素の出力値の期待値は0.3ということになります．したがって，明るさが0.5で均一な領域では0.5の確率で黒点が生成されることになり，全体としては灰色に見えることが予想されます．

これと同じ考え方はアルゴリズムの分野でも知られています．“Randomized Algorithms”のテキストで有名なRaghavanがVLSIの概略配線経路決定に確率的な丸め（randomized rounding）という考え方を用いました．これは，[0,1]区間の実数xを確率xで1に切り上げるというものですが，まさに上記の白色雑音による2値化と等価です．この考え方はランダム化アルゴリズム（randmoized algorithm）の1つの典型的な実現方法としてもよく使われていますから，アルゴリズム関係者には白色雑音による2値化というよりは理解されやすいでしょう．

――オーダードディザ法の変形

単一の閾値による単純2値化法を一般化するのに，変動する乱数を閾値として用いる方法を説明しましたが，毎回乱数を発生するのは計算コストがかさみます．そこで，毎回乱数を発生する代わりに，あらかじめ作っておいた乱数表を用いるという方法が考えられます．この乱数表に相当するのがディザ行列です．乱数表が小さければ，乱数表のパターンが見えてしまう危険性がありますから，メモリが許す限り大きな乱数表を使うのが有利になります．実際，この考え方に沿った方法が提案されています．ブルーノイズマスク法という名前で一般に知られている方法ですが，この方法では乱数の技術を駆使して作った256×256のような大きなディザ行列を用います．

ディザ行列の性質

さて，オーダードディザ法の性能がディザ行列に依存することは明らかです．では，どんなディザ行列が最適でしょうか？　前節で説明したディザ行列は再帰的に作られたものです．その作り方は以下の通りです[8]：

まず，1×1のディザ行列$D_0=[1]$から始めて，再帰的に$D_k(k=1, 2, \ldots)$を次のように定義します．

$$D_k=\begin{bmatrix} 4D_{k-1}-3U_{k-1} & 4D_{k-1}-U_{k-1} \\ 4D_{k-1} & 4D_{k-1}-2U_{k-1} \end{bmatrix}$$

ただし，U_kは各要素がすべて1の$2^k\times 2^k$の正方行列です．

これでディザ行列の作り方は分かりましたが，なぜこの行列を使うのでしょう．1から2^{2k}の整数を行列内にばら撒くだけなら，他に何通りも考えられます．ディザ行列は，周期的に繰り返すことにより画像を覆い

尽くして，画素とディザ行列の要素の対応を作るために用いました．したがって，たとえば8×8のディザ行列を用いる場合，(i, j) 要素の番号と $(i+8, j+8)$ の要素の番号は等しいことになります．この周期性を頭に入れてもう一度ディザ行列を見てみましょう．1から4までの番号がどのように現れているかを見ると，ちょうど等距離の所にあることが分かるでしょう．同様に，5,6,7,8も互いに等距離にあり，しかも1～8の場所を見ると，全体がちょうど等間隔で並んでいることが分かります．

ディスクレパンシー

では，等間隔で点を並べるのがいいのでしょうか？この問に答えるために，規則的に並んだ点の模様を考えてみましょう．人間の目で知覚するのは平均的な明るさですから，一様な明るさに見えるためには，どんな小領域をとっても，そこでの平均的な明るさがほぼ一定であることが必要です．規則的に点が並んでいるのですから，どのように小領域をとっても平均的な明るさ，すなわち領域内の白点の個数の密度はほぼ一定であると思われますが，実際にはかなり変動があります．白点は規則的に並んでいますから，同じ8×8の大きさの正方形であっても，ちょうど白点が境界上にくるようにした場合と少し斜めにずらした場合では，2辺の上にあった白点の個数分だけ異なることになります．このような密度の差をディスクレパンシー（食い違い度，discrepancy）といいます．

ディスクレパンシーに関しては計算幾何学の分野[7), 11)]で詳しく調べられています．たとえば，単位正方形の内部にn個の点を配置する問題を考えます．軸平行な長方形Rを任意にとって，その面積$A(R)$と，Rに含まれる点の個数$n(R)$により，

$$D(R) = | n \cdot A(R) - n(R) |$$

という差を長方形Rのディスクレパンシーと定義します（**図-5**参照）．$\sqrt{n} \times \sqrt{n}$のグリッド上に点を配置するという規則的なパターンだと，幅が1で高さ$1/\sqrt{n}$の長方形Rを考えると，グリッドに辺が重なる場合には$2/\sqrt{n}$個の点が含まれます．このとき，$D(R) = |\sqrt{n} - 2\sqrt{n}| = \sqrt{n}$となります．実際，$D(R)$の値の最大値は$\sqrt{n}$であることを示すことができます．点を単位正方形の内部にランダムに配置してもディスクレパンシーは$O(\sqrt{n})$のままであることが知られています．ところが，点をうまく配置すると，この差を$O(\log n)$にまで小さくすることができます．

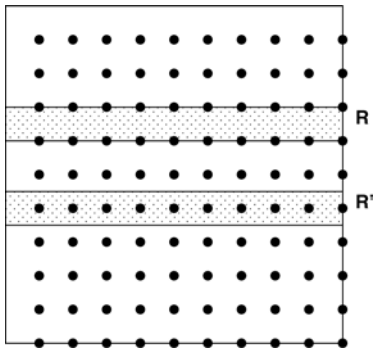

図-5　長方形のディスクレパンシー

ディザ行列の一般化：ブルーノイズマスク

オーダードディザ法に特有の模様を消すのにディザ行列を回転する方法が考えられますが，回転しなくても模様を消す良い方法があります．単にディザ行列のサイズを大きくするのです．ディザ行列としては8×8程度のものが一般的ですが，一挙に128×128あるいは256×256にまで拡大するのです．ここまで大きな行列を注意深く設計すればパターン特有の模様が目立つこともありません．問題は，大きなディザ行列をいかにして設計するかと，ディザ行列を蓄えるための記憶領域の大きさです．

上では大きな乱数表と表現しましたが，このように巨大なディザ行列を用いた方法のことをブルーノイズマスク法といいます．たとえば，256×256のサイズのブルーノイズマスクを設計する場合を考えてみましょう．行列の要素は1から256までの整数ですから，同じ数がちょうど256回ずつ含まれていることになります．このとき大事なことは，1から256までのどの数pに対しても，p以下の数を持つ要素が一様に散らばるように設計されていることです．たとえば，p=16の場合，全体の1/16の要素が16以下の数を持つことになりますから，面積が16の領域あたり平均的に1つの要素を選ぶことになります．格子状に点を配置したとき，4×4の正方形領域を考えると，その頂点にちょうど点が配置されている特別な場合には4点を含みますが，それ以外の場合には1点しか含みません．これに対して，16×1または1×16の細長い長方形領域を考えると，位置によっては5個の点を含む場合も，4個の点を含むこともあります．さらにまったく点を含まないこともあります．このように，長方形領域を考えると格子状に点を配置

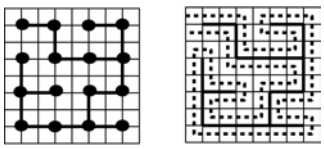

図-6　ランダムスペースフィリングカーブの作り方．
(a) ランダム全域木，(b) 迷路の通り抜け

するのはディスクレパンシーの意味でも良くないことが分かります．ディスクレパンシーのところでも説明しましたように，規則的なパターンよりも一見ランダムに見えるパターンの方が望ましいのです．

――誤差拡散法の変形

誤差拡散法は画質の点では優れていますが，明るさが一定の部分で誤差拡散係数を反映する模様が生じてしまうという欠点が指摘されています．模様を消すには誤差拡散係数にランダムな成分を持たせればよいのですが，そうすると今度は画像がぼけてしまうという問題が生じます．1つの解決方法は，明るさが一定の部分と明るさが急激に変化するエッジ部で誤差拡散係数を変えるというものです．エッジ部ではさらにエッジの方向にのみ誤差を拡散することも考えられます[12]．

模様を消すもう1つの方法は，ラスター走査を別のものに変更することです．ラスター走査は，すべての画素を一度ずつ訪問する1つの順序を決めるものですが，一般にそのようなものは，空間（平面）充填曲線またはスペースフィリングカーブ（space-filling curve）と呼ばれています[2]．実際，古くから知られているヒルベルト曲線のような再帰的に定義されたスペースフィリングカーブを用いる方法も提案されていますが，適用可能な画像サイズに大きな制約があるのと，曲線の規則性が出力画像に模様となって現れるという問題があり，実用的には問題があります．その制限から逃れるために，指定された大きさの格子平面を埋め尽くすランダムスペースフィリングカーブを効率よく設計する方法が提案されています（**図-6**参照）．

スペースフィリングカーブの利点は，本来2次元的なデータに1次元的な順序を導入できることです．このとき問題となるのは，スペースフィリングカーブ上での近傍がどの程度2次元的な広がりを持っているかですが，これについてはAsano-Ranjan-Roos[5]による理論的解析があり，素朴な予想を超える広がりを持たせることが可能であることが分かっています．この結果に基づいて，ランダムスペースフィリングカーブ上での誤差拡散法が実装され，画質と計算時間の両面で比較的良好な結果が得られています[1]．

最適化問題としての定式化

――人間の視覚特性のモデル化

これまでに述べてきた方法では，さまざまなテスト画像に対して出力画像を生成した後，人間の目視によって画質の良し悪しを判定するというものがほとんどで，出力画像の画質を定量的に評価することはあまりありませんでした．画像処理の分野では画質評価について多数の研究がありますが[10]，2値画像の画質についてはあまり研究が進んでいません．

上記の研究でほぼ共通している最適化の基準は次のようなものです．入力の画像を行列$A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,N}$によって表します．行列の各要素$a_{ij}$は，格子点$(i,j)$における明度を表します．通常，明度は8ビット程度の整数で表現されますが，ここでは$[0, 1]$区間の実数として表現することにします．すなわち，

$0 \le a_{ij} \le 1, i,j=1, \ldots, N$

です．簡単のため画像は1辺の長さ（画素数）がNである正方形であると仮定し，全画素数をnと記すことにします．すなわち，$n = N \times N$.

出力画像は同じサイズの2値行列$B = (b_{ij})$です．入力画像と人間の目視でよく似ている出力画像を求めることが問題です．そのために人間の視覚特性をモデル化する必要がありますが，画像処理の分野で一般的に用いられているのは，重みつき平均値の2乗和$W(A, B)$を最小化するという基準でしょう[10]．

このように入力画像と出力画像の距離を定めたとき，目標は入力画像Aとの距離$W(A, B)$を最小にする2値画像（行列）Bを求めることとなります．

――最適化基準

人間の視覚特性を考慮すると上記のような最適化基準になりますが，問題の計算複雑度を解析するために，上記の基準を若干簡単にした基準を用いましょう．

(1) まず，人間の視覚特性を考慮するためには重み行列Vは必須ですが，ここでは重みはすべて1であると仮定します．平均化のための領域のサイズが比較的大きい場合には許されないことですが，主として2×2程度の小さな領域を想定すると，重みを無視しても影響は

少ないと考えられます．重みを無視すると，領域Rにおける平均値を領域R内の行列要素の和で置き換えることができます．

(2) 次に，上では誤差の2乗和を評価しましたが，ここでは，より一般的なL_pノルムにおける基準を考えることにします．

(3) さらに，上では小領域として各点を中心とする正方形領域だけを考えましたが，ここでは領域の連結性すら仮定せずに，任意の画素集合を領域とみなすことにします．したがって，入力画像の他に小領域の集合も入力の一部とみなします．

問題を一般的に定義するために，画素集合に対応する集合G_nを

$G_n=\{(1,1),(1,2),...,(N,N)\}=\{p_1,p_2,...,p_n\}$と定めます．ただし，$n=N^2$は全画素数を表します．このとき，行列上の小領域は$G_n$の部分集合として表すことができます．以下では，評価のための領域の集合を$\mathcal{F}$という記号で表すことにします．

$\mathcal{A}=\mathcal{A}(G_n)$をインデックス集合$G_n$を持つ[0,1]行列全体の集合とし，$\mathcal{B}=\mathcal{B}(G_n)$をその部分集合で{0,1}の要素からなる行列全体とします．$\mathcal{F}$に属する領域をRとするとき，Rにおける行列Aの要素の和を$A(R)$と表します．すなわち，

$$A(R)=\Sigma_{pi\in R}\, a_{p_i}.$$

さて，領域の集合$\mathcal{F}$を固定したとき，$\mathcal{A}$の2つの行列AとA'の間の距離$Dist_p^{\mathcal{F}}(A,A')$を

$$Dist_p^{\mathcal{F}}(A,A')=[\sum_{R\in\mathcal{F}}|A(R)-A'(R)|^p]^{1/p}$$

によって定めます．ただし，pは∞を含む正整数です．この距離を領域の集合$\mathcal{F}$に関するL_p距離と呼びます．特に，$p=\infty$の場合は，

$$\begin{aligned}Dist_p^{\mathcal{F}}(A,A')&=\lim_{p\to\infty} Dist_p^{\mathcal{F}}(A,A')\\&=\max_{R\in\mathcal{F}}|A(R)-A'(R)|\end{aligned}$$

となります．

以上の準備の下に問題$\mathcal{P}(G_n,\mathcal{F},p)$を次のように定義しますが，これがディジタルハーフトーニング問題を最も一般的に定義したものと考えます．

L_p-最適な行列丸め問題　$\mathcal{P}(G_n,\mathcal{F},p)$:　[0,1]-行列$A\in\mathcal{A}$, G_n上の領域集合$\mathcal{F}$，および整数pが与えられたとき，

$$Dist_p^{\mathcal{F}}(A,B)=[\sum_{R\in\mathcal{F}}|A(R)-B(R)|^p]^{1/p}$$

を最小にする{0,1}-行列$B\in\mathcal{B}$を求めよ．

1次元の問題

上に定義した問題$\mathcal{P}(G_n,\mathcal{F},p)$は，2次元の行列に対してだけでなく，1次元の配列（ベクトル）に対しても同様に定義することができます．1次元の場合には領域の代わりに区間の概念を用いるのが自然です．特に，長さkのすべての区間からなる集合$\mathcal{F}_k$を考えたとき，問題$\mathcal{P}(G_n,\mathcal{F},p)$は多項式時間で解けるでしょうか．この問題に対しては古くからViterbiのアルゴリズム（本質的には動的計画法に基づく方法）として知られている方法があります．それを用いると$O(2^k n)$の時間と記憶スペースで最適解を求めることができます．計算時間をあまり増やさずに記憶スペースをnに比例する程度に削減する方法[3)]も知られていますが，いずれにしても計算時間は区間の長さkに関して指数関数的に増加してしまいます．紙数の関係で詳しいことは説明できませんが，kに関しても多項式の計算時間と記憶スペースで最適解を求める方法が提案されています[3)]．実際には$O(n^{1.5}\log^2 n)$時間と$O(n)$スペースのアルゴリズムと，$O(k^2 n\log n)$時間と$O(nk)$スペースのアルゴリズムが提案されています．kが比較的大きい場合には前者が有利ですが，$k<n^{1/4}$の場合には後者が有利です．

2次元の問題の可解性

——基本的な観察

1次元の場合には，同じ長さの区間の集合を領域集合$\mathcal{F}$とみなした場合には多項式時間で最適解が求まることが分かりましたが，2次元の場合にはかなり事情が異なります．基本的な観察は，領域集合$\mathcal{F}=\{R_1,R_2,...,R_m\}$と画素集合$G_n=\{p_1,p_2,...,p_n\}$との接続関係を表す制約

行列$\mathcal{C}(G_n, \mathcal{F})=(c_{ij})$を

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & p_i \in R_j \text{ のとき},\\ 0 & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

と定めるとき，この行列がtotally unimodularであれば，多項式時間で最適解を求めることができるというものです．ただし，行列Cがtotally unimodularであるのは，Cのどの正方部分行列をとっても，その行列式の値が0, 1, −1のいずれかであることです．

意味のある領域集合として最も簡単なものはすべての2×2領域からなるものでしょう．残念ながら，この領域集合に対応する制約行列はtotally unimodularではありません．実際，この場合については最適解を求める問題がNP-完全であることが証明されています[3]．

1次元の問題は区間集合に対して多項式時間で解けました．区間集合に対しては制約行列が行方向に1が連続するという性質を持ちますが，そのような性質を持つ行列はtotally unimodularであることが分かっているからです．

――従来の結果

行列丸め問題に関して古くから知られている定理に次のようなものがあります．

定理1［Baranyai[6] 1974］ 実数値行列$A=(a_{ij})$と，行列Aのすべての列，すべての行，行列全体からなる集合$\mathcal{F}$が与えられたとき，すべての$R\in\mathcal{F}$に対して$|A(R)-B(R)|<1$が成り立つような整数値行列$B=(b_{ij})$が存在する．

この定理ではすべての列，すべての行，行列全体からなる集合が$\mathcal{F}$として与えられていますが，対応する制約行列$\mathcal{C}(G_n, \mathcal{F})$はtotally unimodularであることを示すことができます．したがって，上記の基本的な観察に照らしてみると，条件を満たす2値行列の存在を主張するだけではなく，$\max_{R\in\mathcal{F}}|A(R)-B(R)|$の値を最小にする2値行列を多項式時間で求めることができることを保証できるのです．また，Baranyaiの定理ではすべての列，すべての行，行列全体からなる集合のみを対象として考えましたが，対応する制約行列がtotally unimodularであればよいので，次のように拡張することができます．

定理2 実数値行列$A=(a_{ij})$と，制約行列$\mathcal{C}(G_n, \mathcal{F})$がtotally unimodularであるような領域の集合$\mathcal{F}$が与えられたとき，すべての$R\in\mathcal{F}$に対して$|A(R)-B(R)|<1$が成り立つような整数値行列$B=(b_{ij})$が存在する．

上記の結果を定理の形でまとめると次のようになります[4]．

定理3［基本定理］ G_nをインデックス集合とする画像行列Aと領域集合$\mathcal{F}$が与えられたとき，制約行列$\mathcal{C}(G_n, \mathcal{F})$がtotally unimodularであれば，領域集合$\mathcal{F}$によって定まる基準において最適な2値行列Bを多項式時間で求めることができる．

――ラミナー拡張

スペースフィリングカーブ上での区間集合によって領域集合$\mathcal{F}$を定義する以外にも有望な方法があります．最初の問題はtotally unimodularの範囲内でどこまでできるかを検討することです．

$\mathcal{F}=\{R_1, R_2, ..., R_m\}$を$G_n$の1つの分割集合族としましょう．すなわち，$G_n$のどの要素も$\mathcal{F}$の1つの領域に含まれ，$\mathcal{F}$のどの2つの領域も互いに共通部分を持ちません．このような分割集合族$\mathcal{F}$が与えられたとき，$\mathcal{F}$の領域の合併をとっては新しい領域を定義していくというやり方で新たな領域集合$\hat{\mathcal{F}}=\{\hat{R}_1, \hat{R}_2, ..., \hat{R}_M\}$を構成します．このとき，各$\hat{R}_i$は$\mathcal{F}$の領域または$\mathcal{F}$の領域の合併として与えられ，しかも任意の2つの領域$\hat{R}_i$と$\hat{R}_j$に対して，$\hat{R}_i\subset\hat{R}_j, \hat{R}_j\subset\hat{R}_i, \hat{R}_i\cap\hat{R}_j=\emptyset$のいずれかが必ず成り立たなければなりません．このように定義される領域集合$\hat{\mathcal{F}}$を分割に対応する領域族$\mathcal{F}$のラミナー（laminar）拡張といいます．

定理4［浅野-小保方-加藤-徳山[4] 2002］ $\hat{\mathcal{F}}$を入力画像Aのインデックス集合G_nの2通りの分割に対応する分割集合族$\mathcal{F}_1$と$\mathcal{F}_2$のラミナー拡張の和集合$\hat{\mathcal{F}}_1\cup\hat{\mathcal{F}}_2$として定義される領域集合とすると，$\hat{\mathcal{F}}$に対応する制約行列$\mathcal{C}(G_n, \hat{\mathcal{F}})$はtotally unimodularである．

したがって，領域集合$\hat{\mathcal{F}}$に関する基準で最適な解を多項式時間で求めることができることは保証されました．実用的にはネットワークフローによる定式化で解けるかどうかが問題ですが，領域集合$\mathcal{F}$の構成方法に対応するネットワークにより解を求めることができます．紙数の関係で詳細な説明は省略しますが，**図-7**に示した要領でネットワークを構成すればよいのです[4]．

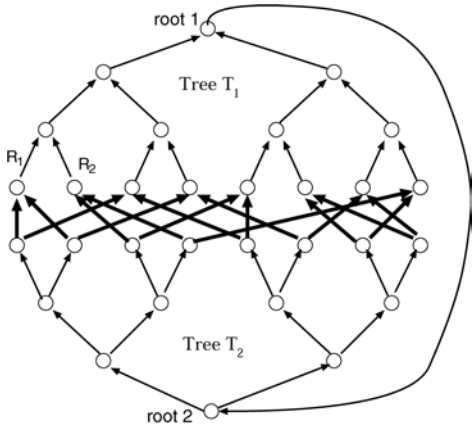

図-7　2通りの分割のラミナー拡張に対するネットワーク

計算機実験

上で述べた最小コストネットワークフローを求めるアルゴリズムは実際に実装され，印刷用の標準画像データに対して計算機実験が行われています[4]．最小コストネットワークフローを求めるアルゴリズムは，効率のよいアルゴリズムとデータ構造のためのライブラリであるLEDA[9]を利用して実装されています．原画像のサイズは4096×3072ですが，実験では1024×768に単純縮小したものを用いています．実験結果を比較して見れば，本稿で紹介した方法は一般的に誤差拡散法よりもメリハリのきいた画像を得る傾向があります（**図-8**参照）．

謝辞　本稿はディジタルハーフトーニングに関する一連の論文に基づいています．それらの論文の共著者である徳山豪氏（東北大学），小保方幸次氏（JAIST），藤川直樹氏（JAIST卒業生），松井知己氏（東京大学），玉木久夫氏（明治大学），加藤直樹氏（京都大学），永持仁氏（豊橋技術科学大学），臼井信昭氏（富士通研究所）に感謝します．また，有益なコメントをいただいた伊藤大雄氏（京都大学），David Mount氏（Maryland University, USA），清見礼氏（東京大学），中野浩嗣氏（JAIST）に感謝します．

最後に，著者のハーフトーニングに関する研究は文部科学省の科学研究費（特定研究および基盤研究）と栢森情報科学振興財団の援助を得て行われたものです．

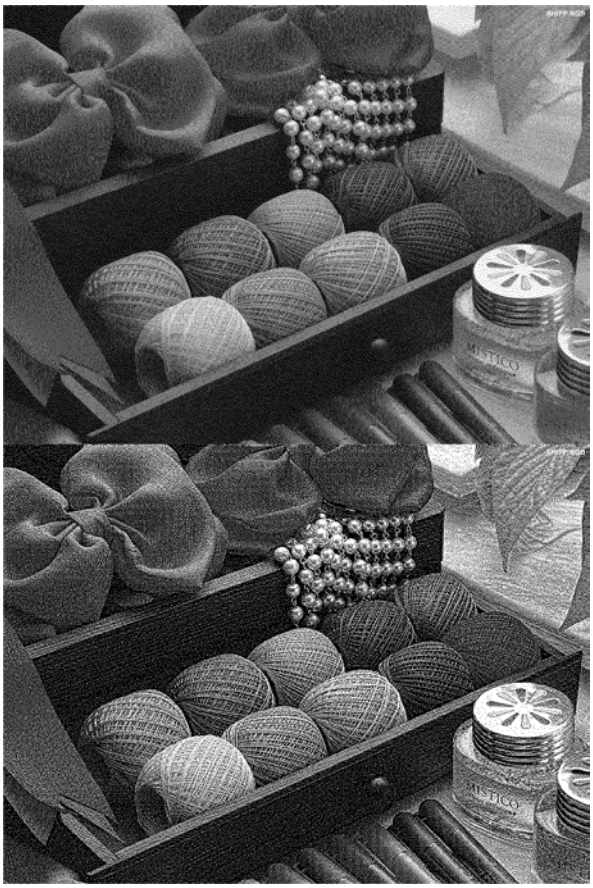

図-8　計算機実験の結果：誤差拡散法（上）とネットワークフローに基づく方法（下）による出力画像

参考文献
1) Asano, T. : Digital Halftoning Algorithm Based on Random Space-Filling Curve, IEICE Trans. on Fundamentals, Vol.E82-A, No.3, pp.553-556, Medgeh (1999).
2) Asano, T., Katoh, N., Tamaki, H. and Tokuyama, T. : Convertibility Among Grid Filling Curves, Proc. ISAAC98, Springer LNCS 1533, pp.307-316 (1998).
3) Asano, T., Matsui, T. and Tokuyama, T.: Optimal Roundings of Sequences and Matrices, Nordic Journal of Computing, Vol.7, No.3, pp.241-256, Fall (2000).
4) Asano, T., Obokata, K., Katoh, N. and Tokuyama, T.: Matrix Orunding Under the Lp-Discrepancy Measure and Its Application to Digital Halftoning, Proc. ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pp.896-904, San Francisco (2002).
5) Asano, T., Ranjan, D. and Roos, T.: Digital Halftoning Algorithms Based on Optimization Criteria and their Experimental Evaluation, IEICE Trans. Fundamentals, Vol.E79-A, No.4, pp.524-532 (Apr. 1996).
6) Baranyai, Z.: On the Factorization of the Complete Uniform Hypergraphs, in Infinite and Finite Sets, eds. A. Hanaj, R. Rado and V. T. Sós, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 10, pp.91-108.
7) de Berg, M., van Kreveld, M., Overmars, M. and Schwartzkopf, O. : Computational Geometry: Algorithms and Applications, Springer-Verlag (1997). 浅野哲夫訳: コンピュータ・ジオメトリー, 近代科学社 (2000).
8) 小寺監修: 実践ディジタルカラー画像の設計と評価, トリケップス (2000).
9) LEDA homepage: http://www.algorithmic-solutions.com/as_html/products/products.html
10) Miyahara, M., Kotani, K. and Algazi, V.R.: Objective Picture Quality Scale (PQS) for Image Coding, IEEE Trans. on Communications, 46, 9, pp.1215-1226 (Sep. 1998).
11) Preparata, F.P. and Shamos, M.I.: Computational Geometry: An Introduction, Springer-Verlag (1990). 浅野孝夫, 浅野哲夫訳: 計算幾何学, 総研出版 (1992).
12) 臼井, 浅野: ハーフトーン化方法およびハーフトーン化装置並びにハーフトーン化プログラムを記録したコンピュータ読み取り可能な記録媒体, 特許広報9951700 (1998).

（平成14年4月4日受付）