Title	直観主義論理に基づく理論体系の保守的拡大に関する研究
Author(s)	立澤, 正博
Citation	
Issue Date	2008-09
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/4758
Rights	
Description	Supervisor:石原哉, 情報科学研究科, 修士

直観主義論理に基づく理論体系の保守的拡大に関する研究

立澤 正博 (0610204)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2008 年 8 月 8 日

キーワード: 直観主義論理, 保守的拡大, negative translation, \$-translation.

直観主義論理における論理式は, 以下のような BHK-解釈と呼ばれる解釈のしかたによりその直観的な意味が把握される.

- $A \wedge B$ の証明は, A の証明と B の証明の両方を与えることにより得られる.
- $A \vee B$ の証明は, A の証明か B の証明の少なくとも一方を与えることにより得られる.
- $A \to B$ の証明とは, A の証明を B の証明に変換するような方法のことである.
- $\perp$ は証明を持たない.
- $\forall x A(x)$ の証明とは, 任意の対象 d を $A(d)$ の証明に変換するような方法のことである.
- $\exists x A(x)$ の証明は, 対象 d の構成のしかたと $A(d)$ の証明を与えることにより得られる.

この解釈のもとでは, 直観主義論理で何らかの対象の存在を主張することは, その対象を構成する方法を与えることとして理解される.

BHK-解釈による論理式の直観的な意味が示しているように, 直観主義論理は, 通常の古典的な意味で考えられる "数学的に存在する" ことと, 対象を構成する方法があるという意味の "明示的に存在する" ことを区別し, 明示的存在を体系的に取り扱う論理である.

他方, コンピュータのプログラムは本来構成的なものであって, コンピュータの計算モデルの一種である型つきラムダ計算と, 直観主義論理に基づく構成的な証明との間に対応関係がつくという Curry-Howard の対応が知られている. このことは数学的な命題の構成的な証明を分析することにより, それに対応するプログラムが持つ性質もまた分析できること, 構成的な証明からプログラムを抽出できることなどを意味する.

したがって, 情報科学の立場からは, ある数学的命題が直観主義論理で証明できるということは重要な意味を持っているといえる.

本研究では, 古典論理が直観主義論理の保守的拡大となるようなクラス, すなわち, 古典論理で証明できるならじつは直観主義論理の範囲内でも証明できるような命題のクラスを, そこに属する論理式の構文論的な形から定義する.

一般に, 直観主義論理で証明できる命題であっても古典論理で証明する方が簡単なことが多いが, 上で述べたようなクラスの構文論的な定義から, ある形をした命題について構成的な証明を得るためには古典的な証明を得れば十分であることが保証される. また, このことと Curry-Howard の対応をあわせて考えると, 構成的な証明からだけでなく, ある形をした命題についてはその古典的な証明からでもプログラムの抽出が可能になることを意味する.

本研究では, このようなクラスの定義をよく似ているが異なる 2 つの translation を用いた方法でそれぞれ定義する.

まず一つめの方法として, 論理式から論理式への変換として negative translation ^{g} を次のように帰納的に定義する.

- $\bot^g := \bot$.
- $P^g := \neg\neg P$ (ただし P は $\bot$ とは異なる原子論理式).
- $(A \wedge B)^g := A^g \wedge B^g$.
- $(A \vee B)^g := \neg(\neg A^g \wedge \neg B^g)$.
- $(A \to B)^g := A^g \to B^g$.
- $(\forall x A)^g := \forall x A^g$.
- $(\exists x A)^g := \neg\forall x \neg A^g$.

この negative translation を用いて, 古典論理を minimal logic に埋め込むことができる. すなわち

論理式 A が古典論理で証明できるなら minimal logic で A^g が証明できる

ことがわかる. ここで, 直観主義論理で $A^g \to A$ が証明できるような論理式 A のクラス $\mathcal{W}_i$ を構文論的に定義することにより, 古典論理が直観主義論理の保守的拡大となるようなクラスの構文論的な定義が与えられる.

次に二つめの方法として, 論理式から place holder \$ を含むような schema への変換として \$-translation $^\$$ を次のように帰納的に定義する.

- $\bot^\$:= \$$.
- $P^\$:= \neg_\$\neg_\$ P$ (ただし P は $\bot$ とは異なる原子論理式).

· $(A \wedge B)^\$:= A^\$ \wedge B^\$$.

· $(A \vee B)^\$:= \neg_\$ \neg_\$ (A^\$ \vee B^\$)$.

· $(A \to B)^\$:= A^\$ \to B^\$$.

· $(\forall x A)^\$:= \forall x A^\$$.

· $(\exists x A)^\$:= \neg_\$ \neg_\$ \exists x A^\$$.

これは negative translation の $\perp$ を \$ に置き換えたものと同等であり

論理式 A が古典論理で証明できるなら minimal logic で $A^\$$ が証明できる

ことがわかる. ここで, 直観主義論理で $A^\$ \to \neg_\$ \neg_\$ A$ (ただし $\neg_\$ A \equiv A \to \$$) が証明できるような論理式 A のクラス $\mathcal{I}$ を構文論的に定義すると, $A \in \mathcal{I}$ かつ A が古典論理で証明できるなら $\neg_\$ \neg_\$ A$ の \$ に A を代入した論理式 $(A \to A) \to A$ もまた直観主義論理で証明できる, すなわち A が直観主義論理で証明できることになる. このようにして定義された $\mathcal{I}$ をもとにして, 古典論理が直観主義論理の保守的拡大となるようなクラス $\mathcal{K}$ の定義が構文論的に与えられる.

本研究では, 以上のように 2 つの方法で定義される既知のクラス $\mathcal{W}_i$ と $\mathcal{K}$ をより大きなものに広げるには至らなかったが, これらのクラスは

$$\mathcal{W}_i \not\subseteq \mathcal{K}, \quad \mathcal{K} \not\subseteq \mathcal{W}_i, \quad \mathcal{W}_i \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$$

という関係にあることが確認された.

参考文献

[1] van Dalen, D., Logic and Structures. 3rd ed. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1994.

[2] Ishihara, H., A note on the Gödel-Gentzen translation. MLQ Math. Log. Q. **46** (2000) 1, 135 - 137.

[3] Leivant, D., Syntactic translations and provably recursive functions. J. Symbolic Logic **50** (1985), 682 - 688.

[4] Troelstra, A. S. and D. van Dalen, Constructivism in Mathematics. Volume 1. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1988.