Title	直観主義論理に基づく理論体系の保守的拡大に関する研究
Author(s)	立澤，正博
Citation	
Issue Date	2008-09
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/4758
Rights	
Description	Supervisor:石原哉，情報科学研究科，修士

修 士 論 文

直観主義論理に基づく理論体系の保守的拡大に関する研究

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

立澤 正博

2008 年 9 月

修 士 論 文

直観主義論理に基づく理論体系の保守的拡大に関する研究

指導教官　石原哉 准教授

審査委員主査　石原哉 准教授
審査委員　浅野哲夫 教授
審査委員　小川瑞史 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報処理学専攻

0610204 立澤 正博

提出年月: 2008 年 8 月

概 要

本稿では negative translation と, その変種の \$-translation による証明図の書き換えを用いて, 古典論理が直観主義論理の保守的拡大になるような論理式のクラスを, それぞれそこに属する論理式の構文論的な形から定義する.

目 次

第1章　序論

1.1　BHK-解釈

直観主義論理における論理式は, 以下のような BHK-解釈と呼ばれる解釈のしかたによりその直観的な意味が把握される.

- $A \wedge B$ の証明は, A の証明と B の証明の両方を与えることにより得られる.
- $A \vee B$ の証明は, A の証明か B の証明の少なくとも一方を与えることにより得られる.
- $A \to B$ の証明とは, A の証明を B の証明に変換するような方法のことである.
- $\perp$ は証明を持たない.
- $\forall x A(x)$ の証明とは, 任意の対象 d を $A(d)$ の証明に変換するような方法のことである.
- $\exists x A(x)$ の証明は, 対象 d の構成のしかたと $A(d)$ の証明を与えることにより得られる.

この解釈のもとでは, 直観主義論理で何らかの対象の存在を主張することは, その対象を構成する方法を与えることとして理解される.

1.2　構成的な証明とコンピュータのプログラム

BHK-解釈による論理式の直観的な意味が示しているように, 直観主義論理は, 通常の古典的な意味で考えられる "数学的に存在する" ことと, 対象を構成する方法があるという意味の "明示的に存在する" ことを区別し, 明示的存在を体系的に取り扱う論理である.

一方, コンピュータのプログラムは本来構成的なものであって, コンピュータの計算モデルの一種である型つきラムダ計算と, 直観主義論理に基づく構成的な証明との間に対応関係がつくという Curry-Howard の対応が知られている. このことは数学的な命題の構成的な証明を分析することにより, それに対応するプログラムが持つ性質もまた分析できること, 構成的な証明からプログラムを抽出できることなどを意味する.

したがって, 情報科学の立場からは, ある数学的命題が直観主義論理で証明できるということは重要な意味を持っているといえる.

1.3 translation による埋め込み

1930 年ごろ, Gödel と Gentzen はそれぞれ独立に translation を用いた古典的算術の直観主義算術への埋め込みの手法を考案した. この translation は今日では negative translation として最も一般的に知られている. また, これとは独立に 1920 年代に Kolmogorov は不完全な形式化ではあったがこれと同等の能力を持つ古典論理の直観主義論理への埋め込みの手法を見つけていた. その後これらの translation の変種の黒田の translation なども考案され, これらの埋め込みを利用した研究が多くなされてきた (詳しくは [4] を参照).

古典論理が直観主義論理の保守的拡大となるようなクラスとは, 古典論理で証明できるならじつは直観主義論理の範囲内でも証明できるような命題のクラスのことであるが, 例えば, Leivant [3] は Kolmogorov の translation による埋め込みを用いて, 述語論理の範囲にとどまらず, 古典的な数学の理論が直観主義数学の理論の保守的拡大となるような条件について, 理論を構成する公理や理論における定理となる論理式に関して構文論的な側面からの研究を行った. また, 石原 [2] は minimal logic における $\perp$ と schema における place holder の構文論的な類似性に着目して translation の新しい変種 \$-translation を定義し, これを用いて古典論理が直観主義論理の保守的拡大となるような条件について, 対象となる論理式の構文論的な側面からの研究を行っている.

一般に, 直観主義論理で証明できる命題であっても古典論理で証明する方が簡単なことが多いが, 上で述べたようなクラスを構文論的な側面から定義することによって, ある形をした命題について構成的な証明を得るためには古典的な証明を得れば十分であることが保証される. また, このことと Curry-Howard の対応をあわせて考えると, 構成的な証明からだけでなく, ある形をした命題についてはその古典的な証明からでもプログラムの抽出が可能になることを意味する.

本稿ではこれらの translation のうち, とくに Gödel-Gentzen の negative translation と \$-translation を取り扱う.

1.4 構文論的なクラス定義

本稿では, まず第 2 章で議論の対象となる論理のシステムの定義や保守的拡大の概念の定義を与える.

次に, 第 3 章では Gödel-Gentzen の negative translation を用いて, 古典論理が直観主義論理の保守的拡大となるようなクラス, すなわち, 古典論理で証明できるならじつは直観主義論理の範囲内でも証明できるような命題のクラスを, そこに属する論理式の構文論的な形から定義する.

続いて第 4 章では \$-translation を用いて, 古典論理が直観主義論理の保守的拡大となるようなクラスの定義を第 3 章で行ったのと同様に構文論的に与え, 第 3 章で与えたクラスとの関係について述べる.

最後に, 第 5 章で本研究の成果と今後の課題について述べる.

第2章　いくつかの論理の体系

この章では, 本稿で取り扱う minimal logic, 直観主義論理, 古典論理の体系 **MQC**, **IQC**, **CQC** をそれぞれ自然演繹に基づいて定義し, これらの論理の体系の間で成り立つ関係について述べる.

2.1　言語や記号について

本稿で取り扱う述語論理の言語は, 命題定数としては $\perp$ のみを持ち, 論理結合子の記号と量化記号には

$$\wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \forall \quad \exists$$

を用いる. 論理式 A, B に対し $\neg A$ は $A \rightarrow \perp$ を, $A \leftrightarrow B$ は $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ を表す. また, 論理式や項の構文的な等しさを表すメタ記号として $\equiv$ を用いる. 例えば, これらの記号を使うと

$$\neg A \equiv A \rightarrow \perp, \quad A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

論理式 A, 変数 x, 項 t について, $A[x/t]$ で A における項 t の変数 x への代入を表す. $FV(A)$, $FV(t)$ はそれぞれ論理式 A, 項 t の自由変数の集合を, $BV(A)$, $BV(t)$ は束縛変数の集合を表す.

定義 2.1 (free for) *A を論理式, x を変数, t を項とする. A の中で t が free for x であるということを以下のように帰納的に定義する.*

- 原子論理式 P の中で t は *free for x.*
- *B, C を論理式, $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, $Q \in \{\forall, \exists\}$, y を変数とする.*

$$\cdot\ B \circ C \text{ の中で } t \text{ が } \mathit{free\ for}\ x \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} B \text{ の中で } t \text{ が } \mathit{free\ for}\ x \\ \text{かつ} \\ C \text{ の中で } t \text{ が } \mathit{free\ for}\ x. \end{cases}$$

$$\cdot\ QyB \text{ の中で } t \text{ が } \mathit{free\ for}\ x \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad x \equiv y \text{ または } \begin{cases} y \notin FV(t) \\ \text{かつ} \\ B \text{ の中で } t \text{ が } \mathit{free\ for}\ x. \end{cases}$$

2.2 minimal logc

定義 2.2 (MQC の証明図) *minimal logic* の体系 MQC の証明図を, その証明図の高さ, *conclusion, open assumption* の集合の概念とあわせて以下のように同時帰納的に定義する.

- A を論理式とする. このとき A は *conclusion* が A, *open assamption* の集合が $\{A\}$ であるような高さ 0 の証明図である. *conclusion* が A であるような証明図 $\mathcal{D}$ を

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ A\end{array}$$

のように表す.

- 既知の証明図から以下の規則にしたがって作られるものも証明図である (図の横に付された適用規則を表すラベルは省略してもよい).

($\wedge$-introduction) $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ をそれぞれ *conclusion* が A, B, *open assumption* の集合が O_1, O_2 で, 高さが n_1, n_2 であるような証明図とする. このとき

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ A & B\end{array}}{A \wedge B}\ (\wedge I)$$

は *conclusion* が $A \wedge B$, *open assumption* の集合が $O_1 \cup O_2$ であるような高さ $\max\{n_1, n_2\} + 1$ の証明図である.

($\wedge$-elimination) $\mathcal{D}$ を *conclusion* が $A_1 \wedge A_2$, *open assumption* の集合が O で, 高さが n であるような証明図とする. このとき

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ A_1 \wedge A_2\end{array}}{A_i}\ (\wedge E)$$

は *conclusion* が A_i $(i \in \{1, 2\})$, *open assumption* の集合が O であるような高さ $n + 1$ の証明図である.

($\to$-introduction) $\mathcal{D}$ を *conclusion* が B, *open assumption* の集合が O で, 高さが n であるような証明図とする. このとき

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ B\end{array}}{A \to B}\ (\to I)$$

は *conclusion* が $A \to B$, *open assumption* の集合が $O \setminus \{A\}$ であるような高さ $n + 1$ の証明図である. O から A が取り除かれることを明示的に

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{D}\\ B\end{array}}{A \to B}\ (\to I)$$

のように表すこともある.

(→-elimination) $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ をそれぞれ *conclusion* が A, $A \to B$, *open assumption* の集合が O_1, O_2 で, 高さが n_1, n_2 であるような証明図とする．このとき

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ A & A \to B\end{matrix}}{B}\ (\to E)$$

は *conclusion* が B, *open assumption* の集合が $O_1 \cup O_2$ であるような高さ $\max\{n_1, n_2\} + 1$ の証明図である.

(∨-introduction) $\mathcal{D}$ を *conclusion* が A_i ($i = 1$ または 2), *open assumption* の集合が O で, 高さが n であるような証明図とする．このとき

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ A_i\end{matrix}}{A_1 \vee A_2}\ (\vee I)$$

は *conclusion* が $A_1 \vee A_2$, *open assumption* の集合が O であるような高さ $n+1$ の証明図である.

(∨-elimination) $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ をそれぞれ *conclusion* が $A \vee B$, C, C, *open assumption* の集合が O_1, O_2, O_3 で, 高さが n_1, n_2, n_3 であるような証明図とする．このとき

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3 \\ A \vee B & C & C\end{matrix}}{C}\ (\vee E)$$

は *conclusion* が C, *open assumption* の集合が $O_1 \cup (O_2 \setminus \{A\}) \cup (O_3 \setminus \{B\})$ であるような高さ $\max\{n_1, n_2, n_3\} + 1$ の証明図である．O_2, O_3 からそれぞれ A, B が取り除かれることを明示的に

$$\dfrac{\begin{matrix} & [A] & [B] \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3 \\ A \vee B & C & C\end{matrix}}{C}\ (\vee E)$$

のように表すこともある.

(∀-introduction) $\mathcal{D}$ を *conclusion* が A, *open assumption* の集合が O で, 高さが n であるような証明図とし, $x \notin \bigcup_{B \in O} FV(B)$ であるとする．このとき

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ A\end{matrix}}{\forall y A[x/y]}\ (\forall I)$$

は *conclusion* が $\forall y A[x/y]$ (ただし y は A の中で *free for* x かつ $y \notin FV(A) \setminus \{x\}$ となる変数), *open assumption* の集合が O であるような高さ $n+1$ の証明図である.

($\forall$-elimination) $\mathcal{D}$ を *conclusion* が $\forall xA$, *open assumption* の集合が O で, 高さが n であるような証明図とする. このとき

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \forall xA\end{matrix}}{A[x/t]}\ (\forall E)$$

は *conclusion* が $A[x/t]$ (ただし t は A の中で *free for* x となる項), *open assumption* の集合が O であるような高さ $n+1$ の証明図である.

($\exists$-introduction) $\mathcal{D}$ を *conclusion* が $A[x/t]$ (ただし t は A の中で *free for* x となる項), *open assumption* の集合が O で, 高さが n であるような証明図とする. このとき

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A[x/t]\end{matrix}}{\exists xA}\ (\exists I)$$

は *conclusion* が $\exists xA$, *open assumption* の集合が O であるような高さ $n+1$ の証明図である.

($\exists$-elimination) $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ をそれぞれ *conclusion* が $\exists yA[x/y]$, B (ただし y は A の中で *free for* x かつ $y \notin FV(A) \setminus \{x\}$ となる変数), *open assumption* の集合が O_1, O_2 で, 高さが n_1, n_2 であるような証明図とし, $x \notin FV(B) \cup \bigcup_{C \in O_2 \setminus \{A\}} FV(C)$ であるとする. このとき

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \exists yA[x/y]\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ B\end{matrix}}{B}\ (\exists E)$$

は *conclusion* が B, *open assumption* の集合が $O_1 \cup (O_2 \setminus \{A\})$ であるような高さ $\max\{n_1, n_2\} + 1$ の証明図である. O_2 から A が取り除かれることを明示的に

$$\dfrac{\begin{matrix}\\ \mathcal{D}_1\\ \exists yA[x/y]\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]\\ \mathcal{D}_2\\ B\end{matrix}}{B}\ (\exists E)$$

のように表すこともある.

2.3 直観主義論理

定義 2.3 (IQC の証明図) 直観主義論理の体系 **IQC** の証明図を以下のように帰納的に定義する.

- **MQC** の証明図は **IQC** の証明図である.

- **(intuitionistic absurdity)** $\mathcal{D}$ を *conclusion* が $\perp$, *open assumption* の集合が O で, 高さが n であるような **IQC** の証明図とする. このとき任意の論理式 A について

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \perp\end{array}}{A}\ (\perp_i)$$

は *conclusion* が A, *open assumption* の集合が O であるような高さ $n+1$ の **IQC** の証明図である.

2.4　古典論理

定義 2.4 (CQC の証明図) 古典論理の体系 **CQC** の証明図を以下のように帰納的に定義する.

- **IQC** の証明図は **CQC** の証明図である.

- **(classical absurdity)** $\mathcal{D}$ を *conclusion* が $\perp$, *open assumption* の集合が O で, 高さが n であるような **CQC** の証明図とする. このとき任意の論理式 A について

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \perp\end{array}}{A}\ (\perp_c)$$

は *conclusion* が A, *open assumption* の集合が $O \setminus \{\neg A\}$ であるような高さ $n+1$ の **CQC** の証明図である. O から $\neg A$ が取り除かれることを明示的に

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \mathcal{D}\\ \perp\end{array}}{A}\ (\perp_c)$$

のように表すこともある.

2.5　体系の拡張と論理式のクラスの関係

定義 2.5 (証明可能性) Γ を論理式の集合, A を論理式とする.

conclusion が A, *open assumption* の集合が Γ の部分集合であるような **MQC** の証明図が存在するとき, **MQC** で Γ から A が証明できるといい

$$\Gamma \vdash_m A$$

と表す. 論理と Γ をあわせてひとつの形式的体系と考えて $\mathbf{MQC} + \Gamma \vdash A$ と表すこともある. とくに $\Gamma = \emptyset$ のときこれを $\vdash_m A$, $\mathbf{MQC} \vdash A$ などとも表す.

IQC, **CQC** に対しても同様に論理式の集合と論理式の間の関係が定義でき, これらをそれぞれ

· $\Gamma \vdash_i A$ または $\mathbf{IQC} + \Gamma \vdash A$ (とくに $\Gamma = \emptyset$ のとき $\vdash_i A$ または $\mathbf{IQC} \vdash A$)
· $\Gamma \vdash_c A$ または $\mathbf{CQC} + \Gamma \vdash A$ (とくに $\Gamma = \emptyset$ のとき $\vdash_c A$ または $\mathbf{CQC} \vdash A$)

などと表す.

定義 2.6 (形式的体系の拡張) $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ を形式的体系とする. 任意の論理式 A について

$$\mathbf{T}_2 \vdash A \text{ ならば } \mathbf{T}_1 \vdash A$$

となるとき $\mathbf{T}_1$ は $\mathbf{T}_2$ の拡張であるという.

命題 2.1 形式的体系としての $\mathbf{MQC}$, $\mathbf{IQC}$, $\mathbf{CQC}$ の間には以下の関係が成り立つ.

- $\mathbf{IQC}$ は $\mathbf{MQC}$ の拡張である.
- $\mathbf{CQC}$ は $\mathbf{IQC}$ の拡張である.

証明

論理式 A について $\mathbf{MQC} \vdash A$ なら, 定義 2.5 より conclusion が A, open assumption の集合が空であるような $\mathbf{MQC}$ の証明図 $\mathcal{D}$ が存在する. 定義 2.3 より $\mathcal{D}$ は $\mathbf{IQC}$ の証明図でもあるため, $\mathbf{IQC} \vdash A$. よって, $\mathbf{IQC}$ は $\mathbf{MQC}$ の拡張となっている.

同様に, $\mathbf{CQC}$ は $\mathbf{IQC}$ の拡張となっていることが示される. また, 定義 2.6 から拡張の関係は推移的であるので $\mathbf{CQC}$ は $\mathbf{MQC}$ の拡張でもある.

□

定義 2.7 (保守的拡大) $\mathcal{C}$ を論理式の集合, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ を形式的体系とし, $\mathbf{T}_1$ は $\mathbf{T}_2$ の拡張であるとする.

$$\text{任意の論理式 } A \in \mathcal{C} \text{ について } \mathbf{T}_1 \vdash A \text{ ならば } \mathbf{T}_2 \vdash A$$

となるとき, $\mathcal{C}$ について $\mathbf{T}_1$ は $\mathbf{T}_2$ の保守的拡大という.

第3章　negative translationに基づくクラス定義

この章では論理式から論理式への変換として negative translation を定義し, negative translation による証明図の書き換えを用いて **CQC** が **IQC**, **MQC** の保守的拡大となるような論理式のクラスを, それぞれそこに含まれる論理式の構文論的な形により定義できることをみる.

3.1　negative translation

定義 3.1 (Negative formula) 以下のように帰納的に定義される論理式を *negative* な論理式という.

$\perp$, 原子論理式 P について

- $\perp$ は *negative,*
- $\neg P$ は *negative.*

A, B が *negative* な論理式とすると

- $A \wedge B$ は *negative,*
- $A \to B$ は *negative,*
- $\forall x A$ は *negative.*

命題 3.1 論理式 A が *negative* ならば $\mathbf{MQC} \vdash \neg\neg A \to A$.

証明

論理式 A の複雑さに関する帰納法により証明する (なお, 証明図の中で open assumption の集合から論理式を取り除くような規則を適用する際, その conclusion と, 取り除かれる論理式を open assumption に追加した高さ 0 の証明図にそれぞれ対応する番号をつける).
<u>Basis:</u>

$A \equiv \bot$ のとき

$$\dfrac{\dfrac{{}^{(2)}\neg\neg\bot \qquad \dfrac{{}^{(1)}\bot}{{}^{(1)}\neg\bot}\,(\to I)}{\bot}}{{}^{(2)}\neg\neg\bot \to \bot}\,(\to I)$$

は **MQC** の証明図となるため, **MQC**$\vdash \neg\neg A \to A$.

$A \equiv \neg P$ のとき

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(3)}\neg\neg\neg P \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(1)}\neg P \quad {}^{(2)}P}{\bot}}{{}^{(1)}\neg\neg P}\,(\to I)}{\bot}}{{}^{(2)}\neg P}\,(\to I)}{{}^{(3)}\neg\neg\neg P \to \neg P}\,(\to I)$$

は **MQC** の証明図となるため, **MQC**$\vdash \neg\neg A \to A$.

<u>Induction steps:</u>

$A \equiv B \wedge C$ のとき B, C は negative であり, 帰納法の仮定から **MQC**$\vdash \neg\neg B \to B$, **MQC**$\vdash \neg\neg C \to C$. したがって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(5)}\neg\neg(B\wedge C) \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(2)}\neg B \quad \dfrac{{}^{(1)}B\wedge C}{B}}{\bot}}{{}^{(1)}\neg(B\wedge C)}\,(\to I)}{\bot}}{{}^{(2)}\neg\neg B}\,(\to I) \qquad \begin{matrix}I.H.\\ \vdots \\ \neg\neg B\to B\end{matrix}}{B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(5)}\neg\neg(B\wedge C) \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(4)}\neg C \quad \dfrac{{}^{(3)}B\wedge C}{C}}{\bot}}{{}^{(3)}\neg(B\wedge C)}\,(\to I)}{\bot}}{{}^{(4)}\neg\neg C}\,(\to I) \qquad \begin{matrix}I.H.\\ \vdots \\ \neg\neg C\to C\end{matrix}}{C}}{B\wedge C}}{{}^{(5)}\neg\neg(B\wedge C)\to B\wedge C}\,(\to I)$$

は **MQC** の証明図となるため, **MQC**$\vdash \neg\neg A \to A$.

$A \equiv B \to C$ のとき C は negative であり, 帰納法の仮定から **MQC**$\vdash \neg\neg C \to C$. したがって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(4)}\neg\neg(B\to C) \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(2)}\neg C \quad \dfrac{{}^{(3)}B \quad {}^{(1)}B\to C}{C}}{\bot}}{{}^{(1)}\neg(B\to C)}\,(\to I)}{\bot}}{{}^{(2)}\neg\neg C}\,(\to I) \qquad \begin{matrix}I.H.\\ \vdots\\ \neg\neg C\to C\end{matrix}}{C}}{{}^{(3)}B\to C}\,(\to I)}{{}^{(4)}\neg\neg(B\to C)\to(B\to C)}\,(\to I)$$

は **MQC** の証明図となるため, **MQC**$\vdash \neg\neg A \to A$.

$A \equiv \forall xB$ のとき B は negative であり, 帰納法の仮定から $\mathbf{MQC} \vdash \neg\neg B \to B$. したがって

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$^{(3)}\neg\neg\forall xB$}
\AxiomC{$^{(2)}\neg B$}
\AxiomC{$^{(1)}\forall xB$}
\RightLabel{$(\forall E)$}
\UnaryInfC{B}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{$^{(1)}\neg\forall xB$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{$^{(2)}\neg\neg B$}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg\neg B \to B$}
\BinaryInfC{B}
\RightLabel{$(\forall I)$}
\UnaryInfC{$\forall xB$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{$^{(3)}\neg\neg\forall xB \to \forall xB$}
\end{prooftree}
$$

は $\mathbf{MQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{MQC} \vdash \neg\neg A \to A$.
□

ここで, 上の証明に現れた論理式 A に関する

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
A
\end{array}
$$

という記法は, conclusion が A, open assumption の集合が空であるような証明図を表す.

また, $\forall$-elimination の適用の際に代入する項として変数 x を, $\forall$-introduction の適用の際に導入する束縛変数として x をとっている ($B \equiv B[x/x]$ なので上のような証明図となる). 以降の証明図では, とくにことわりなくこれらの記法を使うことがある.

定義 3.2 (Negative translation) *Gödel-Gentzen の negative translation* ^{g} は以下のように帰納的に定義される.

$\bot$, 原子論理式 P (ただし P は $\bot$ とは異なる原子論理式) について

- $\bot^g := \bot$,
- $P^g := \neg\neg P$.

A, B を論理式とすると

- $(A \wedge B)^g := A^g \wedge B^g$,
- $(A \vee B)^g := \neg(\neg A^g \wedge \neg B^g)$,
- $(A \to B)^g := A^g \to B^g$,
- $(\forall xA)^g := \forall xA^g$,
- $(\exists xA)^g := \neg\forall x\neg A^g$.

命題 3.2 任意の論理式 A について, A^g は *negative*.

証明

論理式 A の複雑さに関する帰納法により証明する.

<u>Basis:</u>

$A \equiv \bot$ のとき $A^g \equiv \bot$ は negative.

$A \equiv P\ (\not\equiv \bot)$ のとき $A^g \equiv \neg\neg P$. 定義 3.1 より $\neg P$ は negative. したがって, 再び定義 3.1 より $A^g \equiv \neg\neg P \equiv \neg P \to \bot$ もまた negative.

<u>Induction steps:</u>

$A \equiv B \wedge C$ のとき $A^g \equiv B^g \wedge C^g$. 帰納法の仮定より B^g と C^g は negative, したがって定義 3.1 より A^g もまた negative.

$A \equiv B \to C$ のとき $A^g \equiv B^g \to C^g$. 帰納法の仮定より B^g と C^g は negative, したがって定義 3.1 より A^g もまた negative.

$A \equiv B \vee C$ のとき $A^g \equiv \neg(\neg B^g \wedge \neg C^g)$. 帰納法の仮定より B^g と C^g は negative, したがって定義 3.1 より $A^g \equiv (B^g \to \bot \wedge C^g \to \bot) \to \bot$ もまた negative.

$A \equiv \forall x B$ のとき $A^g \equiv \forall x B^g$. 帰納法の仮定より B^g は negative, したがって定義 3.1 より A^g もまた negative.

$A \equiv \exists x B$ のとき $A^g \equiv \neg\forall x \neg B^g$. 帰納法の仮定より B^g は negative, したがって定義 3.1 より $A^g \equiv \forall x(B^g \to \bot) \to \bot$ もまた negative.

□

命題 3.3 任意の論理式 A について, $\mathbf{MQC} \vdash \neg\neg A^g \to A^g$.

証明

命題 3.2 より A^g は negative であり, 命題 3.1 より $\mathbf{MQC} \vdash \neg\neg A^g \to A^g$.

□

3.2 negative translation による証明図の書き換え

定理 3.1 A を論理式, Γ を論理式の集合とし, $\Gamma^g := \{B^g | B \in \Gamma\}$ とすると,

$$\Gamma \vdash_c A \quad \text{ならば} \quad \Gamma^g \vdash_m A^g.$$

証明

$\Gamma \vdash_c A$ の証明図の高さに関する帰納法により証明する.

<u>Basis:</u>

証明図の高さが 0 の場合, すなわち $A \in \Gamma$ のとき, Γ^g の定義より $A^g \in \Gamma^g$. したがって $\Gamma^g \vdash_m A^g$.

<u>Induction steps:</u>

最後に適用した規則が $\wedge$-introduction の場合, すなわち $A \equiv B \wedge C$ で, conclusion が B, C, open assumption の集合が Γ_1, Γ_2 であるような **CQC** の証明図 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ があって

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ B & C\end{matrix}}{B \wedge C}$$

(ただし $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Gamma$) となっているとき, 帰納法の仮定から $\Gamma_1^g \vdash_m B^g$, $\Gamma_2^g \vdash_m C^g$. よって **MQC** の証明図 $\mathcal{D}_1^g$, $\mathcal{D}_2^g$ が存在して

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1^g & \mathcal{D}_2^g \\ B^g & C^g\end{matrix}}{B^g \wedge C^g}$$

もまた **MQC** の証明図となる. $\Gamma_1^g \cup \Gamma_2^g \subseteq \Gamma^g$ より, $\Gamma^g \vdash_m A^g$.

最後に適用した規則が $\wedge$-elimination の場合, すなわち $A \equiv A_i$ ($i = 1$ または 2) で, conclusion が $A_1 \wedge A_2$, open assumption の集合が Δ であるような **CQC** の証明図 $\mathcal{D}$ があって

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ A_1 \wedge A_2\end{matrix}}{A_i}$$

(ただし $\Delta \subseteq \Gamma$) となっているとき, 帰納法の仮定から $\Delta^g \vdash_m A_1^g \wedge A_2^g$. よって **MQC** の証明図 $\mathcal{D}^g$ が存在して

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}^g \\ A_1^g \wedge A_2^g\end{matrix}}{A_i^g}$$

もまた **MQC** の証明図となる. $\Delta^g \subseteq \Gamma^g$ より, $\Gamma^g \vdash_m A^g$.

最後に適用した規則が $\to$-introduction の場合, すなわち $A \equiv B \to C$ で, conclusion が C, open assumption の集合が Δ であるような **CQC** の証明図 $\mathcal{D}$ があって

$$\dfrac{\begin{matrix}[B] \\ \mathcal{D} \\ C\end{matrix}}{B \to C}$$

(ただし $\Delta \setminus \{B\} \subseteq \Gamma$) となっているとき, 帰納法の仮定から $\Delta^g \vdash_m C^g$. よって **MQC** の証明図 $\mathcal{D}^g$ が存在して

$$\dfrac{\begin{matrix}[{}^{(1)}B^g] \\ \mathcal{D}^g \\ C^g\end{matrix}}{{}^{(1)}B^g \to C^g}\ (\to I)$$

もまた **MQC** の証明図となる. $\Delta^g \setminus \{B^g\} \subseteq \Gamma^g$ より, $\Gamma^g \vdash_m A^g$.

最後に適用した規則が →-elimination の場合, すなわち conclusion が B, $B \to A$, open assumption の集合が Γ_1, Γ_2 であるような **CQC** の証明図 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ があって

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ B \to A\end{array}}{A}$$

(ただし $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Gamma$) となっているとき, 帰納法の仮定から $\Gamma_1^g \vdash_m B^g$, $\Gamma_2^g \vdash_m B^g \to A^g$. よって **MQC** の証明図 $\mathcal{D}_1^g$, $\mathcal{D}_2^g$ が存在して

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1^g\\ B^g\end{array} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2^g\\ B^g \to A^g\end{array}}{A^g}$$

もまた **MQC** の証明図となる. $\Gamma_1^g \cup \Gamma_2^g \subseteq \Gamma^g$ より, $\Gamma^g \vdash_m A^g$.

最後に適用した規則が ∨-introduction の場合, すなわち $A \equiv A_1 \vee A_2$ で, conclusion が A_i ($i = 1$ または 2), open assumption の集合が Δ であるような **CQC** の証明図 $\mathcal{D}$ があって

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ A_i\end{array}}{A_1 \vee A_2}$$

(ただし $\Delta \subseteq \Gamma$) となっているとき, 帰納法の仮定から $\Delta^g \vdash_m A_i^g$. よって **MQC** の証明図 $\mathcal{D}^g$ が存在して

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}\neg A_1^g \wedge \neg A_2^g}{\neg A_i^g} \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}^g\\ A_i^g\end{array}}{\bot}}{{}^{(1)}\neg(\neg A_1^g \wedge \neg A_2^g)}\,(\to I)$$

もまた **MQC** の証明図となる. $\Delta^g \subseteq \Gamma^g$ より, $\Gamma^g \vdash_m A^g$.

最後に適用した規則が ∨-elimination の場合, すなわち conclusion が $B \vee C$, A, A, open assumption の集合が Γ_1, Γ_2, Γ_3 であるような **CQC** の証明図 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ があって

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ B \vee C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ \mathcal{D}_2\\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}[C]\\ \mathcal{D}_3\\ A\end{array}}{A}$$

(ただし $\Gamma_1 \cup (\Gamma_2 \setminus \{B\}) \cup (\Gamma_3 \setminus \{C\}) \subseteq \Gamma$) となっているとき, 帰納法の仮定から $\Gamma_1^g \vdash_m \neg(\neg B^g \wedge \neg C^g)$, $\Gamma_2^g \vdash_m A^g$, $\Gamma_3^g \vdash_m A^g$. よって **MQC** の証明図 $\mathcal{D}_1^g$, $\mathcal{D}_2^g$, $\mathcal{D}_3^g$ が存在して

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1^g\\ \neg(\neg B^g \wedge \neg C^g)\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(3)}\neg A^g \quad \begin{array}{c}[{}^{(1)}B^g]\\ \mathcal{D}_2^g\\ A^g\end{array}}{\bot}}{{}^{(1)}\neg B^g}\,(\to I) \quad \dfrac{\dfrac{{}^{(3)}\neg A^g \quad \begin{array}{c}[{}^{(2)}C^g]\\ \mathcal{D}_3^g\\ A^g\end{array}}{\bot}}{{}^{(2)}\neg C^g}\,(\to I)}{\neg B^g \wedge \neg C^g}}{\bot}}{{}^{(3)}\neg\neg A^g}\,(\to I) \quad \begin{array}{c}\text{命題 3.3}\\ \vdots\\ \neg\neg A^g \to A^g\end{array}}{A^g}$$

もまた **MQC** の証明図となる. $\Gamma_1^g \cup (\Gamma_2^g \setminus \{B^g\}) \cup (\Gamma_2^g \setminus \{C^g\}) \subseteq \Gamma^g$ より, $\Gamma^g \vdash_m A^g$.

最後に適用した規則が $\forall$-introduction の場合, すなわち $A \equiv \forall y B[x/y]$ で, conclusion が B, open assumption の集合が Δ であるような **CQC** の証明図 $\mathcal{D}$ があって

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ B\end{array}}{\forall y B[x/y]}$$

(ただし $\Delta \subseteq \Gamma$, $x \notin FV(\Delta)$) となっているとき, 帰納法の仮定から $\Delta^g \vdash_m B^g$. よって **MQC** の証明図 $\mathcal{D}^g$ が存在し, $x \notin FV(\Delta^g)$ なので

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}^g\\ B^g\end{array}}{\forall y B^g[x/y]}$$

もまた **MQC** の証明図となる. $\forall y B^g[x/y] \equiv \forall B[x/y]^g$, $\Delta^g \subseteq \Gamma^g$ より, $\Gamma^g \vdash_m A^g$.

最後に適用した規則が $\forall$-elimination の場合, すなわち conclusion が $\forall x A$, open assumption の集合が Δ であるような **CQC** の証明図 $\mathcal{D}$ があって

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \forall x A\end{array}}{A[x/t]}$$

(ただし $\Delta \subseteq \Gamma$) となっているとき, 帰納法の仮定から $\Delta^g \vdash_m \forall x A^g$. よって **MQC** の証明図 $\mathcal{D}^g$ が存在して

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}^g\\ \forall x A^g\end{array}}{A^g[x/t]}$$

もまた **MQC** の証明図となる. $A^g[x/t] \equiv A[x/t]^g$, $\Delta^g \subseteq \Gamma^g$ より, $\Gamma^g \vdash_m A^g$.

最後に適用した規則が $\exists$-introduction の場合, すなわち $A \equiv \exists x B$ で, conclusion が B, open assumption の集合が Δ であるような **CQC** の証明図 $\mathcal{D}$ があって

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ B[x/t]\end{array}}{\exists x B}$$

(ただし $\Delta \subseteq \Gamma$) となっているとき, 帰納法の仮定から $\Delta^g \vdash_m B[x/t]^g$. よって **MQC** の証明図 $\mathcal{D}^g$ が存在し, $B[x/t]^g \equiv B^g[x/t]$ なので

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}\forall x \neg B^g}{\neg B^g[x/t]}\,(\forall E) \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}^g\\ B[x/t]^g\end{array}}{\bot}}{{}^{(1)}\neg\forall x \neg B^g}\,(\to I)$$

もまた **MQC** の証明図となる. $\Delta^g \subseteq \Gamma^g$ より, $\Gamma^g \vdash_m A^g$.

最後に適用した規則が $\exists$-elimination の場合, すなわち conclusion が $\exists y B[x/y]$, A, open assumption の集合が Γ_1, Γ_2 であるような **CQC** の証明図 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ があって

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \exists y B[x/y]\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \mathcal{D}_2\\ A\end{array}}{A}$$

(ただし $\Gamma_1 \cup (\Gamma_2 \setminus \{B\}) \subseteq \Gamma$, $x \notin FV(A) \cup \bigcup_{C \in \Gamma_2 \setminus \{B\}} FV(C))$ となっているとき, 帰納法の仮定から $\Gamma_1^g \vdash_m \neg\forall y \neg B[x/y]^g$, $\Gamma_2^g \vdash_m A^g$. よって **MQC** の証明図 $\mathcal{D}_1^g$, $\mathcal{D}_2^g$ が存在し, $x \notin FV(A^g) \cup \bigcup_{C \in \Gamma_2^g \setminus \{B^g\}} FV(C)$ かつ, $\forall y \neg B[x/y]^g \equiv \forall y \neg B^g[x/y]$ なので

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1^g\\ \neg\forall y \neg B[x/y]^g\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(2)}\neg A^g \qquad \begin{array}{c}[{}^{(1)}B^g]\\ \mathcal{D}_2^g\\ A^g\end{array}}{\bot}}{{}^{(1)}\neg B^g}\ (\to I)}{\forall y \neg B^g[x/y]}\ (\forall I)}{\bot}}{{}^{(2)}\neg\neg A^g}\ (\to I) \qquad \begin{array}{c}\text{命題 3.3}\\ \vdots\\ \neg\neg A^g \to A^g\end{array}}{A^g}$$

もまた **MQC** の証明図となる. $\Gamma_1^g \cup (\Gamma_2^g \setminus \{B^g\}) \subseteq \Gamma^g$ より, $\Gamma^g \vdash_m A^g$.

最後に適用した規則が classical absurdity の場合, すなわち conclusion が $\bot$, open assumption の集合が Δ であるような **CQC** の証明図 $\mathcal{D}$ があって

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{array}}{A}$$

(ただし $\Delta \setminus \{\neg A\} \subseteq \Gamma$) となっているとき, 帰納法の仮定から $\Delta^g \vdash_m \bot$. よって **MQC** の証明図 D^g が存在して

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[{}^{(1)}\neg A^g]\\ D^g\\ \bot\end{array}}{{}^{(1)}\neg\neg A^g}\ (\to I) \qquad \begin{array}{c}\text{命題 3.3}\\ \vdots\\ \neg\neg A^g \to A^g\end{array}}{A^g}$$

もまた **MQC** の証明図となる. $\Delta^g \setminus \{\neg A^g\} \subseteq \Gamma^g$ より, $\Gamma^g \vdash_m A^g$.

□

定義 3.3 論理式 A がみたす性質について以下のような定義を与える.

· A が *spreading* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ **MQC** $\vdash A \to A^g$.

・ A が *wiping* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbf{MQC} \vdash A^g \to A$.

・ A が *isolating* $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbf{MQC} \vdash A^g \to \neg\neg A$.

なお, **MQC** を**IQC** に置き換えると, それぞれ *I-spreading, I-wiping, I-isolating* という概念を同様に定義できる.

命題 3.4 論理式 A が *wiping* ならば A は *isolating.*
また, 論理式 A が *I-wiping* ならば A は *I-isolating.*

証明
A が wiping より, $\mathbf{MQC} \vdash A^g \to A$. したがって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{^{(1)}\neg A \quad \dfrac{^{(2)}A^g \quad \begin{array}{c}\mathbf{MQC}\\ \vdots \\ A^g \to A\end{array}}{A}}{\perp}}{^{(1)}\neg\neg A}\,(\to I)}{^{(2)}A^g \to \neg\neg A}\,(\to I)$$

は, **MQC** の証明図となるため $\mathbf{MQC} \vdash A^g \to \neg\neg A$. すなわち A は isolating.
また, **MQC** を **IQC** に, wiping を I-wiping に, spreading を I-spreading にそれぞれ置き換えることにより, A が I-wiping ならば A は I-isolating が示される.
□

定義 3.4 論理式の集合 Γ について,

$$\text{任意の } B \in \Gamma \text{ に対し } \Gamma \vdash_m B^g$$

となるとき Γ は g に関して **MQC** で閉じているという.
なお, **MQC** を**IQC** に置き換えても同様な概念が定義される.

定理 3.2 *wiping* な論理式 A と, g に関して **MQC** で閉じている論理式の集合 Γ について

$$\Gamma \vdash_c A \text{ ならば } \Gamma \vdash_m A.$$

また, **MQC** を **IQC** に, *wiping* を *I-wiping* にそれぞれ置き換えても同様なことが成り立つ.

証明
$\Gamma \vdash_c A$ なら, 定理 3.1 より $\Gamma^g \vdash_m A^g$. したがって, conclusion が A^g, open asssumption の集合が Γ^g の部分集合であるような **MQC** の証明図 $\mathcal{D}_m$ が存在する.

Γ は g に関して **MQC** で閉じているため, 任意の $B \in \Gamma$ について $\Gamma \vdash_m B^g$, すなわち conclusion が B^g, open assumption の集合が Γ の部分集合であるような **MQC** の証明図 $\mathcal{D}_m^B$ が存在する.

ここで, $\mathcal{D}_m$ のすべての open assumption B^g を $\mathcal{D}_m^B$ に置き換えると conclusion が A^g, open assumption の集合が Γ の部分集合であるような **MQC** の証明図 $\mathcal{D}'_m$ が得られる.

A は wiping なので $\mathbf{MQC} \vdash A^g \to A$ であり,

$$\dfrac{\begin{matrix} \mathcal{D}'_m \\ A^g \end{matrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{MQC} \\ \vdots \\ A^g \to A \end{matrix}}{A}$$

は conclusion が A, open assumption の集合が Γ の部分集合であるような **MQC** の証明図である. したがって, $\Gamma \vdash_m A$.

また, **MQC** を **IQC** に, wiping を I-wiping にそれぞれ置き換えることにより, $\Gamma \vdash_c A$ ならば $\Gamma \vdash_i A$ が示される.

□

3.3 論理式のクラスの構文論的な定義

定理 3.2 より, g に関して **MQC** で閉じている論理式の集合 Γ をとると, wiping な論理式の集合 $\mathcal{C}$ について $\mathbf{CQC} + \Gamma$ は $\mathbf{MQC} + \Gamma$ の保守的拡大であることがわかる (なお, **MQC** を **IQC** に wiping を I-wiping にそれぞれ置き換えると, $\mathbf{CQC} + \Gamma$ は $\mathbf{IQC} + \Gamma$ の保守的拡大であることがいえる).

この節では, g に関して **MQC** (**IQC**) で閉じている論理式の集合と, wiping (I-wiping) な論理式の集合を, そこに含まれる論理式の構文論的な形から定義する.

定義 3.5 論理式のクラス $\mathcal{S}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{I}$ を以下のように同時帰納的に定義する. ここで, P は $\bot$ とは異なる原子論理式, S, S_1, S_2 は $\mathcal{S}$ に属する論理式, W, W_1, W_2 は $\mathcal{W}$ に属する論理式, I, I_1, I_2 は $\mathcal{I}$ に属する論理式をそれぞれ表す.

- $\bot,\ P,\ S_1 \wedge S_2,\ S_1 \vee S_2,\ \forall x S,\ \exists x S,\ I \to S \in \mathcal{S}$,
- $\bot,\ W_1 \wedge W_2,\ \forall x W,\ S \to W \in \mathcal{W}$,
- $P,\ W,\ I_1 \wedge I_2,\ I_1 \vee I_2,\ \exists x I \in \mathcal{I}$.

命題 3.5 論理式 A について

- $A \in \mathcal{S}$ ならば A は *spreading.*
- $A \in \mathcal{W}$ ならば A は *wiping.*

・ $A \in \mathcal{I}$ ならば A は *isolating.*

証明

論理式 A の複雑さに関する同時帰納法により証明する.

Basis:

・ $A \equiv \bot$ のとき $A^g \equiv \bot$.

$\bot \in \mathcal{S}, \mathcal{W}$ であるが

$$\dfrac{{}^{(1)}\bot}{{}^{(1)}\bot \to \bot}\ (\to I)$$

は **MQC** の証明図となるため, $\mathbf{MQC} \vdash \bot \to \bot^g$ かつ $\mathbf{MQC} \vdash \bot^g \to \bot$. すなわち $\bot$ は spreading かつ wiping.

また $\bot \in \mathcal{I}$ であるが, 上の証明図から $\bot$ は wiping であり, 命題 3.4 より $\bot$ は isolating.

・ $A \equiv P\ (\not\equiv \bot)$ のとき $A^g \equiv \neg\neg P$.

$P \in \mathcal{S}$ であるが

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}\neg P \quad {}^{(2)}P}{\bot}}{{}^{(1)}\neg\neg P}\ (\to I)}{{}^{(2)}P \to \neg\neg P}\ (\to I)$$

は **MQC** の証明図となるため, $\mathbf{MQC} \vdash P \to P^g$. すなわち P は spreading.

定義 3.5 より $P \notin \mathcal{W}$.

$P \in \mathcal{I}$ であるが

$$\dfrac{{}^{(1)}\neg\neg P}{{}^{(1)}\neg\neg P \to \neg\neg P}\ (\to I)$$

は **MQC** の証明図となるため, $\mathbf{MQC} \vdash P^g \to \neg\neg P$. すなわち P は isolating.

Induction steps:

・ $A \equiv B \wedge C$ のとき $A^g \equiv B^g \wedge C^g$.

$A \in \mathcal{S}$ ならば定義 3.5 より $B, C \in \mathcal{S}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{MQC} \vdash B \to B^g$, $\mathbf{MQC} \vdash C \to C^g$. よって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}B \wedge C}{B} \quad \begin{matrix} I.H. \\ \vdots \\ B \to B^g \end{matrix}}{B^g} \quad \dfrac{\dfrac{{}^{(1)}B \wedge C}{C} \quad \begin{matrix} I.H. \\ \vdots \\ C \to C^g \end{matrix}}{C^g}}{B^g \wedge C^g}}{{}^{(1)}B \wedge C \to B^g \wedge C^g}\ (\to I)$$

は **MQC** の証明図となるため, $\mathbf{MQC} \vdash A \to A^g$. すなわち A は spreading.

$A \in \mathcal{W}$ ならば 定義 3.5 より $B, C \in \mathcal{W}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{MQC} \vdash B^g \to B$, $\mathbf{MQC} \vdash C^g \to C$. よって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}B^g \wedge C^g}{B^g} \quad \begin{matrix} I.H. \\ \vdots \\ B^g \to B \end{matrix}}{B} \quad \dfrac{\dfrac{{}^{(1)}B^g \wedge C^g}{C^g} \quad \begin{matrix} I.H. \\ \vdots \\ C^g \to C \end{matrix}}{C}}{B \wedge C}}{{}^{(1)}B^g \wedge C^g \to B \wedge C}\ (\to I)$$

は**MQC** の証明図となるため, **MQC** $\vdash A^g \to A$. すなわち A は wiping.

$A \in \mathcal{I}$ ならば定義 3.5 より $A \in \mathcal{W}$ または $B, C \in \mathcal{I}$.

$A \in \mathcal{W}$ であれば上の証明図から A は wiping であり, 命題 3.4 より A は isolating.

$B, C \in \mathcal{I}$ であれば帰納法の仮定から **MQC** $\vdash B^g \to \neg\neg B$, **MQC** $\vdash C^g \to \neg\neg C$. よって

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{${}^{(4)}B^g \wedge C^g$}
\UnaryInfC{B^g}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$B^g \to \neg\neg B$}
\BinaryInfC{$\neg\neg B$}
\AxiomC{${}^{(4)}B^g \wedge C^g$}
\UnaryInfC{C^g}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$C^g \to \neg\neg C$}
\BinaryInfC{$\neg\neg C$}
\AxiomC{${}^{(3)}\neg(B \wedge C)$}
\AxiomC{${}^{(2)}B$}
\AxiomC{${}^{(1)}C$}
\BinaryInfC{$B \wedge C$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(1)}\neg C$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(2)}\neg B$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(3)}\neg\neg(B \wedge C)$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(4)}B^g \wedge C^g \to \neg\neg(B \wedge C)$}
\end{prooftree}
$$

は**MQC** の証明図となるため, **MQC** $\vdash A^g \to \neg\neg A$. すなわち A は isolating.

$\cdot$ $A \equiv B \to C$ のとき $A^g \equiv B^g \to C^g$.

$A \in \mathcal{S}$ ならば 定義 3.5 より $B \in \mathcal{I}$, $C \in \mathcal{S}$ で, 帰納法の仮定から **MQC** $\vdash B^g \to \neg\neg B$, **MQC** $\vdash C \to C^g$. よって

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{${}^{(3)}B^g$}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$B^g \to \neg\neg B$}
\BinaryInfC{$\neg\neg B$}
\AxiomC{${}^{(2)}\neg C^g$}
\AxiomC{${}^{(1)}B$}
\AxiomC{${}^{(4)}B \to C$}
\BinaryInfC{C}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$C \to C^g$}
\BinaryInfC{C^g}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(1)}\neg B$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(2)}\neg\neg C^g$}
\AxiomC{命題 3.3}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg\neg C^g \to C^g$}
\BinaryInfC{C^g}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(3)}B^g \to C^g$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(4)}(B \to C) \to (B^g \to C^g)$}
\end{prooftree}
$$

は**MQC** の証明図となるため, **MQC** $\vdash A \to A^g$. すなわち A は spreading.

$A \in \mathcal{W}$ ならば定義 3.5 より $B \in \mathcal{S}$, $C \in \mathcal{W}$ で, 帰納法の仮定から **MQC** $\vdash B \to B^g$, **MQC** $\vdash C^g \to C$. よって

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{${}^{(1)}B$}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$B \to B^g$}
\BinaryInfC{B^g}
\AxiomC{${}^{(2)}B^g \to C^g$}
\BinaryInfC{C^g}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$C^g \to C$}
\BinaryInfC{C}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(1)}B \to C$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(2)}(B^g \to C^g) \to (B \to C)$}
\end{prooftree}
$$

は**MQC** の証明図となるため, **MQC** $\vdash A^g \to A$. すなわち A は wiping.

$A \in \mathcal{I}$ ならば定義 3.5 より $A \in \mathcal{W}$ で, 上の証明図から A は wiping であり命題 3.4 より A は isolating.

$\cdot$ $A \equiv B \lor C$ のとき $A^g \equiv \neg(\neg B^g \land \neg C^g)$.

$A \in \mathcal{S}$ ならば定義 3.5 より $B, C \in \mathcal{S}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{MQC} \vdash B \to B^g$, $\mathbf{MQC} \vdash C \to C^g$. よって

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{${}^{(3)}B \lor C$}
\AxiomC{${}^{(2)}\neg B^g \land \neg C^g$}
\UnaryInfC{$\neg B^g$}
\AxiomC{${}^{(1)}B$}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$B \to B^g$}
\BinaryInfC{B^g}
\BinaryInfC{$\bot$}
\AxiomC{${}^{(2)}\neg B^g \land \neg C^g$}
\UnaryInfC{$\neg C^g$}
\AxiomC{${}^{(1)}C$}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$C \to C^g$}
\BinaryInfC{C^g}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\lor E)$}
\TrinaryInfC{${}^{(1)}\bot$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(2)}\neg(\neg B^g \land \neg C^g)$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(3)}B \lor C \to \neg(\neg B^g \land \neg C^g)$}
\end{prooftree}
$$

は $\mathbf{MQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{MQC} \vdash A \to A^g$. すなわち A は spreading.

定義 3.5 より $A \notin \mathcal{W}$.

$A \in \mathcal{I}$ ならば定義 3.5 より $B, C \in \mathcal{I}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{MQC} \vdash B^g \to \neg\neg B$, $\mathbf{MQC} \vdash C^g \to \neg\neg C$. よって

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{${}^{(6)}\neg(\neg B^g \land \neg C^g)$}
\AxiomC{${}^{(2)}B^g$}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$B^g \to \neg\neg B$}
\BinaryInfC{$\neg\neg B$}
\AxiomC{${}^{(5)}\neg(B \lor C)$}
\AxiomC{${}^{(1)}B$}
\UnaryInfC{$B \lor C$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(1)}\neg B$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(2)}\neg B^g$}
\AxiomC{${}^{(4)}C^g$}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$C^g \to \neg\neg C$}
\BinaryInfC{$\neg\neg C$}
\AxiomC{${}^{(5)}\neg(B \lor C)$}
\AxiomC{${}^{(3)}C$}
\UnaryInfC{$B \lor C$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(3)}\neg C$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(4)}\neg C^g$}
\BinaryInfC{$\neg B^g \land \neg C^g$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(5)}\neg\neg(B \lor C)$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(6)}\neg(\neg B^g \land \neg C^g) \to \neg\neg(B \lor C)$}
\end{prooftree}
$$

は $\mathbf{MQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{MQC} \vdash A^g \to \neg\neg A$. すなわち A は isolating.

$\cdot$ $A \equiv \forall x B$ のとき $A^g \equiv \forall x B^g$.

$A \in \mathcal{S}$ ならば定義 3.5 より $B \in \mathcal{S}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{MQC} \vdash B \to B^g$. よって

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{${}^{(1)}\forall x B$}
\UnaryInfC{B}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$B \to B^g$}
\BinaryInfC{B^g}
\RightLabel{$(\forall I)$}
\UnaryInfC{$\forall x B^g$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(1)}\forall x B \to \forall x B^g$}
\end{prooftree}
$$

は $\mathbf{MQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{MQC} \vdash A \to A^g$. すなわち A は spreading.

$A \in \mathcal{W}$ ならば定義 3.5 より $B \in \mathcal{W}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{MQC} \vdash B^g \to B$. よって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}\forall x B^g}{B^g} \qquad \begin{array}{c} I.H. \\ \vdots \\ B^g \to B \end{array}}{B}}{\forall x B}\,(\forall I)}{{}^{(1)}\forall x B^g \to \forall x B}\,(\to I)$$

は $\mathbf{MQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{MQC} \vdash A^g \to A$. すなわち A は wiping.

$A \in \mathcal{I}$ ならば定義 3.5 より $A \in \mathcal{W}$ で, 上の証明図から A は wiping であり命題 3.4 より A は isolating.

$\cdot$ $A \equiv \exists x B$ のとき $A^g \equiv \neg\forall x \neg B^g$.

$A \in \mathcal{S}$ ならば定義 3.5 より $B \in \mathcal{S}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{MQC} \vdash B \to B^g$. よって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(3)}\exists x B \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(2)}\forall x \neg B^g}{\neg B^g} \qquad \dfrac{{}^{(1)}B \qquad \begin{array}{c} I.H. \\ \vdots \\ B \to B^g \end{array}}{B^g}}{\bot}}{{}^{(1)}\bot}\,(\exists E)}{{}^{(2)}\neg\forall x \neg B^g}\,(\to I)}{{}^{(3)}\exists x B \to \neg\forall x \neg B^g}\,(\to I)$$

は $\mathbf{MQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{MQC} \vdash A \to A^g$. すなわち A は spreading.

定義 3.5 から $A \notin \mathcal{W}$.

$A \in \mathcal{I}$ ならば定義 3.5 より $B \in \mathcal{I}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{MQC} \vdash B^g \to \neg\neg B$. よって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(4)}\neg\forall x \neg B^g \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(2)}B^g \qquad \begin{array}{c} I.H. \\ \vdots \\ B^g \to \neg\neg B \end{array}}{\neg\neg B} \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(3)}\neg\exists x B \qquad \dfrac{{}^{(1)}B}{\exists x B}}{\bot}}{{}^{(1)}\neg B}\,(\to I)}{\bot}}{{}^{(2)}\neg B^g}\,(\to I)}{\forall x \neg B^g}\,(\forall I)}{\bot}}{{}^{(3)}\neg\neg\exists x B}\,(\to I)}{{}^{(4)}\neg\forall x \neg B^g \to \neg\neg\exists x B}\,(\to I)$$

は $\mathbf{MQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{MQC} \vdash A^g \to \neg\neg A$. すなわち A は isolating.

$\square$

定理 3.3 任意の $A \in \mathcal{W}$ と, ^{g} に関して $\mathbf{MQC}$ で閉じている論理式の集合 Γ について

$$\Gamma \vdash_c A \ \text{ならば}\ \Gamma \vdash_m A$$

すなわち, $\mathcal{W}$ について $\mathbf{CQC} + \Gamma$ は $\mathbf{MQC} + \Gamma$ の保守的拡大となる.

証明

$A \in \mathcal{W}$ なら A は wiping であり, 定理 3.2 より明らか.

□

注 なお, $\mathcal{S}$ は ^{g} に関して **MQC** で閉じている論理式の集合の一例となっている.

定義 3.6 論理式のクラス $\mathcal{S}_i$, $\mathcal{W}_i$, $\mathcal{I}_i$ を以下のように同時帰納的に定義する. ここで, P は $\bot$ とは異なる原子論理式, S, S_1, S_2 は $\mathcal{S}_i$ に属する論理式, W, W_1, W_2 は $\mathcal{W}_i$ に属する論理式, I, I_1, I_2 は $\mathcal{I}_i$ に属する論理式をそれぞれ表す.

- $\bot,\ P,\ S_1 \wedge S_2,\ S_1 \vee S_2,\ \forall x S,\ \exists x S,\ I \to S \in \mathcal{S}_i,$
- $\bot,\ W_1 \wedge W_2,\ \forall x W,\ S \to W \in \mathcal{W}_i,$
- $P,\ W,\ I_1 \wedge I_2,\ I_1 \vee I_2,\ \exists x I,\ S \to I \in \mathcal{I}_i.$

なお, 定義 3.5 とは $\mathcal{I}_i$ の要素に $S \to I$ を追加した点のみが異なる.

命題 3.6 論理式 A について

- $A \in \mathcal{S}_i$ ならば A は *I-spreading.*
- $A \in \mathcal{W}_i$ ならば A は *I-wiping.*
- $A \in \mathcal{I}_i$ ならば A は *I-isolating.*

証明

命題 3.5 の証明と同様に A の複雑さに関する同時帰納法により証明するが, $A \equiv B \to C$ で, $A \in \mathcal{I}_i$ かつ $A \notin \mathcal{W}_i$ の場合についてのみ調べればよい.

その他の場合は命題 3.5 の証明の **MQC**, spreading, wiping, isolating をそれぞれ **IQC**, I-spreading, I-wiping, I-isolating に置き換えることで得られる.

$A \equiv B \to C$ で, $A \in \mathcal{I}_i$ かつ $A \notin \mathcal{W}_i$ の場合, 定義 3.6 より $B \in \mathcal{S}_i$, $C \in \mathcal{I}_i$. 帰納法の仮定から $\mathbf{IQC} \vdash B \to B^g$, $\mathbf{IQC} \vdash C^g \to \neg\neg C$. よって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(4)}\neg(B \to C) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(2)}\neg B^g \qquad \dfrac{{}^{(1)}B \qquad \begin{array}{c} I.H. \\ \vdots \\ B \to B^g \end{array}}{B^g}}{\bot}}{C}\,(\bot_i)}{{}^{(1)}B \to C}\,(\to I)}{\bot}}{{}^{(2)}\neg\neg B^g}\,(\to I) \qquad \begin{array}{c} \text{命題 3.3} \\ \vdots \\ \neg\neg B^g \to B^g \end{array}}{B^g} \qquad {}^{(5)}B^g \to C^g}{C^g} \qquad \begin{array}{c} I.H. \\ \vdots \\ C^g \to \neg\neg C \end{array}}{\neg\neg C} \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(4)}\neg(B \to C) \qquad \dfrac{{}^{(3)}C}{B \to C}}{\bot}}{{}^{(3)}\neg C}\,(\to I)}{\bot}}{{}^{(4)}\neg\neg(B \to C)}\,(\to I)}{{}^{(5)}(B^g \to C^g) \to \neg\neg(B \to C)}\,(\to I)$$

は**IQC**の証明図となるため, **MQC** $\vdash A^g \to \neg\neg A$. すなわち A は I-isolating.
□

定理 3.4 任意の $A \in \mathcal{W}_i$ と, ^{g} に関して**IQC**で閉じている論理式の集合 Γ について

$$\Gamma \vdash_c A \text{ ならば } \Gamma \vdash_i A$$

すなわち, $\mathcal{W}_i$ について **CQC** $+ \Gamma$ は **IQC** $+ \Gamma$ の保守的拡大となる.

証明

$A \in \mathcal{W}_i$ なら A は I-wiping であり, 定理 3.2 より明らか.
□

注 なお, $\mathcal{S}_\rangle$ は ^{g} に関して**IQC**で閉じている論理式の集合の一例となっている.

第4章　\$-translationに基づくクラス定義

この章では述語論理の言語に place holder を追加して schema を考え, negative translation の変種の \$-translation を論理式から schema への変換として定義する. \$-translation による証明図の書き換えを用いて, **CQC** が **IQC** の保守的拡大となるような論理式のクラスを, そこに含まれる論理式の構文論的な形により定義できることをみる.

4.1　schema

定義 4.1 (schema) 述語論理の言語に *place holder* $\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots$ を追加し, *schema* を以下のように帰納的に定義する.

- 任意の論理式は *schema* である.
- *place holder* $\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots$ はすべて *schema* である.
- $A,\ B$ を *schema*, x を変数とすると

$$A \wedge B, \quad A \vee B, \quad A \to B, \quad \forall x A, \quad \exists x A$$

　はすべて *schema* である.

また, *place holder* を命題変数と同じように扱うことで, *schema* に対する **MQC**, **IQC**, **CQC** の証明図がそれぞれ定義できる.

定義 4.2 (論理式の place holder への代入) A を論理式, ρ を *place holder* とする.
schema における A の ρ への代入を以下のように帰納的に定義する.

B を論理式, σ を *place holder* とする.

- $B[\rho/A] := B.$
- $\sigma[\rho/A] := \begin{cases} A & (\sigma \equiv \rho \text{ の場合}) \\ \sigma & (\sigma \not\equiv \rho \text{ の場合}). \end{cases}$

$C,\ D$ を *schema*, $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$, $Q \in \{\forall, \exists\}$, x を変数とする.

- $(C \circ D)[\rho/A] := C[\rho/A] \circ D[\rho/A].$
- $(QxC)[\rho/A] := QxC[\rho/A].$

4.2 $-translation

定義 4.3 ($-translation) 論理式から *schema* への変換 $-*translation* $^\$$ を以下のように帰納的に定義する. ただし $ は *place holder* で, $\neg_\$ A \equiv A \to \$$ とする.

$\bot$, 原子論理式 P (ただし P は $\bot$ とは異なる原子論理式) について

- $\bot^\$:= \$$,
- $P^\$:= \neg_\$\neg_\$ P$.

A, B を論理式とすると

- $(A \land B)^\$:= A^\$ \land B^\$$,
- $(A \lor B)^\$:= \neg_\$\neg_\$(A^\$ \lor B^\$)$,
- $(A \to B)^\$:= A^\$ \to B^\$$,
- $(\forall x A)^\$:= \forall x A^\$$,
- $(\exists x A)^\$:= \neg_\$\neg_\$ \exists x A^\$$.

命題 4.1 任意の論理式 A について, $\mathbf{MQC} \vdash A^\$[\$/\bot] \leftrightarrow A^g$.

証明

論理式 A の複雑さに関する帰納法により証明する.

Basis:

$\cdot A \equiv \bot$ のとき $A^\$ \equiv \$,\ A^g \equiv \bot$.

この場合, $A^\$[\$/\bot] \equiv \bot$ であり,

$$\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}\bot}{{}^{(1)}\bot \to \bot}\,(\to I) \qquad \dfrac{{}^{(2)}\bot}{{}^{(2)}\bot \to \bot}\,(\to I)}{(\bot \to \bot) \land (\bot \to \bot)}$$

は $\mathbf{MQC}$ の証明図なので $\mathbf{MQC} \vdash A^\$[\$/\bot] \leftrightarrow A^g$.

$\cdot A \equiv P\ (\not\equiv \bot)$ のとき $A^\$ \equiv \neg_\$\neg_\$ P,\ A^g \equiv \neg\neg P$.

この場合, $A^\$[\$/\bot] \equiv \neg\neg P$ であり,

$$\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}\neg\neg P}{{}^{(1)}\neg\neg P \to \neg\neg P}\,(\to I) \qquad \dfrac{{}^{(2)}\neg\neg P}{{}^{(2)}\neg\neg P \to \neg\neg P}\,(\to I)}{(\neg\neg P \to \neg\neg P) \to (\neg\neg P \to \neg\neg P)}$$

は $\mathbf{MQC}$ の証明図なので $\mathbf{MQC} \vdash A^\$[\$/\bot] \leftrightarrow A^g$.

Induction steps:

$\cdot A \equiv B \land C$ のとき $A^\$ \equiv B^\$ \land C^\$,\ A^g \equiv B^g \land C^g$.

帰納法の仮定から $\mathbf{MQC}\vdash B^{\$}[\$/\bot]\leftrightarrow B^g$ かつ, $\mathbf{MQC}\vdash C^{\$}[\$/\bot]\leftrightarrow C^g$. したがって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}B^{\$}[\$/\bot]\wedge C^{\$}[\$/\bot]}{B^{\$}[\$/\bot]} \quad \dfrac{\begin{matrix} I.H. \\ \vdots \\ B^{\$}[\$/\bot]\leftrightarrow B^g\end{matrix}}{B^{\$}[\$/\bot]\to B^g}\,(\wedge E)}{B^g} \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(1)}B^{\$}[\$/\bot]\wedge C^{\$}[\$/\bot]}{C^{\$}[\$/\bot]} \quad \dfrac{\begin{matrix} I.H. \\ \vdots \\ C^{\$}[\$/\bot]\leftrightarrow C^g\end{matrix}}{C^{\$}[\$/\bot]\to C^g}\,(\wedge E)}{C^g}}{B^g\wedge C^g}}{{}^{(1)}B^{\$}[\$/\bot]\wedge C^{\$}[\$/\bot]\to B^g\wedge C^g}\,(\to I)$$

は $\mathbf{MQC}$ の証明図, また

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}B^g\wedge C^g}{B^g} \quad \dfrac{\begin{matrix} I.H. \\ \vdots \\ B^{\$}[\$/\bot]\leftrightarrow B^g\end{matrix}}{B^g\to B^{\$}[\$/\bot]}\,(\wedge E)}{B^{\$}[\$/\bot]} \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(1)}B^g\wedge C^g}{C^g} \quad \dfrac{\begin{matrix} I.H. \\ \vdots \\ C^{\$}[\$/\bot]\leftrightarrow C^g\end{matrix}}{C^g\to C^{\$}[\$/\bot]}\,(\wedge E)}{C^{\$}[\$/\bot]}}{B^{\$}[\$/\bot]\wedge C^{\$}[\$/\bot]}}{{}^{(1)}B^g\wedge C^g\to B^{\$}[\$/\bot]\wedge C^{\$}[\$/\bot]}\,(\to I)$$

もまた $\mathbf{MQC}$ の証明図で, これらの証明図に $\wedge I$ を適用したものも $\mathbf{MQC}$ の証明図なので $\mathbf{MQC}\vdash A^{\$}[\$/\bot]\leftrightarrow A^g$.

$\cdot A\equiv B\to C$ のとき $A^{\$}\equiv B^{\$}\to C^{\$},\ A^g\equiv B^g\to C^g$.

帰納法の仮定から $\mathbf{MQC}\vdash B^{\$}[\$/\bot]\leftrightarrow B^g$ かつ, $\mathbf{MQC}\vdash C^{\$}[\$/\bot]\leftrightarrow C^g$. したがって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}B^g \quad \dfrac{\begin{matrix} I.H. \\ \vdots \\ B^{\$}[\$/\bot]\leftrightarrow B^g\end{matrix}}{B^g\to B^{\$}[\$/\bot]}\,(\wedge E)}{B^{\$}[\$/\bot]} \quad {}^{(2)}B^{\$}[\$/\bot]\to C^{\$}[\$/\bot]}{C^{\$}[\$/\bot]} \quad \dfrac{\begin{matrix} I.H. \\ \vdots \\ C^{\$}[\$/\bot]\leftrightarrow C^g\end{matrix}}{C^{\$}[\$/\bot]\to C^g}\,(\wedge E)}{\dfrac{C^g}{{}^{(1)}B^g\to C^g}\,(\to I)}}{{}^{(2)}(B^{\$}[\$/\bot]\to C^{\$}[\$/\bot])\to(B^g\to C^g)}\,(\to I)$$

は $\mathbf{MQC}$ の証明図. また

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}B^{\$}[\$/\bot] \quad \dfrac{\begin{matrix} I.H. \\ \vdots \\ B^{\$}[\$/\bot]\leftrightarrow B^g\end{matrix}}{B^{\$}[\$/\bot]\to B^g}\,(\wedge E)}{B^g} \quad {}^{(2)}B^g\to C^g}{C^g} \quad \dfrac{\begin{matrix} I.H. \\ \vdots \\ C^{\$}[\$/\bot]\leftrightarrow C^g\end{matrix}}{C^g\to C^{\$}[\$/\bot]}\,(\wedge E)}{\dfrac{C^{\$}[\$/\bot]}{{}^{(1)}B^{\$}[\$/\bot]\to C^{\$}[\$/\bot]}\,(\to I)}}{{}^{(2)}(B^g\to C^g)\to(B^{\$}[\$/\bot]\to C^{\$}[\$/\bot])}\,(\to I)$$

もまた**MQC**の証明図で, これらの証明図に $\wedge I$ を適用したものも**MQC**の証明図なので $\mathbf{MQC} \vdash A^{\$}[\$/\bot] \leftrightarrow A^g$.

$\cdot A \equiv B \vee C$ のとき $A^{\$} \equiv \neg_{\$}\neg_{\$}(B^{\$} \vee C^{\$}),\ A^g \equiv \neg(\neg B^g \wedge \neg C^g)$.

帰納法の仮定から $\mathbf{MQC} \vdash B^{\$}[\$/\bot] \leftrightarrow B^g$ かつ, $\mathbf{MQC} \vdash C^{\$}[\$/\bot] \leftrightarrow C^g$. したがって

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      {}^{(4)}\neg\neg(B^{\$}[\$/\bot]\vee C^{\$}[\$/\bot])
      \quad
      \dfrac{
        \dfrac{
          {}^{(2)}B^{\$}[\$/\bot]\vee C^{\$}[\$/\bot]
          \quad
          \dfrac{\dfrac{{}^{(3)}\neg B^g\wedge\neg C^g}{\neg B^g}\quad\dfrac{{}^{(1)}B^{\$}[\$/\bot]\quad\dfrac{\begin{matrix}I.H.\\ \vdots\\ B^{\$}[\$/\bot]\leftrightarrow B^g\end{matrix}}{B^{\$}[\$/\bot]\to B^g}\;{\scriptstyle(\wedge E)}}{B^g}}{\bot}
          \quad
          \begin{matrix}[{}^{(3)}\neg B^g\wedge\neg C^g]\\ [{}^{(1)}C^{\$}[\$/\bot]]\\ \mathcal{D}_C\\ \bot\end{matrix}
        }{{}^{(1)}\bot}\;{\scriptstyle(\vee E)}
      }{{}^{(2)}\neg(B^{\$}[\$/\bot]\vee C^{\$}[\$/\bot])}\;{\scriptstyle(\to I)}
    }{\bot}
  }{{}^{(3)}\neg(\neg B^g\wedge\neg C^g)}\;{\scriptstyle(\to I)}
}{{}^{(4)}\neg\neg(B^{\$}[\$/\bot]\vee C^{\$}[\$/\bot])\to\neg(\neg B^g\wedge\neg C^g)}\;{\scriptstyle(\to I)}
$$

(ただし $\mathcal{D}_C$ は $\vee E$ の適用で用いるもう一つの $\bot$ を導く証明図の B と C を互いに置き換えたもの) は**MQC**の証明図となる. また,

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      {}^{(4)}\neg(\neg B^g\wedge\neg C^g)
      \quad
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{
            {}^{(3)}\neg(B^{\$}[\$/\bot]\vee C^{\$}[\$/\bot])
            \quad
            \dfrac{\dfrac{{}^{(1)}B^g\quad\dfrac{\begin{matrix}I.H.\\ \vdots\\ B^{\$}[\$/\bot]\leftrightarrow B^g\end{matrix}}{B^g\to B^{\$}[\$/\bot]}\;{\scriptstyle(\wedge E)}}{B^{\$}[\$/\bot]}}{B^{\$}[\$/\bot]\vee C^{\$}[\$/\bot]}
          }{\bot}
        }{{}^{(1)}\neg B^g}\;{\scriptstyle(\to I)}
        \quad
        \begin{matrix}[{}^{(3)}\neg(B^{\$}[\$/\bot]\vee C^{\$}[\$/\bot])]\\ [{}^{(2)}C^g]\\ \mathcal{D}_C\\ {}^{(2)}\neg C^g\end{matrix}
      }{\neg B^g\wedge\neg C^g}
    }{\bot}
  }{{}^{(3)}\neg\neg(B^{\$}[\$/\bot]\vee C^{\$}[\$/\bot])}\;{\scriptstyle(\to I)}
}{{}^{(4)}\neg(\neg B^g\wedge\neg C^g)\to\neg\neg(B^{\$}[\$/\bot]\vee C^{\$}[\$/\bot])}\;{\scriptstyle(\to I)}
$$

(ただし $\mathcal{D}_C$ は $\wedge I$ の適用で用いる $\neg B^g$ を導く証明図の B と C を互いに置き換えたもの) もまた**MQC**の証明図で, これらの証明図に $\wedge I$ を適用したものも**MQC**の証明図なので $\mathbf{MQC} \vdash A^{\$}[\$/\bot] \leftrightarrow A^g$.

$\cdot A \equiv \forall x B$ のとき $A^{\$} \equiv \forall x B^{\$},\ A^g \equiv \forall x B^g$.

帰納法の仮定から $\mathbf{MQC} \vdash B^{\$}[\$/\bot] \leftrightarrow B^g$. したがって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}\forall x B^{\$}[\$/\bot]}{B^{\$}[\$/\bot]} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} I.H. \\ \vdots \\ B^{\$}[\$/\bot] \leftrightarrow B^g \end{array}}{B^{\$}[\$/\bot] \to B^g}\,(\wedge E)}{B^g}}{\forall x B^g}\,(\forall I)}{{}^{(1)}\forall x B^{\$}[\$/\bot] \to \forall x B^g}\,(\to I)$$

は $\mathbf{MQC}$ の証明図, また

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}\forall x B^g}{B^g} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} I.H. \\ \vdots \\ B^{\$}[\$/\bot] \leftrightarrow B^g \end{array}}{B^g \to B^{\$}[\$/\bot]}\,(\wedge E)}{B^{\$}[\$/\bot]}}{\forall x B^{\$}[\$/\bot]}\,(\forall I)}{{}^{(1)}\forall x B^g \to \forall x B^{\$}[\$/\bot]}\,(\to I)$$

もまた $\mathbf{MQC}$ の証明図で, これらの証明図に $\wedge I$ を適用したものも $\mathbf{MQC}$ の証明図なので $\mathbf{MQC} \vdash A^{\$}[\$/\bot] \leftrightarrow A^g$.

$\cdot A \equiv \exists x B$ のとき $A^{\$} \equiv \neg_{\$}\neg_{\$}\exists x B^{\$}$, $A^g \equiv \neg\forall x \neg B^g$.

帰納法の仮定から $\mathbf{MQC} \vdash B^{\$}[\$/\bot] \leftrightarrow B^g$. したがって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(4)}\neg\neg\exists x B^{\$}[\$/\bot] \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(2)}\exists x B^{\$}[\$/\bot] \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(3)}\forall x \neg B^g}{\neg B^g} \qquad \dfrac{{}^{(1)}B^{\$}[\$/\bot] \qquad \dfrac{\begin{array}{c} I.H. \\ \vdots \\ B^{\$}[\$/\bot] \leftrightarrow B^g \end{array}}{B^{\$}[\$/\bot] \to B^g}\,(\wedge E)}{B^g}}{\bot}}{{}^{(1)}\bot}\,(\exists E)}{{}^{(2)}\neg\exists x B^{\$}[\$/\bot]}\,(\to I)}{\bot}}{{}^{(3)}\neg\forall x \neg B^g}\,(\to I)}{{}^{(4)}\neg\neg\exists x B^{\$}[\$/\bot] \to \neg\forall x \neg B^g}\,(\to I)$$

は**MQC**の証明図となる．また，

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(4)}\neg\forall x\neg B^g \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(3)}\neg\exists x B^{\$}[\$/\bot] \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(1)}B^g \qquad \dfrac{\begin{matrix} I.H. \\ \vdots \\ B^{\$}[\$/\bot] \leftrightarrow B^g \end{matrix}}{B^g \to B^{\$}[\$/\bot]}\,(\wedge E)}{B^{\$}[\$/\bot]}}{\exists x B^{\$}[\$/\bot]}}{\bot}}{{}^{(1)}\neg B^g}\,(\to I)}{\forall x \neg B^g}}{\bot}}{{}^{(3)}\neg\neg\exists x B^{\$}[\$/\bot]}\,(\to I)}{{}^{(4)}\neg\forall x\neg B^g \to \neg\neg\exists x B^{\$}[\$/\bot]}\,(\to I)
$$

もまた**MQC**の証明図で，これらの証明図に $\wedge I$ を適用したものも**MQC**の証明図なので**MQC** $\vdash A^{\$}[\$/\bot] \leftrightarrow A^g$.
□

4.3 $\$$-translation による証明図の書き換え

定理 4.1 A を論理式，Γ を論理式の集合とし，$\Gamma^{\$} := \{B^{\$} | B \in \Gamma\}$ とすると，

$$\Gamma^g \vdash_m A^g \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma^{\$} \vdash_m A^{\$}.$$

証明

まず，$\Leftarrow$ を示す．

$\Gamma^{\$} \vdash_m A^{\$}$ ならば conclusion が $A^{\$}$, open assumption の集合が $\Gamma^{\$}$ の部分集合であるような**MQC**の証明図 $\mathcal{D}$ が存在し，$\mathcal{D}$ に現れるすべての $\$$ に $\bot$ を代入した $\mathcal{D}[\$/\bot]$ も**MQC**の証明図となる．

命題 4.1 より $\Gamma^{\$}$ の任意の元 $B^{\$}$ について次のような**MQC**の証明図

$$
\dfrac{B^g \qquad \begin{matrix} \text{命題 4.1} \\ \vdots \\ B^g \to B^{\$}[\$/\bot] \end{matrix}}{B^{\$}[\$/\bot]}
$$

が作れるが，$\mathcal{D}[\$/\bot]$ のすべての open assumption $B^{\$}[\$/\bot]$ をこれらの証明図で置き換えたものを $\mathcal{D}'[\$/\bot]$ とすると，$\mathcal{D}'[\$/\bot]$ はconclusion が $A^{\$}[\$/\bot]$, open assumption の集合が Γ^g の部分集合であるような**MQC**の証明図となる．

したがって

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}'[\$/\bot] & \text{命題 4.1} \\ & \vdots \\ A^{\$}[\$/\bot] & A^{\$}[\$/\bot] \to A^g\end{array}}{A^g}$$

もまた **MQC** の証明図となる．すなわち $\Gamma^g \vdash_m A^g$.

つぎに, $\Rightarrow$ を示す.

命題 4.1 より, conclusion が $A^{\$}[\$/\bot] \leftrightarrow A^g$, open assumption の集合が空であるような **MQC** の証明図 $\mathcal{D}$ が存在する.

MQC の証明図の中で $\bot$ は他の命題変数や place holder とまったく同様に取り扱われるため, $\mathcal{D}$ に現れるすべての $\bot$ を \$ で置き換えたものも **MQC** の証明図となる．これを $\mathcal{D}[\bot/\$]$ と書くことにする.

論理式 B に現れるすべての $\bot$ を \$ で置き換えて得られる schema を $B[\bot/\$]$ と表すことにすると $\mathcal{D}[\bot/\$]$ の conclusion は

$$(A^{\$}[\$/\bot] \leftrightarrow \ A^g)[\bot/\$] \ \ \equiv \ \ (A^{\$}[\$/\bot])[\bot/\$] \leftrightarrow A^g[\bot/\$] \ \ \equiv \ \ A^{\$} \leftrightarrow A^g[\bot/\$]$$

となるので, $\mathbf{MQC} \vdash A^{\$} \leftrightarrow A^g[\bot/\$]$ となる．命題 4.1 の代わりにこれを用いると, $\Leftarrow$ の証明の $\bot, {}^g$, $\$, {}^{\$}$ をそれぞれ $\$, {}^{\$}$, $\bot, {}^g$ で置き換えることで $\Gamma^g \vdash_m A^g \Rightarrow \Gamma^{\$} \vdash_m A^{\$}$ の証明が得られる.

□

系 4.1 任意の論理式 A について, $\mathbf{MQC} \vdash \neg_{\$}\neg_{\$}A^{\$} \to A^{\$}$

証明

命題 3.3 より $\mathbf{MQC} \vdash \neg\neg A^g \to A^g$ で, 定理 4.1 より $\mathbf{MQC} \vdash \neg_{\$}\neg_{\$}A^{\$} \to A^{\$}$.

□

系 4.2 A を論理式, Γ を論理式の集合とすると,

$$\Gamma \vdash_c A \quad \text{ならば} \quad \Gamma^{\$} \vdash_m A^{\$}.$$

証明

$\Gamma \vdash_c A$ ならば, 定理 3.1 より $\Gamma^g \vdash_m A^g$ で, 定理 4.1 より $\Gamma^{\$} \vdash_m A^{\$}$.

□

4.4 論理式のクラスの構文論的な定義

定義 4.4 論理式のクラス $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{I}$ を以下のように同時帰納的に定義する．ここで, P は原子論理式, Q, Q_1, Q_2 は $\mathcal{Q}$ に属する論理式, R, R_1, R_2 は $\mathcal{R}$ に属する論理式, I, I_1, I_2 は $\mathcal{I}$ に属する論理式をそれぞれ表す.

· $\bot,\ P,\ Q_1 \wedge Q_2,\ Q_1 \vee Q_2,\ \forall x Q,\ \exists x Q,\ I \to Q \in \mathcal{Q},$

· $\bot,\ R_1 \wedge R_2,\ \forall x R,\ I \to R \in \mathcal{R},$

· $\bot,\ P,\ I_1 \wedge I_2,\ I_1 \vee I_2,\ \exists x I,\ R \to I \in \mathcal{I},$

命題 4.2 論理式 A について

· $A \in \mathcal{Q}$ ならば $\mathbf{IQC} \vdash A \to A^{\$}$.

· $A \in \mathcal{R}$ ならば $\mathbf{IQC} \vdash \neg_{\$}\neg A \to A^{\$}$.

· $A \in \mathcal{I}$ ならば $\mathbf{IQC} \vdash A^{\$} \to \neg_{\$}\neg_{\$} A$.

証明

論理式 A の複雑さに関する同時帰納法により証明する.

Basis:

· $A \equiv \bot$ のとき $A^{\$} \equiv \$$.

$\bot \in \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{I}$ であるが

$$\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}\bot}{\$}\,(\bot_i)}{{}^{(1)}\bot \to \$,}\,(\to I) \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(2)}\neg_{\$}\neg\bot \qquad \dfrac{{}^{(1)}\bot}{{}^{(1)}\neg\bot}\,(\to I)}{\$}}{{}^{(2)}\neg_{\$}\neg\bot \to \$,}\,(\to I) \qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(1)}\$}{\neg_{\$}\neg_{\$}\bot}\,(\to I)}{{}^{(1)}\$ \to \neg_{\$}\neg_{\$}\bot}\,(\to I)$$

はそれぞれ $\mathbf{IQC}$ の証明図となる. したがって, $\mathbf{IQC} \vdash A \to A^{\$}$, $\mathbf{IQC} \vdash \neg_{\$}\neg A \to A^{\$}$, $\mathbf{IQC} \vdash A^{\$} \to \neg_{\$}\neg_{\$} A$.

· $A \equiv P\ (\not\equiv \bot)$ のとき $A^{\$} \equiv \neg_{\$}\neg_{\$} P$.

$P \in \mathcal{Q}$ であるが

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}\neg_{\$} P \qquad {}^{(2)}P}{\$}}{{}^{(1)}\neg_{\$}\neg_{\$} P}\,(\to I)}{{}^{(2)}P \to \neg_{\$}\neg_{\$} P}\,(\to I)$$

は $\mathbf{IQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{IQC} \vdash A \to A^{\$}$.

定義 4.4 より $P \notin \mathcal{R}$.

$P \in \mathcal{I}$ であるが

$$\dfrac{{}^{(1)}\neg_{\$}\neg_{\$} P}{{}^{(1)}\neg_{\$}\neg_{\$} P \to \neg_{\$}\neg_{\$} P}\,(\to I)$$

は $\mathbf{IQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{IQC} \vdash A^{\$} \to \neg_{\$}\neg_{\$} A$.

Induction steps:

· $A \equiv B \wedge C$ のとき $A^{\$} \equiv B^{\$} \wedge C^{\$}$.

$A\in\mathcal{Q}$ ならば定義 4.4 より $B, C\in\mathcal{Q}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{IQC}\vdash B\to B^{\$}$, $\mathbf{IQC}\vdash C\to C^{\$}$. よって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(1)}B\wedge C}{B}\qquad \begin{matrix}I.H.\\ \vdots\\ B\to B^{\$}\end{matrix}}{B^{\$}}\qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(1)}B\wedge C}{C}\qquad \begin{matrix}I.H.\\ \vdots\\ C\to C^{\$}\end{matrix}}{C^{\$}}}{B^{\$}\wedge C^{\$}}}{{}^{(1)}B\wedge C\to B^{\$}\wedge C^{\$}}\ (\to I)$$

は $\mathbf{IQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{IQC}\vdash A\to A^{\$}$.

$A\in\mathcal{R}$ ならば 定義 4.4 より $B, C\in\mathcal{R}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{IQC}\vdash\neg_{\$}\neg B\to B^{\$}$, $\mathbf{IQC}\vdash\neg_{\$}\neg C\to C^{\$}$. よって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(5)}\neg_{\$}\neg(B\wedge C)\qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(2)}\neg B\qquad \dfrac{{}^{(1)}B\wedge C}{B}}{\bot}}{{}^{(1)}\neg(B\wedge C)}\ (\to I)}{\$}}{{}^{(2)}\neg_{\$}\neg B}\ (\to I)\qquad \begin{matrix}I.H\\ \vdots\\ \neg_{\$}\neg B\to B^{\$}\end{matrix}}{B^{\$}}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(5)}\neg_{\$}\neg(B\wedge C)\qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(4)}\neg C\qquad \dfrac{{}^{(3)}B\wedge C}{C}}{\bot}}{{}^{(3)}\neg(B\wedge C)}\ (\to I)}{\$}}{{}^{(4)}\neg_{\$}\neg C}\ (\to I)\qquad \begin{matrix}I.H\\ \vdots\\ \neg_{\$}\neg C\to C^{\$}\end{matrix}}{C^{\$}}}{\dfrac{B^{\$}\wedge C^{\$}}{{}^{(5)}\neg_{\$}\neg(B\wedge C)\to B^{\$}\wedge C^{\$}}\ (\to I)}$$

は $\mathbf{IQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{IQC}\vdash\neg_{\$}\neg A\to A^{\$}$.

$A\in\mathcal{I}$ ならば 定義 4.4 より $B, C\in\mathcal{I}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{IQC}\vdash B^{\$}\to\neg_{\$}\neg_{\$}B$, $\mathbf{IQC}\vdash C^{\$}\to\neg_{\$}\neg_{\$}C$. よって

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(4)}B^{\$}\wedge C^{\$}}{B^{\$}}\qquad \begin{matrix}I.H.\\ \vdots\\ B^{\$}\to\neg_{\$}\neg_{\$}B\end{matrix}}{\neg_{\$}\neg_{\$}B}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(4)}B^{\$}\wedge C^{\$}}{C^{\$}}\qquad \begin{matrix}I.H.\\ \vdots\\ C^{\$}\to\neg_{\$}\neg_{\$}C\end{matrix}}{\neg_{\$}\neg_{\$}C}\qquad \dfrac{\dfrac{{}^{(3)}\neg_{\$}(B\wedge C)\qquad \dfrac{{}^{(2)}B\qquad {}^{(1)}C}{B\wedge C}}{\$}}{{}^{(1)}\neg_{\$}C}\ (\to I)}{\$}}{{}^{(2)}\neg_{\$}B}\ (\to I)}{\$}}{{}^{(3)}\neg_{\$}\neg_{\$}(B\wedge C)}\ (\to I)}{{}^{(4)}B^{\$}\wedge C^{\$}\to\neg_{\$}\neg_{\$}(B\wedge C)}\ (\to I)$$

は $\mathbf{IQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{IQC}\vdash A^{\$}\to\neg_{\$}\neg_{\$}A$.

$\cdot$ $A\equiv B\to C$ のとき $A^{\$}\equiv B^{\$}\to C^{\$}$.

$A \in \mathcal{Q}$ ならば 定義 4.4 より $B \in \mathcal{I}$, $C \in \mathcal{Q}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{IQC} \vdash B^\$ \to \neg_\$ \neg_\$ B$, $\mathbf{IQC} \vdash C \to C^\$$. よって

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(3)}B^\$ \quad \begin{array}{c} I.H. \\ \vdots \\ B^\$ \to \neg_\$\neg_\$ B \end{array}}{\neg_\$\neg_\$ B} \quad \dfrac{\dfrac{{}^{(2)}\neg_\$ C^\$ \quad \dfrac{\dfrac{{}^{(1)}B \quad {}^{(4)}B \to C}{C} \quad \begin{array}{c} I.H. \\ \vdots \\ C \to C^\$ \end{array}}{C^\$}}{\$}}{{}^{(1)}\neg_\$ B}\,(\to I)}{\dfrac{\$}{{}^{(2)}\neg_\$\neg_\$ C^\$}\,(\to I)} \quad \begin{array}{c} \text{系 } 4.1 \\ \vdots \\ \neg_\$\neg_\$ C^\$ \to C^\$ \end{array}}{\dfrac{C^\$}{{}^{(3)}B^\$ \to C^\$}\,(\to I)}}{{}^{(4)}(B \to C) \to (B^\$ \to C^\$)}\,(\to I)
$$

は $\mathbf{IQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{IQC} \vdash A \to A^\$$.

$A \in \mathcal{R}$ ならば定義 4.4 より $B \in \mathcal{I}$, $C \in \mathcal{R}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{IQC} \vdash B^\$ \to \neg_\$ \neg_\$ B$, $\mathbf{IQC} \vdash \neg_\$ \neg C \to C^\$$. よって

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{(4)}B^\$ \quad \begin{array}{c} I.H. \\ \vdots \\ B^\$ \to \neg_\$\neg_\$ B \end{array}}{\neg_\$\neg_\$ B} \quad \dfrac{\dfrac{{}^{(5)}\neg_\$\neg(B \to C) \quad \dfrac{\dfrac{{}^{(3)}\neg C \quad \dfrac{{}^{(2)}B \quad {}^{(1)}B \to C}{C}}{\bot}}{{}^{(1)}\neg(B \to C)}\,(\to I)}{\$}}{{}^{(2)}\neg_\$ B}\,(\to I)}{\dfrac{\$}{{}^{(3)}\neg_\$\neg C}\,(\to I)} \quad \begin{array}{c} I.H. \\ \vdots \\ \neg_\$\neg C \to C^\$ \end{array}}{\dfrac{C^\$}{{}^{(4)}B^\$ \to C^\$}\,(\to I)}}{{}^{(5)}\neg_\$\neg(B \to C) \to (B^\$ \to C^\$)}\,(\to I)
$$

は $\mathbf{IQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{IQC} \vdash \neg_\$ \neg A \to A^\$$.

$A \in \mathcal{I}$ ならば定義 4.4 より $B \in \mathcal{R}$, $C \in \mathcal{I}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{IQC} \vdash \neg_{\$}\neg B \to B^{\$}$, $\mathbf{IQC} \vdash C^{\$} \to \neg_{\$}\neg_{\$} C$. よって

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{${}^{(4)}\neg_{\$}(B \to C)$}
\AxiomC{${}^{(2)}\neg B$}
\AxiomC{${}^{(1)}B$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\bot_i)$}
\UnaryInfC{C}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(1)}B \to C$}
\BinaryInfC{$\$$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(2)}\neg_{\$}\neg B$}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg_{\$}\neg B \to B^{\$}$}
\BinaryInfC{$B^{\$}$}
\AxiomC{${}^{(5)}B^{\$} \to C^{\$}$}
\BinaryInfC{$C^{\$}$}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$C^{\$} \to \neg_{\$}\neg_{\$} C$}
\BinaryInfC{$\neg_{\$}\neg_{\$} C$}
\AxiomC{${}^{(4)}\neg_{\$}(B \to C)$}
\AxiomC{${}^{(3)}C$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{$B \to C$}
\BinaryInfC{$\$$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(3)}\neg_{\$} C$}
\BinaryInfC{$\$$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(4)}\neg_{\$}\neg_{\$}(B \to C)$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(5)}(B^{\$} \to C^{\$}) \to \neg_{\$}\neg_{\$}(B \to C)$}
\end{prooftree}
$$

は $\mathbf{IQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{IQC} \vdash A^{\$} \to \neg_{\$}\neg_{\$} A$.

$\cdot$ $A \equiv B \vee C$ のとき $A^{\$} \equiv \neg_{\$}\neg_{\$}(B^{\$} \vee C^{\$})$.

$A \in \mathcal{Q}$ ならば定義 4.4 より B, $C \in \mathcal{Q}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{IQC} \vdash B \to B^{\$}$, $\mathbf{IQC} \vdash C \to C^{\$}$. よって

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{${}^{(3)}B \vee C$}
\AxiomC{${}^{(2)}\neg_{\$}(B^{\$} \vee C^{\$})$}
\AxiomC{${}^{(1)}B$}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$B \to B^{\$}$}
\BinaryInfC{$B^{\$}$}
\UnaryInfC{$B^{\$} \vee C^{\$}$}
\BinaryInfC{$\$$}
\AxiomC{${}^{(2)}\neg_{\$}(B^{\$} \vee C^{\$})$}
\AxiomC{${}^{(1)}C$}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$C \to C^{\$}$}
\BinaryInfC{$C^{\$}$}
\UnaryInfC{$B^{\$} \vee C^{\$}$}
\BinaryInfC{$\$$}
\RightLabel{$(\vee E)$}
\TrinaryInfC{${}^{(1)}\$$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(2)}\neg_{\$}\neg_{\$}(B^{\$} \vee C^{\$})$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(3)}B \vee C \to \neg_{\$}\neg_{\$}(B^{\$} \vee C^{\$})$}
\end{prooftree}
$$

は $\mathbf{IQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{IQC} \vdash A \to A^{g}$.

定義 4.4 より $A \notin \mathcal{R}$.

$A \in \mathcal{I}$ ならば定義 4.4 より $B, C \in \mathcal{I}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{IQC} \vdash B^{\$} \to \neg_{\$}\neg_{\$}B$, $\mathbf{MQC} \vdash C^{\$} \to \neg_{\$}\neg_{\$}C$. よって

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{${}^{(6)}\neg_{\$}\neg_{\$}(B^{\$}\lor C^{\$})$}
\AxiomC{${}^{(4)}B^{\$}\lor C^{\$}$}
\AxiomC{${}^{(3)}B^{\$}$}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$B^{\$}\to\neg_{\$}\neg_{\$}B$}
\BinaryInfC{$\neg_{\$}\neg_{\$}B$}
\AxiomC{${}^{(5)}\neg_{\$}(B\lor C)$}
\AxiomC{${}^{(1)}B$}
\UnaryInfC{$B\lor C$}
\BinaryInfC{$\$$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(1)}\neg_{\$}B$}
\BinaryInfC{$\$$}
\AxiomC{${}^{(3)}C^{\$}$}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$C^{\$}\to\neg_{\$}\neg_{\$}C$}
\BinaryInfC{$\neg_{\$}\neg_{\$}C$}
\AxiomC{${}^{(5)}\neg_{\$}(B\lor C)$}
\AxiomC{${}^{(2)}C$}
\UnaryInfC{$B\lor C$}
\BinaryInfC{$\$$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(2)}\neg_{\$}C$}
\BinaryInfC{$\$$}
\RightLabel{$(\lor E)$}
\TrinaryInfC{${}^{(3)}\$$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(4)}\neg_{\$}(B^{\$}\lor C^{\$})$}
\BinaryInfC{$\$$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(5)}\neg_{\$}\neg_{\$}(B\lor C)$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(6)}\neg_{\$}\neg_{\$}(B^{\$}\lor C^{\$})\to\neg_{\$}\neg_{\$}(B\lor C)$}
\end{prooftree}
$$

は $\mathbf{IQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{IQC} \vdash A^{\$} \to \neg_{\$}\neg_{\$}A$.

· $A \equiv \forall xB$ のとき $A^{\$} \equiv \forall xB^{\$}$.

$A \in \mathcal{Q}$ ならば定義 4.4 より $B \in \mathcal{Q}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{IQC} \vdash B \to B^{\$}$. よって

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall xB$}
\LeftLabel{${}^{(1)}$}
\UnaryInfC{B}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$B\to B^{\$}$}
\BinaryInfC{$B^{\$}$}
\UnaryInfC{$\forall xB^{\$}$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(1)}\forall xB\to\forall xB^{\$}$}
\end{prooftree}
$$

は $\mathbf{IQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{IQC} \vdash A \to A^{\$}$.

$A \in \mathcal{R}$ ならば定義 4.4 より $B \in \mathcal{R}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{IQC} \vdash \neg_{\$}\neg B \to B^{\$}$. よって

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{${}^{(3)}\neg_{\$}\neg\forall xB$}
\AxiomC{${}^{(2)}\neg B$}
\AxiomC{${}^{(1)}\forall xB$}
\UnaryInfC{B}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(1)}\neg\forall xB$}
\BinaryInfC{$\$$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(2)}\neg_{\$}\neg B$}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg_{\$}\neg B\to B^{\$}$}
\BinaryInfC{$B^{\$}$}
\UnaryInfC{$\forall xB^{\$}$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(3)}\neg_{\$}\neg\forall xB\to\forall xB^{\$}$}
\end{prooftree}
$$

は $\mathbf{IQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{IQC} \vdash \neg_{\$}\neg A \to A^{\$}$.

定義 4.4 より $A \notin \mathcal{I}$.

· $A \equiv \exists xB$ のとき $A^{\$} \equiv \neg_{\$}\neg_{\$}\exists xB^{\$}$.

$A \in \mathcal{Q}$ ならば定義 4.4 より $B \in \mathcal{Q}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{IQC} \vdash B \to B^{\$}$. よって

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x B$}
\AxiomC{$\neg_{\$}\exists x B^{\$}$}
\AxiomC{B}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$B \to B^{\$}$}
\BinaryInfC{$B^{\$}$}
\UnaryInfC{$\exists x B^{\$}$}
\BinaryInfC{$\$$}
\BinaryInfC{$\$$}
\UnaryInfC{$\neg_{\$}\neg_{\$}\exists x B^{\$}$}
\UnaryInfC{$\exists x B \to \neg_{\$}\neg_{\$}\exists x B^{\$}$}
\end{prooftree}
$$

は $\mathbf{IQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{IQC} \vdash A \to A^{\$}$.

定義 4.4 から $A \notin \mathcal{R}$.

$A \in \mathcal{I}$ ならば定義 4.4 より $B \in \mathcal{I}$ で, 帰納法の仮定から $\mathbf{IQC} \vdash B^{\$} \to \neg_{\$}\neg_{\$}B$. よって

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{${}^{(5)}\neg_{\$}\neg_{\$}\exists x B^{\$}$}
\AxiomC{${}^{(3)}\exists x B^{\$}$}
\AxiomC{${}^{(2)}B^{\$}$}
\AxiomC{$I.H.$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$B^{\$} \to \neg_{\$}\neg_{\$}B$}
\BinaryInfC{$\neg_{\$}\neg_{\$}B$}
\AxiomC{${}^{(4)}\neg_{\$}\exists x B$}
\AxiomC{${}^{(1)}B$}
\UnaryInfC{$\exists x B$}
\BinaryInfC{$\$$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(1)}\neg_{\$}B$}
\BinaryInfC{$\$$}
\RightLabel{$(\exists E)$}
\BinaryInfC{${}^{(2)}\$$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(3)}\neg_{\$}\exists x B^{\$}$}
\BinaryInfC{$\$$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(4)}\neg_{\$}\neg_{\$}\exists x B$}
\RightLabel{$(\to I)$}
\UnaryInfC{${}^{(5)}\neg_{\$}\neg_{\$}\exists x B^{\$} \to \neg_{\$}\neg_{\$}\exists x B$}
\end{prooftree}
$$

は $\mathbf{IQC}$ の証明図となるため, $\mathbf{IQC} \vdash A^{\$} \to \neg_{\$}\neg_{\$}A$.

□

定義 4.5 論理式の集合 Γ について,

任意の $B \in \Gamma$ と $FV(A) \cap BV(\Gamma) = \emptyset$ をみたす任意の論理式 A に対し $\Gamma \vdash_i B^{\$}[\$/A]$

となるとき Γ は $^{\$}$ に関して閉じているという.

定理 4.2 論理式のクラス $\mathcal{K}$ を

$$I,\ K_1 \wedge K_2,\ \forall x K,\ Q \to K \in \mathcal{K}$$

と帰納的に定義する (ただし, Q は $\mathcal{Q}$ に属する論理式, I は $\mathcal{I}$ に属する論理式, K, K_1, K_2 は $\mathcal{K}$ に属する論理式をそれぞれ表す).

任意の $A \in \mathcal{K}$ と, $^{\$}$ に関して閉じている論理式の集合 Γ について

$$\Gamma \vdash_c A \ \text{ならば}\ \Gamma \vdash_i A$$

すなわち, $\mathcal{K}$ について $\mathbf{CQC} + \Gamma$ は $\mathbf{IQC} + \Gamma$ の保守的拡大となる.

証明

A の複雑さに関する帰納法により証明する．なお, 束縛変数の付け替えを行うことにより, 一般性を失うことなく $FV(A) \cap BV(\Gamma \cup \{A\}) = \emptyset$ とすることができる.

Basis:

$\cdot A \in \mathcal{I}$ の場合.

定理 4.1 より $\Gamma \vdash_c A$ なら $\Gamma^{\$} \vdash_m A^{\$}$. すなわち, conclusion が $A^{\$}$, open assumption の集合が $\Gamma^{\$}$ の部分集合であるような **MQC** の証明図 $\mathcal{D}$ が存在する.

また, $A \in \mathcal{I}$ より $\mathbf{IQC} \vdash A^{\$} \to \neg_{\$}\neg_{\$}A$ なので, つぎの証明図

$$\mathcal{D}' \equiv \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A^{\$}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\mathbf{IQC}\\ \vdots \\ A^{\$} \to \neg_{\$}\neg_{\$}A\end{matrix}}{\neg_{\$}\neg_{\$}A}$$

は **IQC** の証明図となる.

$FV(A) \cap BV(\Gamma \cup \{A\}) = \emptyset$ より, 証明図 $\mathcal{D}'$ の中の \$ に A を代入することができ, そのような証明図を $\mathcal{D}'[\$/A]$ とするとつぎの証明図

$$\mathcal{D}'' \equiv \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}'[\$/A]\\ (A \to A) \to A\end{matrix} \quad \dfrac{{}^{(1)}A}{{}^{(1)}A \to A}\,(\to I)}{A}$$

は conclusion が A, open assumption の集合が $\Gamma^{\$}[\$/A]$ の部分集合であるような **IQC** の証明図である.

いま $FV(A) \cap BV(\Gamma \cup \{A\}) = \emptyset$ であり, Γ は $^{\$}$ に関して閉じているため任意の $B \in \Gamma$ に対して $\Gamma \vdash_i B^{\$}[\$/A]$ となり, conclusion が $B^{\$}[\$/A]$, open assumption の集合が Γ の部分集合であるような **IQC** の証明図が存在する.

$\mathcal{D}''$ のすべての open assumption をこれらの証明図で置き換えたものもまた **IQC** の証明図となる. すなわち, $\Gamma \vdash_i A$.

Induction steps:

$\cdot A \equiv B \wedge C$ の場合.

$\Gamma \vdash_c B \wedge C$ より, conclusion が $B \wedge C$, open assumption の集合が Γ の部分集合であるような **CQC** の証明図 $\mathcal{D}$ が存在する.

$\mathcal{D}$ に $\wedge E$ を適用すると conclusion がそれぞれ B, C であるような **CQC** の証明図が 2 つ得られる. すなわち $\Gamma \vdash_c B$ かつ $\Gamma \vdash_c C$.

ここで, $B, C \in \mathcal{K}$ なので帰納法の仮定から $\Gamma \vdash_i B$ かつ $\Gamma \vdash_i C$ であり, conclusion がそれぞれ B, C となるような **IQC** の証明図が存在する.

これらの **IQC** の証明図に $\wedge I$ を適用した証明図もまた **IQC** の証明図なので $\Gamma \vdash_i B \wedge C$.

$\cdot A \equiv \forall x B$ の場合.

$\Gamma \vdash_c \forall x B$ より, conclusion が $\forall x B$, open assumption の集合が Γ の部分集合であるような **CQC** の証明図 $\mathcal{D}$ が存在する.

$\mathcal{D}$ に $\forall E$ を適用すると conclusion が $B[x/y]$ (ただし $y \notin FV(\Gamma)$) であるような **CQC** の証明図が得られる. すなわち $\Gamma \vdash_c B[x/y]$.

ここで, $B \in \mathcal{K}$ なので帰納法の仮定から $\Gamma \vdash_i B[x/y]$ であり, conclusion が $B[x/y]$ となるような **IQC** の証明図が存在する.

この **IQC** の証明図に $\forall I$ を適用した証明図 ($y \notin \Gamma$ より conclusion が $\forall x(B[x/y])[y/x] \equiv \forall xB$ となるようなものを作ることができる) もまた **IQC** の証明図なので $\Gamma \vdash_i \forall xB$.

$\cdot A \equiv B \to C$ の場合.

$\Gamma \vdash_c B \to C$ より, conclusion が $B \to C$, open assumption の集合が Γ の部分集合であるような **CQC** の証明図 $\mathcal{D}$ が存在する.

$\mathcal{D}$ に対して

$$\dfrac{B \quad \overset{\mathcal{D}}{B \to C}}{C}$$

のように $\to E$ を適用すると conclusion が C で, open assumption の集合に B が追加された **CQC** の証明図が得られる. すなわち $\Gamma \cup \{B\} \vdash_c C$.

ここで, $B \in \mathcal{Q}$ より $\mathbf{IQC} \vdash B \to B^{\$}$ なので $\Gamma \cup \{B\}$ は $^{\$}$ に関して閉じており, $FV(C) \subseteq FV(A)$, $BV(\Gamma \cup \{B\}) \subseteq BV(\Gamma \cup \{A\})$ より $FV(C) \cap BV(\Gamma \cup \{B\}) = \emptyset$ となり, また $C \in \mathcal{K}$ なので帰納法の仮定から $\Gamma \cup \{B\} \vdash_i C$ であり, conclusion が C となるような **IQC** の証明図が存在する.

この **IQC** の証明図に $\to I$ を適用した証明図もまた **IQC** の証明図なので $\Gamma \vdash_i B \to C$.
□

注 なお, $\mathcal{Q}$ は $^{\$}$ に関して閉じている論理式の集合の一例となっている.

注 クラス $\mathcal{K}$ と $\mathcal{W}_i$ の関係について, 例えば

- $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P) \ \in \mathcal{K}, \mathcal{W}_i$,
- $(\neg P \to Q) \to (\neg Q \to \neg\neg P) \ \in \mathcal{W}_i$ だが $\notin \mathcal{K}$,
- $P \to P \vee Q \ \in \mathcal{K}$ だが $\notin \mathcal{W}_i$

などの論理式があり, $\mathcal{K} \cap \mathcal{W}_i \neq \emptyset$, $\mathcal{K} \not\subseteq \mathcal{W}_i$, $\mathcal{W}_i \not\subseteq \mathcal{K}$ であることがわかる.

第5章　結論

5.1　本研究の成果

本稿では，まず negative translation による証明図の書き換えを用いて，古典論理が minimal logic の保守的拡大となるような論理式のクラス $\mathcal{W}$ と，古典論理が直観主義論理の保守的拡大となるような論理式のクラス $\mathcal{W}_i$ を，それぞれそこに属する論理式の構文論的な形から定義した.

また，\$-translation による証明図の書き換えを用いて，古典論理が直観主義論理の保守的拡大となるような論理式のクラス $\mathcal{K}$ を，それぞれそこに属する論理式の構文論的な形から定義した.

本研究では，これらの既知のクラスをより大きなものに広げるには至らなかったが，$\mathcal{W}_i$ と $\mathcal{K}$ は $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$, $\mathcal{K} \not\subseteq \mathcal{W}_i$, $\mathcal{W}_i \not\subseteq \mathcal{K}$ というような関係にあることが確認できた.

5.2　今後の課題

今後の課題としては，$\mathcal{W}_i$ と $\mathcal{K}$ を含むようなクラスの構文論的な定義を統一的に与えることが挙げられる.

本稿で述べたような自然演繹によるアプローチではなく sequent 計算を用いると，直観主義論理の sequent 計算の体系では cut 除去定理より subformula property が成り立つため，これにより論理式の構文論的な側面からのより詳細な分析が行われることが期待される.

参考文献

[1] van Dalen, D., Logic and Structures. 3rd ed. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1994.

[2] Ishihara, H., A note on the Gödel-Gentzen translation. MLQ Math. Log. Q. **46** (2000) 1, 135 - 137.

[3] Leivant, D., Syntactic translations and provably recursive functions. J. Symbolic Logic **50** (1985), 682 - 688.

[4] Troelstra, A. S. and D. van Dalen, Constructivism in Mathematics. Volume 1. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1988.