

Title	動的な関数における複雑さの発展
Author(s)	並川, 淳
Citation	
Issue Date	2001-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/715
Rights	
Description	Supervisor: 橋本 敬, 知識科学研究科, 修士

修 士 論 文

動的な関数における複雑さの発展

指導教官 橋本 敬 助教授

北陸先端科学技術大学院大学
知識科学研究科 知識システム基礎学専攻

950069 並川 淳

審査委員： 橋本 敬 助教授 （主査）
中森 義輝 教授
櫻井 彰人 教授
下嶋 篤 助教授

2001 年 2 月

目 次

1	はじめに	1
2	動的な関数の形式化	4
3	複雑さの測度	7
3.1	冗長性	7
3.1.1	最大冗長度	8
3.1.2	有限集合に対する平均冗長度	8
3.1.3	無限集合に対する平均冗長度	10
3.2	関数エントロピー	11
3.2.1	有限集合に対する関数エントロピー	11
3.2.2	無限集合に対する関数エントロピー	12
3.3	測度の特徴	13
4	写像のダイナミクス	16
4.1	冗長度の変化	16
5	シミュレーション	19
5.1	実験条件	19
5.2	結果	21
5.3	考察	21
6	議論	35
6.1	シミュレーション結果の意義	35
6.2	形式的枠組の一般性	36
6.3	具体的問題への適用	36

目 次

2.1	関数変換のダイアグラム	4
2.2	部分的な同型対応の模式図	6
3.1	$f(x) = x^3 - x$ のグラフ	9
3.2	相空間の分割による軌道から記号列への対応付け	14
4.1	冗長度が増加するときのダイナミクスの模式図	18
4.2	冗長度が減少するときのダイナミクスの模式図	18
5.1	シミュレーションで使用する写像 g のグラフ	20
5.2	シミュレーションで使用する写像 f_0 のグラフ	20
5.3	ロジスティック写像 g による f_n の時間発展 (1)	22
5.4	ロジスティック写像 g による f_n の時間発展 (2)	23
5.5	テント写像 g による f_n の時間発展	24
5.6	g がロジスティック写像のときの平均冗長度 $\bar{r}(f_n)$ の時間発展	25
5.7	g がロジスティック写像のときの関数エントロピー $H(f_n)$ の時間発展	25
5.8	g がテント写像のときの平均冗長度 $\bar{r}(f_n)$ の時間発展	26
5.9	g がテント写像のときの関数エントロピー $H(f_n)$ の時間発展	26
5.10	g がロジスティック写像のときの平均冗長度 $\bar{r}(f_n)$ の時間平均	27
5.11	g がロジスティック写像のときの関数エントロピー $H(f_n)$ の時間平均	28
5.12	g がテント写像のときの平均冗長度 $\bar{r}(f_n)$ の時間平均	29
5.13	g がテント写像のときの関数エントロピー $H(f_n)$ の時間平均	30
5.14	g がロジスティック写像のときの関数エントロピーとリアプノフ指数の比較	31
5.15	g がテント写像のときの関数エントロピーとリアプノフ指数の比較	32
5.16	g がテント写像のときの像の伸長	33
5.17	g がロジスティック写像のときの像の伸長	34

表 目 次

3.1 力学系の周期と測度との関係	15
-----------------------------	----

第 1 章

はじめに

本稿では、関数を変換する力学系と複雑さの測度を定義し、関数の持つ複雑さがいかに変化するか、および複雑さを変化させるようなダイナミクスがどのような特徴を持つかについて調べる。

生命の起源や進化、言語構造の変化などの研究では、いかにして単純な系から複雑な系へと変化したかという問題に直面する。例えば、単細胞生物のみの系から多細胞生物がいる系への進化は、この種の問題を含む最たる事例であろう。それゆえ、系がどのように複雑化したかという問題を考えることで、複雑な現象に共通する普遍的な性質についての理解が深まると考えられる。それでは、このような問題を扱うためにどのようなアプローチを取るべきだろうか。

ここでは上記の問題を、関数のダイナミクスにおいて、関数の複雑さがどのように変化するかという問題として捉えることにする。一般に、数理科学では対象を状態空間とその上で定義された関数として記述できるという立場を取る。このとき、関数は状態空間におけるなんらかの法則を記述しており、ひとつの系において関数是不変であると考えるのが普通である。例えば力学系ならば、変化するのとは状態をあらわす変数であって状態空間そのものや関数ではない。しかし、系の変化が問題となるときは、その系の関数自体がダイナミックなものであると考えなければならない。一方で、系が複雑であるといった場合、その複雑さは系における関数に由来すると考えられる。例えばカオスの場合、複雑なのは個々の状態ではなくアトラクタであり、それを生成するのは力学系の方程式である。よって、系の複雑さを関数の複雑さ（これは必ずしも関数の形が複雑だという意味ではない）として考えることができる。それゆえ、系の複雑さがどのように変化するかという問題は、関数のダイナミクスにおいて関数の複雑さがどのように変化するかという問題に置き換えるこ

とが可能である。

そこで本稿では、関数の複雑さとは何か、関数の複雑さを変動させる原動力とそれを支配する論理は何かという問題について考える。なお、ここでの目的は個々の現象を精密に記述したモデルの振舞を知るのではなく、ダイナミクスの普遍クラスの予測とそれを可能にするような形式的枠組の提供である。それゆえ、本研究では特定の現象をモデル化したものではなく、関数のダイナミクスを表現した抽象的な数理システムを対象とする。

それでは、まず関数の複雑さの測度について考えよう。複雑さとは何か、またどのように定量化できるのかという問題は、情報理論 [1]、力学系 [2]、計算機科学 [3][6]、複雑系 [4][5] など幾つかの分野で研究されており、複雑さの測度の可能な定義が試みられている。本稿では複雑さの測度を定義する際に、完全に新しい複雑さの指標を与えるのではなく、従来の複雑さの指標の考え方を踏襲し、関数の複雑さに適用できるように拡張する。これは動的な関数を調べるための形式的枠組を構築する第一歩として、この枠組が従来の複雑さに対するダイナミクスを表現できることを示すためである。また本稿では関数の複雑さの測度を定義する際に、代数的に同じ構造を持つ関数の複雑さは等しいという立場を取る。これは、表現の形式によらない普遍的な複雑さの定義を与えるためである。そして、本稿で定義された複雑さの測度がどのような性質を持つかについて考察する。

次に、関数を変換する力学系について考える。一般に、状態空間とその上の変換が定められているものを力学系という [7]。よって関数のダイナミクスを表すならば、変数ではなく関数を状態空間の要素として力学系を定義する必要がある。ここで、マクロなレベルにのみ着目し、関数を変数に、関数を変化させるメタルールを関数に置き換えることができるのではないかと考えるかもしれない。しかし、そのような置き換えは系の複雑さがいかに変化するかを問題にしている場合にはできない。なぜなら、ある変数の値が別の値より複雑だといえる根拠は存在しないし、たとえそのような複雑さの定義を与えたとしても、そこから複雑さとダイナミクスの間の関係を見出すことはできないからである。そのため、状態空間の要素として変数をとる従来の力学系では複雑さのダイナミクスを扱うことはできず、関数を変換する力学系が必要になる。それでは、関数を変換する力学系としてどのようなものが存在するだろうか。

関数を変換する力学系についての研究としては、片岡、金子の関数マップ [8][9] が存在する。これは関数の自己書換えによるメタルール形成に注目したモデルであり、言語の統語論と意味論に対する新しいアプローチとして用いられている [10]。しかしながら、関数マップは複雑さの変化について直接扱うモデルではなかった。

本稿では、変換前と変換後の関数が部分的に準同型となるように関数の変換を定義し、その変換を基に力学系を構成する。もし代数的に同じ構造を持つ関数が等しい複雑さを持つ

と考えるなら, 同型対応による変換では関数の複雑さは変化しない. それでは, 同型対応からどのくらい制限を弱めれば関数の複雑さが変化するのだろうか. 本研究では, 部分的に準同型となるような関数の変換を基に力学系を定義し, この力学系によって複雑さが変化するダイナミクスを表現できることを示す. そして, どのような変換が複雑さを変化させるのかについて調べる.

第2章では, 本稿で提案する関数のダイナミクスを定義する. その際, 関数の変換が部分的に準同型となっていることを示す. 第3章では, 関数の複雑さの測度として冗長度と関数エントロピーを定義する. そして力学系を関数として表現したとき, これらの測度が系の複雑さを表していることを示す. 第4章では, 本稿で提案するダイナミクスにおいて, 複雑さの減少, 一定, 増加がそれぞれ発生するための十分条件を示す. 第5章ではシミュレーションの結果を示し, モデルの持つ定性的な性質を明らかにする. その際, 関数エントロピーがリアプノフ指数と関連を持つということを示す. 第6章では, 前章で示したシミュレーション結果の持つ意義や, 本稿で示した形式的枠組の持つ一般性について議論する. そして第7章において本稿の結論について述べる.

第 2 章

動的な関数の形式化

本章では, 写像を変換する力学系を定義し, 変換前と変換後の写像が部分的に準同型となることを示す.

DEFINITION 2.1 写像 $f_n : S_n \rightarrow S$ ($S_n \subseteq S$) の時間発展を, 写像 $g : S \rightarrow S$ と写像 $g_n^* : S_{n+1} \rightarrow S_n$ の無限列 $\{g_0^*, g_1^*, \dots\} = \{g_i^*\}_{i=0}^\infty$ によって

$$f_{n+1} = g \circ f_n \circ g_n^* \quad (2.1)$$

と定義する. ただし, g_n^* は g の S_n への制限 $g|_{S_n}$ と包含写像 $i_{n+1} : S_{n+1} \rightarrow S; x \mapsto x$ に対し $g|_{S_n} \circ g_n^* = i_{n+1}$ を満たす.

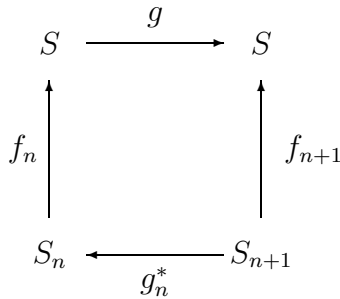


図 2.1: 関数変換のダイアグラム

この定義における関数変換のダイアグラムを図 2.1 に示す.

それでは, 次に式 (2.1) のダイナミクスの簡単な例を示そう.

EXAMPLE 2.1 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ によるダイナミクスについて考える. ここで $g^+ : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+; x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$ によって $\{g_i^*\}_{i=0}^\infty = \{g^+\}_{i=0}^\infty$ と決めよう. このとき, g_n^* が $g|_{S_n} \circ g_n^* = i_{n+1}$

を満たしているのは自明である。それでは、 $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x + 1$ における f_n の時間発展を以下に示す。

$$\begin{aligned} f_0 &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto x + 1 \\ f_1 &: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto (x^{\frac{1}{2}} + 1)^2 \\ f_2 &: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto (x^{\frac{1}{4}} + 1)^4 \\ &\vdots \\ f_n &: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto (x^{(\frac{1}{2})^n} + 1)^{2^n} \end{aligned}$$

EXAMPLE 2.2 $g : S \rightarrow S$ に逆写像 $g^{-1} : S \rightarrow S$ が存在する場合を考える。このとき、 $\{g_i^*\}_{i=0}^\infty$ の全ての要素について $g_n^* : S_{n+1} \rightarrow S_n; x \mapsto g^{-1}(x)$ である。

次に、この力学系における写像の変換が始域の部分集合において準同型になっていることを示す。

THEOREM 2.1 任意の $g : S \rightarrow S$ と $S_n \subseteq S$ に対し、次の条件が成り立つ。

1. g_n^* は単射である。
2. 写像 $g'_n : g_n^*(S_{n+1}) \rightarrow S_{n+1}; x \mapsto g(x)$ が存在し、包含写像 i に対し $g_n^* \circ g'_n = i$ を満たす。
3. $\forall x \in g_n^*(S_{n+1})$ について $g \circ f_n(x) = f_{n+1} \circ g'_n(x)$ 。

PROOF 2.1 まず 1. について証明する。 $a, b \in S_{n+1}$ に対し $g_n^*(a) = g_n^*(b)$ と仮定する。このとき

$$g|_{S_n} \circ g_n^*(a) = g|_{S_n} \circ g_n^*(b) \quad (2.2)$$

である。また包含写像 i_{n+1} は単射であり、 $g|_{S_n} \circ g_n^* = i_{n+1}$ なので $a = b$ 。したがって、 g_n^* は単射である。

次に、2. について証明する。 $g|_{S_n} \circ g_n^* = i_{n+1}$ より

$$g|_{S_n} \circ g_n^*(S_{n+1}) = S_{n+1} \quad (2.3)$$

である。すると $g|_{S_n}$ の $g_n^*(S_{n+1})$ への制限 $g|_{g_n^*(S_{n+1})}$ の像は S_{n+1} となる。よって $g|_{g_n^*(S_{n+1})}$ の S_{n+1} への余制限 g'_n が存在する。

ここで $x, y \in g_n^*(S_{n+1})$ に対し $y = g_n^* \circ g'_n(x)$ であると仮定する。すると $g'_n(x) = g(x)$ かつ $g|_{S_n} \circ g_n^* = i_{n+1}$ より

$$g|_{S_n} \circ g_n^* \circ g'_n(x) = g(x) \quad (2.4)$$

であり, また $y = g_n^* \circ g'_n(x)$ より

$$g|_{S_n} \circ g_n^* \circ g'_n(x) = g(y) \quad (2.5)$$

なので, 式 (2.4), (2.5) より $g(x) = g(y)$. このとき, $a, b \in S_{n+1}$ で $x = g_n^*(a), y = g_n^*(b)$ を満たす a, b が存在し, $g|_{S_n} \circ g_n^*$ が単射なので $a = b$. すると $g_n^*(a) = g_n^*(b)$ なので $x = y$. すると仮定より $y = g_n^* \circ g'_n(x)$ なので $x = g_n^* \circ g'_n(x)$. よって $g_n^* \circ g'_n = i$ である.

最後に, 3. について証明する. 式 (2.1) より $f_{n+1} = g \circ f_n \circ g_n^*$ なので, $x \in g_n^*(S_{n+1})$ に対し

$$f_{n+1} \circ g'_n(x) = g \circ f_n \circ g_n^* \circ g'_n(x) \quad (2.6)$$

である. ここで 2. より $g_n^* \circ g'_n(x) = x$ なので

$$g \circ f_n \circ g_n^* \circ g'_n(x) = f_n \circ g_n^*(x) \quad (2.7)$$

よって $\forall x \in g_n^*(S_{n+1})$ について $g \circ f_n(x) = f_{n+1} \circ g'_n(x)$ である. ■

定理 2.1 の 3 より, S_n の部分集合 $g_n^*(S_{n+1})$ において f_n と f_{n+1} は準同型対応している (図 2.2).

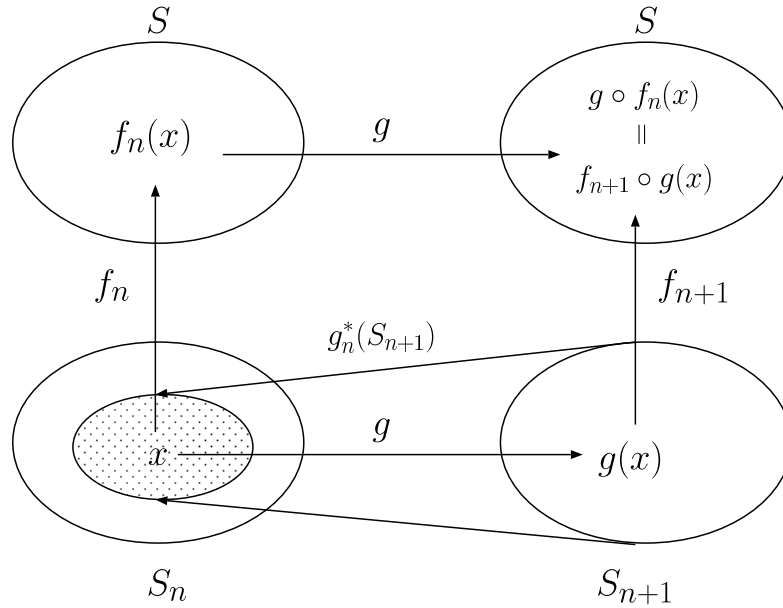


図 2.2: 部分的な同型対応の模式図

第 3 章

複雑さの測度

ここでは、関数に対する複雑さの測度として冗長度と関数エントロピーを定義し、その性質について述べる。

本研究の目的は、系を関数の形式で記述し、その関数のダイナミクスを通して系の複雑さがいかに変化するかを調べるための形式的枠組を構築することである。それゆえ、本稿で定義する複雑さの測度は、系を関数の形式で記述したとき、その系の複雑さを表現できていなければならない。それでは、系の複雑さとはどのようなものだろうか。それは例えば力学系ならば軌道の周期や摂動に対する構造安定性によって与えられ、形式文法やオートマトンならば生成可能な言語の集合の大きさによって与えられる。よって力学系や形式文法などを本稿の枠組で扱うなら、そのような複雑さを表現できていることが必要条件となる。そこで本稿では、写像の冗長性とランダムネスという観点から複雑さの測度を定義し、それらの測度が力学系を関数として記述したとき複雑さを表現できていることを示す。

また、複雑さの測度を定義する際、写像の代数的構造のみを用いて定義することにする。これは表現の形式によらない普遍的な複雑さの定義を与えるためである。なぜこのような立場を取るかというと、様々な系を関数の形式に変換して取り扱うという本研究のアプローチは、表現形式の変換によって複雑さが変化しないという前提によって成り立つからである。

3.1 冗長性

ここでは写像の冗長性という観点から測度を定義する。ある結果を得る方法が複数あるとき、つまりその方法が無くても同じ結果を得る別の方法があるとき、その方法は冗長であるといえる。これを関数に置き換えて考えると、ある出力に対応する入力数が複数ある

とき冗長だということになる。それゆえ、関数のある出力に対応する入力の数が多い程、関数の冗長性が高いと考えられる。

よって本節では、写像 $f : X \rightarrow Y$ のある出力に対応する入力の数、つまり $y \in Y$ に対する集合 $\{x | y = f(x), x \in X\}$ の濃度によって写像の冗長度を定義する。

3.1.1 最大冗長度

DEFINITION 3.1 $q : X \rightarrow 2^X$ が次の式

$$q(x) = \{x' | f(x) = f(x'), x' \in X\} \quad (3.1)$$

を満たす写像であるとする。ここで 2^X は X の巾集合である。

このとき、 f の最大冗長度 $r_{\max}(f)$ を集合 $q(x)$ の濃度 $|q(x)|$ を用いて

$$r_{\max}(f) = \max_{x \in X} |q(x)| \quad (3.2)$$

と定義する。

ここで式 (3.1) の定義より $q(x) \subseteq X$ である。よって式 (3.2) より $r_{\max}(f) \leq |X|$ となる。

EXAMPLE 3.1 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3 - x$ のときの $r_{\max}(f)$ について考える。なお、 f のグラフについては図 3.1 に示す。このとき、 $\frac{df}{dx} = 3x^2 - 1$ より $\frac{df}{dx} = 0$ の解は $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ である。ここで、 $f(x) = f(-\sqrt{\frac{1}{3}})$ を満たす x を a とする (このとき、 $f(-a) = f(\sqrt{\frac{1}{3}})$ である)。そのとき

$$|q(x)| = \begin{cases} 1 & x \in (-\infty, -a), (a, \infty) \\ 2 & x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm a \\ 3 & x \in (-a, -\sqrt{\frac{1}{3}}), (-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}), (\sqrt{\frac{1}{3}}, a) \end{cases} \quad (3.3)$$

よって最大冗長度は $r_{\max}(f) = 3$ である。

3.1.2 有限集合に対する平均冗長度

DEFINITION 3.2 $X \neq \emptyset$ かつ $|X| < \aleph_0$ のとき、平均冗長度 $\bar{r}(f)$ を次のように定義する。

$$\bar{r}(f) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} |q(x)| \quad (3.4)$$

ここで $\aleph_0$ は可算無限集合の濃度を表す。

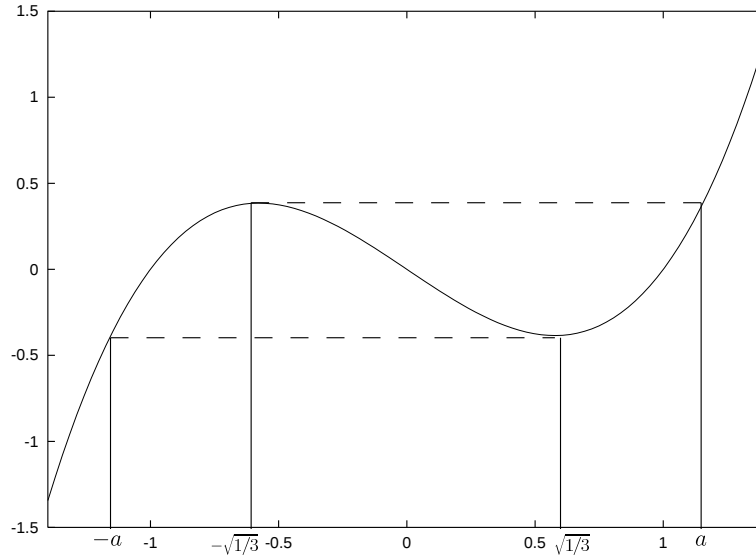


図 3.1: $f(x) = x^3 - x$ のグラフ

EXAMPLE 3.2 $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ における $f : S \rightarrow S; x \mapsto x \pmod{3}$ のときの $\bar{r}(f)$ について考える. このとき

$$\begin{aligned} f(0) &= f(3) = f(6) = f(9) \\ f(1) &= f(4) = f(7) \\ f(2) &= f(5) = f(8) \end{aligned} \tag{3.5}$$

である. よって $x \in \{0, 3, 6, 9\}$ のとき $|q(x)| = 4, x \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ のとき $|q(x)| = 3$ となる.

$$|q(x)| = \begin{cases} 4 & x \in \{0, 3, 6, 9\} \\ 3 & x \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \end{cases} \tag{3.6}$$

また $|S| = 10$ である. よって平均冗長度は

$$\begin{aligned} \bar{r}(f)|q(x)| &= \frac{1}{10}(4 \times 4 + 6 \times 3) \\ &= \frac{17}{5} \end{aligned} \tag{3.7}$$

となる.

3.1.3 無限集合に対する平均冗長度

式 (3.4) の定義は X が無限集合のとき, すなわち $\aleph_0 \leq |X|$ の場合には定義されない. よって, ここでは $\aleph_0 \leq |X|$ の場合に使う測度として平均冗長度 $r_w(f)$ を定義する.

DEFINITION 3.3 $\aleph_0 \leq |X|$ を満たす集合 X 上の同値関係 R を $xRx' \Leftrightarrow |q(x)| = |q(x')|$ とする. そのとき, 集合 W_X を次の式で定義する.

$$W_X = \{[x] \mid |[x]| = |X|, [x] \in X/R\} \quad (3.8)$$

ここで, 同値類 $[x]$ は $[x] = \{x' \mid x' \in X, xRx'\}$ であり, X/R は $[x]$ を元とする X の商集合である.

ここで $|W_X| < \aleph_0$ のとき, 平均冗長度 $r_w(f)$ を

$$r_w(f) = \frac{1}{|W_X|} \sum_{[x] \in W_X} |q(x)| \quad (3.9)$$

と定義する.

EXAMPLE 3.3 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3 - x$ のときの $r_w(f)$ について考える (図 3.1 参照). このとき, $|q(x)|$ については式 (3.3) 同様求められる. ここで

$$\begin{aligned} x \in [x_1] &\Leftrightarrow |q(x)| = 1 \\ x \in [x_2] &\Leftrightarrow |q(x)| = 2 \\ x \in [x_3] &\Leftrightarrow |q(x)| = 3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

としよう. すると $|[x_1]| = |\mathbb{R}|, |[x_2]| \neq |\mathbb{R}|, |[x_3]| = |\mathbb{R}|$ より $W_X = \{[x_1], [x_3]\}$ である. よって平均冗長度 $r_w(f)$ は

$$\begin{aligned} r_w(f) &= \frac{1}{2} \{|q(x_1)| + |q(x_3)|\} \\ &= \frac{1}{2}(1 + 3) \\ &= 2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

である.

上記の定義では, 集合 X 上の同値関係によって同値類を構成し, 式 (3.8) を定義した. 一方, Y 上の同値関係によって同値類を構成することも可能である. よって以下では, Y 上の同値関係によって構成された同値類による平均冗長度 $r_W(f)$ を定義する.

DEFINITION 3.4 $Q : Y \rightarrow 2^X$ が次の式

$$Q(y) = \{x | y = f(x), x \in X\} \quad (3.12)$$

を満たす写像であるとする.

空ではない集合 Y 上の同値関係 R を $yRy' \Leftrightarrow |Q(y)| = |Q(y')|$ とする. そのとき, 集合 W_Y を次の式で定義する.

$$W_Y = \{[y] \mid |[y]| = |Y|, [y] \in Y/R\} \quad (3.13)$$

ここで, 同値類 $[y]$ は $[y] = \{y' | y' \in Y, yRy'\}$ であり, Y/R は $[y]$ を元とする Y の商集合である.

ここで $|W_Y| < \aleph_0$ のとき, 平均冗長度 $r_W(f)$ を

$$r_W(f) = \frac{1}{|W_Y|} \sum_{[y] \in W_Y} |Q(y)| \quad (3.14)$$

と定義する.

なお, $r_w(f)$ と $r_W(f)$ を区別する必要があるときは, 前者を始域の同値類による平均冗長度, 後者を終域の同値類による平均冗長度と呼ぶことにする.

それでは, $r_w(f)$ と $r_W(f)$ ではどのような違いがあるのだろうか. 一般に, $r_W(f)$ は終域 Y の濃度によって相対的に決まるのに対し, $r_w(f)$ は終域 Y には依存しない. そのことを次の例で確かめよう.

EXAMPLE 3.4 $h(x) = x^2$ という関数における平均冗長度について考える. このとき $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto h(x)$ ならば, $r_w(f) = 2$ に対し $r_W(f) = 1$ である. 一方, $f^+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+; x \mapsto f(x)$ のときは $r_w(f) = r_W(f) = 2$ となる. つまり同じ $h(x) = x^2$ という関数であっても, f と f^+ で終域が異なるため $r_W(f) \neq r_W(f^+)$ であるが, 式 (3.9) は終域には依存しないため $r_w(f) = r_w(f^+)$ である.

3.2 関数エントロピー

本節では, 写像 $f : X \rightarrow Y$ のランダムネスを測る指標としてエントロピーを定義する.

3.2.1 有限集合に対する関数エントロピー

ここでは $x \in X$ を確率変数と考え, x がランダムに与えられたときに $y \in Y$ が $y = f(x)$ となる確率を基に写像のエントロピーを定義する.

DEFINITION 3.5 $x \in X$ に対する確率が一様分布関数 $p_X(x) = \frac{1}{|X|}$ で与えられるとき, $y \in Y$ の確率密度関数を次の式で定義する.

$$p(y) = \sum_{x \in Q(y)} p_X(x) \quad (3.15)$$

このとき, f の関数エントロピー $H(f)$ を

$$H(f) = - \sum_{y \in Y} p(y) \log p(y) \quad (3.16)$$

と定義する.

式 (3.16) の定義は, 情報理論におけるエントロピーの定義と同一である [6]. また, f が単射のとき $\forall y \in f(X)$ について $p(y) = \frac{1}{|X|}$ であり, 関数エントロピーは $H(f) = \log |X|$ となる. これは X を始域として持つ写像における $H(f)$ の最大値である.

EXAMPLE 3.5 $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ における $f : S \rightarrow S; x \mapsto x \pmod{3}$ のときの $H(f)$ について考える. このときの $f(x)$ については式 (3.5) となる. よって

$$\begin{aligned} p(0) &= \frac{4}{10} \\ p(1) &= \frac{3}{10} \\ p(2) &= \frac{3}{10} \\ p(y) &= 0 \quad (y \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

である. よって関数エントロピーは $H(f) = 1.0889$ となる.

3.2.2 無限集合に対する関数エントロピー

$\aleph_0 \leq |X|$ の場合には p_X が定義されないため, 式 (3.16) は使えない. よって, ここでは $\aleph_0 \leq |X|$ の場合に使う測度として関数エントロピー $H_w(f)$ を定義する.

DEFINITION 3.6 $|W_X| < \aleph_0$ のとき, f の関数エントロピー $H_w(f)$ を

$$P([x]) = \begin{cases} \frac{1}{|q(x)|} & |q(x)| < \aleph_0 \text{ のとき} \\ 0 & |q(x)| \geq \aleph_0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.18)$$

$$H_w(f) = \frac{1}{|W_X|} \sum_{[x] \in W_X} P([x]) \quad (3.19)$$

と定義する.

式 (3.19) の定義も式 (3.16) と同様, f が単射のとき最大となり, そのときの関数エントロピーは $H_w(f) = 1$ となる.

EXAMPLE 3.6 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3 - x$ のときの $r_w(f)$ について考える (図 3.1 参照). このとき式 (3.3), (3.10) より $q(x)$ と $|q(x)|$ について求められる. すると $|[x_1]| = |\mathbb{R}|, |[x_2]| \neq |\mathbb{R}|, |[x_3]| = |\mathbb{R}|$ より $W_X = \{[x_1], [x_3]\}$ である. よって関数エントロピー $H_w(f)$ は

$$\begin{aligned} H_w(f) &= \frac{1}{2} \{P([x_1]) + P([x_3])\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{3.20}$$

である.

3.3 測度の特徴

ここでは, 本稿で定義した測度が力学系においてどのような意味を持つかについて考察する. 力学系では, 系の複雑さは軌道の周期性によって特徴付けられる. 例えば力学系における複雑さの測度であるパワースペクトル, リアプノフ指数, コルモゴロフ・エントロピーなどは, 軌道が周期を持つか否か, または非周期ならばカオスかそれともランダムかなどの情報を提供する. それでは, 本稿で定義した測度は軌道の周期性に対しどのような特徴を持つだろうか.

まず本稿で定義した測度を力学系に適用する方法について考えよう. ここでは, 力学系の軌道を記号列として表現する方法について述べる [11]. 相空間を n 個の領域に適当に分割し, それぞれの領域に記号集合 $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ の元を割り当てる. すると初期状態 x から出発する軌道は, 分割された領域を次々と訪れることになり, その履歴は分割領域を表す記号の無限列で与えられる (図 3.2). このような無限記号列は記号集合 A の無限直積集合 $\prod_{t=0}^{\infty} A$ に属している. よって, X を力学系の状態空間, Y を無限直積集合 $\prod_{t=0}^{\infty} A$ とすれば, f を初期状態から記号列への写像だと考えることができる.

このような記号列を構成したとき, 力学系において軌道が周期を持つ場合は, 対応する記号列は必ず周期を持つ. 一方, 非周期軌道のときは記号列が非周期となる場合がある¹. また, 周期を持つ記号列は有理数に, 非周期の記号列は無理数に対応付けることができる. よって, 力学系が常に周期解を持つ場合は $|f(X)| \leq \aleph_0$ であり, 準周期やカオス (非可算無限個の非周期解と可算無限個の周期解を持つ [2]) の場合は $|f(X)| \leq \aleph$ となる.

¹相空間をマルコフ分割 [4] した場合は, 非周期軌道に対応する記号列は必ず非周期となる.

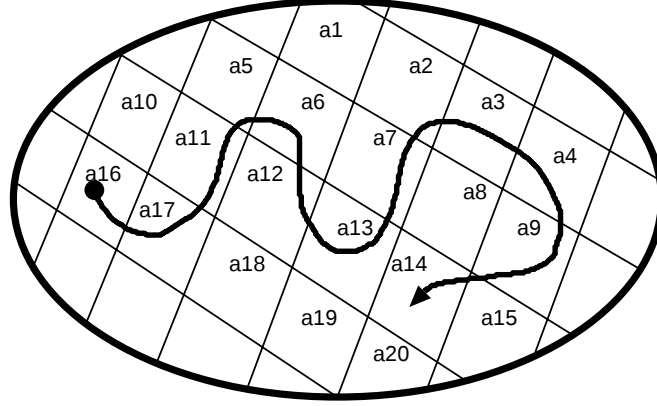


図 3.2: 相空間の分割による軌道から記号列への対応付け

それでは, 力学系が周期をもつか否かで冗長度や関数エントロピーの取る値が異なることを示そう. そのために, まず次の定理を示す.

THEOREM 3.1 $f : X \rightarrow Y$ において $\aleph_0 \leq |X|$ かつ $|f(X)| < |X|$ のとき

1. $|X| \leq |Y|$ ならば $r_W(f) = 0$
2. $H_w(f) = 0$

が成り立つ.

PROOF 3.1 まず 1. について証明する. $y \in f(X)$ ならば $[y] \subseteq f(X)$ なので $|[y]| \leq |f(X)|$, かつ

$$|[y]| \leq |f(X)| \quad (3.21)$$

である. また, $|f(X)| < |X|$ と $|X| \leq |Y|$ より

$$|f(X)| < |Y| \quad (3.22)$$

である. よって式 (3.21), (3.22) より $[y] \neq |Y|$ なので $[y] \notin W_Y$ である. また, $y \in Y - f(X)$ ならば $Q(y) = \emptyset$ より $|Q(y)| = 0$ である. それゆえ $\forall [y] \in W_Y$ について $|Q(y)| = 0$ である. よって式 (3.14) より $r_W(f) = 0$ である.

次に 2. について証明する. $x \in X$ が $|q(x)| < \aleph_0$ を満たすと仮定する. すると $\{z | z = q(x), x \in X\}$ と $|f(X)|$ に一対一対応が存在するため

$$|[x]| \leq |q(x) \times f(X)| \quad (3.23)$$

である. すると $|f(X)| < |X|$ かつ $|q(x)| < \aleph_0$ かつ $\aleph_0 \leq |X|$ より $[x] < |X|$. よって $[x] \notin W_X$ である. 一方 $|q(x)| \geq \aleph_0$ のときは定義より $P([x]) = 0$ である. それゆえ $\forall [x] \in W_X$ について $P([x]) = 0$ である. よって式 (3.19) より $H_w(f) = 0$ である. ■

定理 3.1 より, $|f(X)| \leq \aleph_0$ ならば $r_W(f) = 0$ かつ $H_w(f) = 0$ である. また, 平均冗長度 $r_w(f)$ についても $r_w(f) = \aleph$ であると予想される. 一方 $|f(X)| = \aleph$ ならば $1 \leq r_w(f) \leq \aleph, 1 \leq r_W(f) \leq \aleph, 0 \leq H_w(f) \leq 1$ である. よって力学系が周期を持つかどうかで冗長度や関数エントロピーの取る値は異なる.

よって冗長度や関数エントロピーは力学系における軌道の周期性を反映しており, 力学系における複雑さを表現しているといえる.

表 3.1: 力学系の周期と測度との関係

	周期	非周期
平均冗長度 $r_w(f)$	$\aleph$	$1 \sim \aleph$
平均冗長度 $r_W(f)$	0	$1 \sim \aleph$
関数エントロピー $H_w(f)$	0	$0 \sim 1$

第 4 章

写像のダイナミクス

ここでは、第 2 章で導入した式 (2.1) のダイナミクスについて、第 3 章で示した測度を用いて調べる。

4.1 冗長度の変化

f_n の冗長度が変化するときのメカニズムについて考察する。

冗長度は式 (3.1) の $q(x)$ によって決まり、 $|q(x)|$ の値が大きい程冗長度も大きくなる。一般に、式 (2.1) のダイナミクスにより $|q(x)|$ が増加するのは $a, b \in S_{n+1}$ に対し $f_n \circ g_n^*(a) \neq f_n \circ g_n^*(b)$ で、かつ $g \circ f_n \circ g_n^*(a) = g \circ f_n \circ g_n^*(b)$ のときである。一方、 $|q(x)|$ が減少するのは $f_n(x) = f_n(y)$ を満たす $x, y \in S_n$ に対し、 $x \in g_n^*(S_{n+1})$ でかつ $y \notin g_n^*(S_{n+1})$ のときである。なぜなら、 y に対応する元が S_{n+1} に存在しないため、その分だけ $q(g(x))$ の濃度は $q(x)$ より小さくなるからである。これらを模式的に図 4.1, 4.2 で示す。

これらのことから、次のことが解る。

THEOREM 4.1 g が単射のとき、冗長度について次の条件が成り立つ。

1. $r_{\max}(f_n) \geq r_{\max}(f_{n+1})$ である。
2. g_n^* が全射ならば、 $\bar{r}(f_n) = \bar{r}(f_{n+1})$ である。
3. g_n^* が全射ならば、 $r_w(f_n) = r_w(f_{n+1})$ である。

PROOF 4.1 ここでは写像 f_n に対する式 (3.1) の $q(x)$ を $q_n(x)$ と記述することにする。まず、 $a \in S_{n+1}$ のとき $|q_{n+1}(a)| = |\{x | f_n \circ g_n^*(a) = f_n(x), x \in g_n^*(S_{n+1})\}|$ であることを示

す. g が単射なので, $x, y \in S$ に対し $g(x) = g(y)$ ならば $x = y$ である. よって式 (2.1) より, $a, b \in S_{n+1}$ に対し $f_{n+1}(a) = f_{n+1}(b)$ ならば $f_n \circ g_n^*(a) = f_n \circ g_n^*(b)$ である. ここから

$$q_{n+1}(a) = \{a' | f_n \circ g_n^*(a) = f_n \circ g_n^*(a'), a' \in S_{n+1}\} \quad (4.1)$$

が導かれる. 定理 2.1 の 1 より g_n^* は単射なので, 写像 $F : q_{n+1}(a) \rightarrow g_n^*(q_{n+1}(a)); x \mapsto g_n^*(x)$ は全単射となる. よって $q_{n+1}(a)$ と $g_n^*(q_{n+1}(a))$ には一対一対応が存在するため

$$|q_{n+1}(a)| = |g_n^*(q_{n+1}(a))| \quad (4.2)$$

である. また $q_{n+1}(a) = \{a' | f_n \circ g_n^*(a) = f_n \circ g_n^*(a'), a' \in S_{n+1}\}$ より $g_n^*(q_{n+1}(a)) = \{x | f_n \circ g_n^*(a) = f_n(x), x \in g_n^*(S_{n+1})\}$ である. よって

$$|q_{n+1}(a)| = |\{x | f_n \circ g_n^*(a) = f_n(x), x \in g_n^*(S_{n+1})\}| \quad (4.3)$$

である.

それでは, 最初に 1. について証明する. $g_n^*(S_{n+1}) \subseteq S_n$ より

$$\{x | f_n \circ g_n^*(a) = f_n(x), x \in g_n^*(S_{n+1})\} \subseteq q_n(g_n^*(a)) \quad (4.4)$$

である. よって式 (4.3), (4.4) より $|q_{n+1}(a)| \leq |q_n(g_n^*(a))|$ である. これは任意の $a \in S_{n+1}$ に対して成り立つ. したがって $r_{\max}(f_n) \geq r_{\max}(f_{n+1})$ である.

次に 2. について証明する. g_n^* が全射なので, $g_n^*(S_{n+1}) = S_n$ である. よって $\{x | f_n \circ g_n^*(a) = f_n(x), x \in g_n^*(S_{n+1})\} = q_n(g_n^*(a))$ である. 定理 2.1 の 1 より g_n^* は全単射なので, すべての $x \in S_n$ に対し一対一対応する $x = g_n^*(a), a \in S_{n+1}$ が存在し, $|q_n(x)| = |q_{n+1}(a)|$ である. また g_n^* が全単射なので, $|S_n| = |S_{n+1}|$ である. よって, $\bar{r}(f_n) = \bar{r}(f_{n+1})$ である.

同様に 3. についても成り立つことは自明である. ■

THEOREM 4.2 g_n^* が全射のとき, $\bar{r}(f_n) \leq \bar{r}(f_{n+1})$ である.

PROOF 4.2 ここでは写像 f_n に対する式 (3.1) の $q(x)$ を $q_n(x)$ と記述することにする.

定理 2.1 の 1 より g_n^* は単射であり, かつ条件より全射でもあるので, g_n^* は全単射である.

よって $x, y \in S_n$ に対し一対一対応する $x = g_n^*(a), y = g_n^*(b), a, b \in S_{n+1}$ が存在し, $f_n(x) = f_n(y)$ ならば $f_n \circ g_n^*(a) = f_n \circ g_n^*(b)$ である.

そして式 (2.1) より, $f_n \circ g_n^*(a) = f_n \circ g_n^*(b)$ ならば $f_{n+1}(a) = f_{n+1}(b)$ である. よって, $f_n(x) = f_n(y)$ ならば $f_{n+1}(a) = f_{n+1}(b)$ が導かれる.

したがって $x \in S_n, a \in S_{n+1}, x = g_n^*(a)$ のとき $|q_n(x)| \leq |q_{n+1}(a)|$ である.

以上の結果と式 (3.4) より $\bar{r}(f_n) \leq \bar{r}(f_{n+1})$ が成り立つ. ■

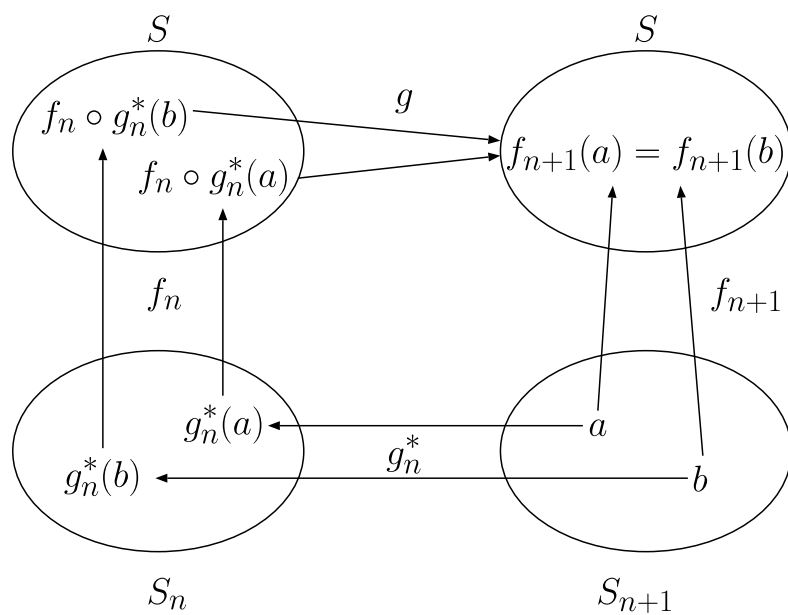


図 4.1: 冗長度が増加するときのダイナミクスの模式図

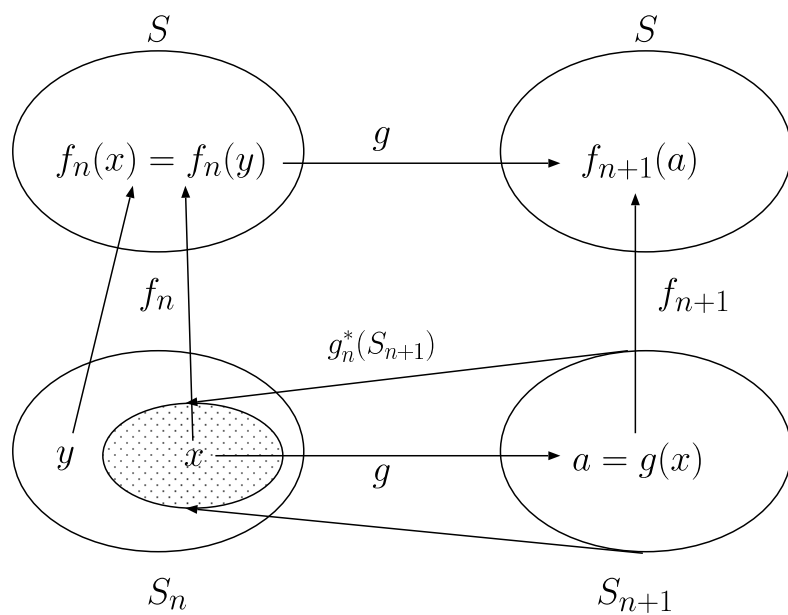


図 4.2: 冗長度が減少するときのダイナミクスの模式図

第 5 章

シミュレーション

本章では, 写像 f_n, g を区間 $[0, 1]$ 上で定義された関数とし, シミュレーション結果を基にそのダイナミクスの持つ性質について議論する.

5.1 実験条件

ここでは, シミュレーションの条件について説明する.

g については, ロジスティック写像 $ax(1-x)$ とテント写像 $a(0.5 - |x - 0.5|)$ の 2 種類を対象とする (図 5.1). また, f_0 としては x^2 , $x + 0.3 \pmod{1}$, $\frac{2}{\pi} \arctan(2x - 1) + 0.5$ の 3 種類とする (図 5.2). ここで f_0 として上記の 3 種類を選んだ理由は (1) 線形か非線形か, (2) 連続か不連続か, (3) 関数が多項式かどうか, などの関数の性質がダイナミクスにどのような影響を与えるかを見るためである.

$\{g_i^*\}_{i=0}^\infty$ については次のように決める. 多対一の写像を区分的に一对一写像とするように g を分割し, それぞれの一对一写像の逆写像の中から $S_n \cap g_n^*(S_{n+1}) \neq \emptyset$ となるものを g_n^* とする. 上の条件を満たす g_n^* の具体的な構成方法としては, 以下の方法を取る. まず $x_0 \in S_0$ を満たす x_0 を一つ決め, g による反復合成によって生成される無限列 $\{x_0, g(x_0), g^2(x_0), \dots\} = \{g^i(x_0)\}_{i=0}^\infty$ を考える. 次に, g を $[0, 0.5]$ と $(0.5, 1]$ で左右に分割し, それぞれの一对一写像の逆写像の中から $g^n(x_0) \in g_n^*(S_{n+1})$ を満たすものを g_n^* とする. なお, 本稿では $\{g_i^*\}_{i=0}^\infty$ を決定するパラメータ x_0 の値を 0.4375 と 0.75 の 2 種類とする.

シミュレーション方法としては, $[0, 1]$ 区間を 4000 個に分割し, それぞれの区間内の一点を用いて計算を行った. なお, シミュレーションでは離散値しか扱うことができないので, 平均冗長度, 関数エントロピーについては式 (3.4) および式 (3.16) を使用する. また, 式 (3.1) の $q(x)$ の計算方法としては, 分割された区間において y が x と同じ区間に含まれるとき

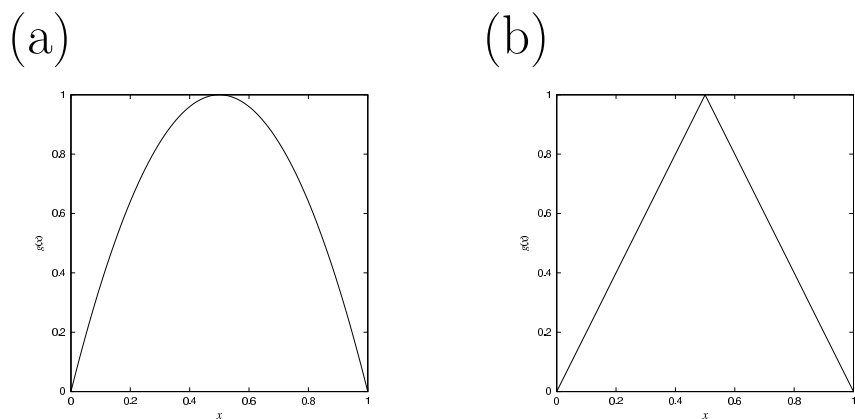


図 5.1: シミュレーションで使用する写像 g のグラフ

(a) ロジスティック写像 $ax(1-x)$ の $a = 4$ におけるグラフ. (b) テント写像 $a(0.5 - |x - 0.5|)$ の $a = 2$ におけるグラフ.

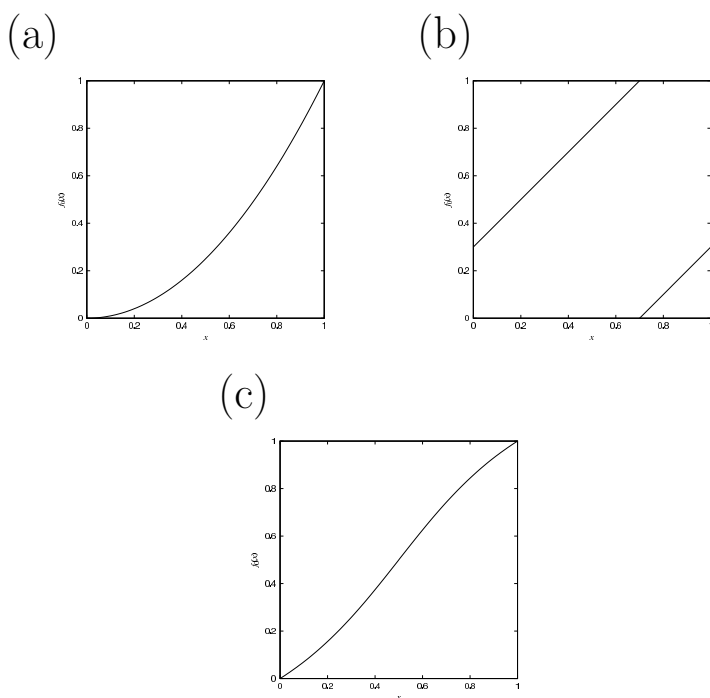


図 5.2: シミュレーションで使用する写像 f_0 のグラフ

(a) x^2 のグラフ. (b) $x + 0.3 \pmod{1}$ のグラフ. (c) $\frac{2}{\pi} \arctan(2x - 1) + 0.5$ のグラフ.

$y \in q(x)$ とした.

5.2 結果

ここでは, シミュレーションによって得られた結果を示す.

まず f_n がどのように時間発展していくかという例を示そう. g がロジスティック写像で $f_0(x) = x^2$ であるときの f_n のダイナミクスを図 5.3, 5.4 に示した. 次に, g がテント写像で $f_0(x) = x^2$ であるときの f_n のダイナミクスを図 5.5 に示した.

それでは, 次に冗長度および関数エントロピーがどのように時間変化しているかを示す. g がロジスティック写像のときの冗長度の時系列のグラフを図 5.6 に, 関数エントロピーの時系列のグラフを図 5.7 に示す. ここから見て取れるように, f_n の冗長度は時間発展に伴い大きく変動している. また, 関数エントロピー $H(f_n)$ については f_0 の違いに関わらずほぼ等しいダイナミクスを示している. 次に, g がテント写像のときの冗長度の時系列のグラフを図 5.8 に, 関数エントロピーの時系列のグラフを図 5.9 に示す. 図 5.6 との比較より, ロジスティック写像に比べテント写像では冗長度の振幅が非常に小さいことが解る. またロジスティック写像におけるダイナミクスと同様, テント写像においても関数エントロピー $H(f_n)$ のダイナミクスが f_0 によらずほぼ等しくなる.

次に, f_n の平均冗長度および関数エントロピーを時間平均した結果について示す. g がロジスティック写像のときの平均冗長度の時間平均を図 5.10 に, 関数エントロピーの時間平均を図 5.11 に示した. また, g がテント写像のときの平均冗長度の時間平均を図 5.12 に, 関数エントロピーの時間平均を図 5.13 に示した. これらの図から, 次のことが見て取れる. g がロジスティック写像のときは平均冗長度が大きな値をとる場合があるが, テント写像のときは (ロジスティック写像の場合と比べると) パラメータ a の変化に対してほとんど変化しないことが解る. また, 平均冗長度の時間平均に関しては f_0 の違いによって異なる結果を示しているが, 関数エントロピーに関しては f_0 の違いによらずほとんど同じ値を取っている.

また, 図 5.14, 5.15 より関数エントロピー $H(f)$ の時間平均と g のリアプノフ指数 [2][4] との間には明らかな関連が見出される.

5.3 考察

上記のシミュレーションにより得られた結果は以下のようなものである.

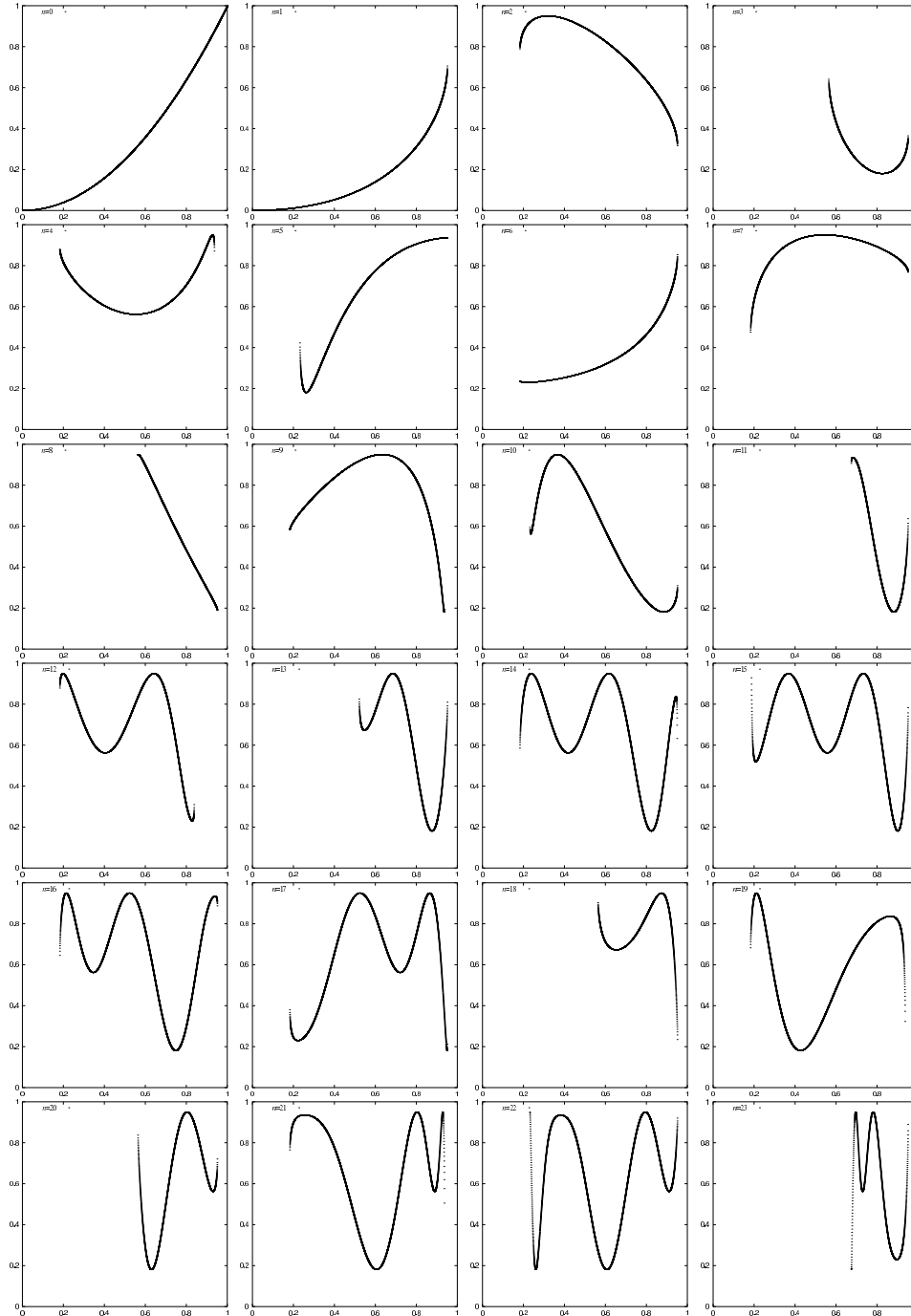


図 5.3: ロジスティック写像 g による f_n の時間発展 (1)

ロジスティック写像 $g(x) = ax(1-x)$ で $f_0(x) = x^2$ を変換するときの f_n のグラフを、左上から右に向かって時間発展していくように並べている ($0 \leq n \leq 23$, $a = 3.8, x = 0.4375$). f_n の時間発展において冗長度の増加と減少の両方が発生していることが解る.

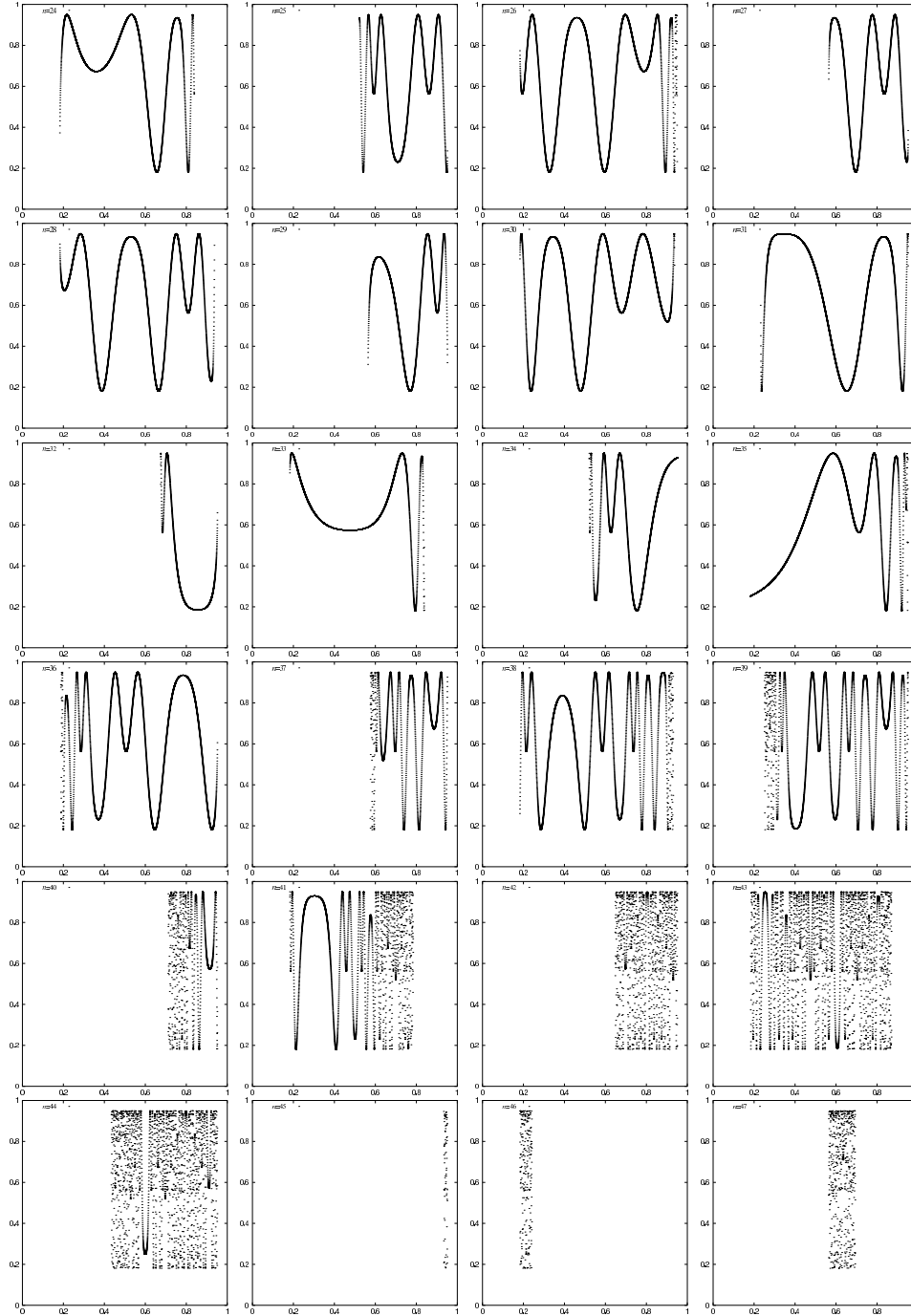


図 5.4: ロジスティック写像 g による f_n の時間発展 (2)

ロジスティック写像 $g(x) = ax(1-x)$ で $f_0(x) = x^2$ を変換するときの f_n のグラフを、左上から右に向かって時間発展していくように並べている ($24 \leq n \leq 47$, $a = 3.8$). f_n の冗長度が時間発展に伴い大きく変動していることが見て取れる.

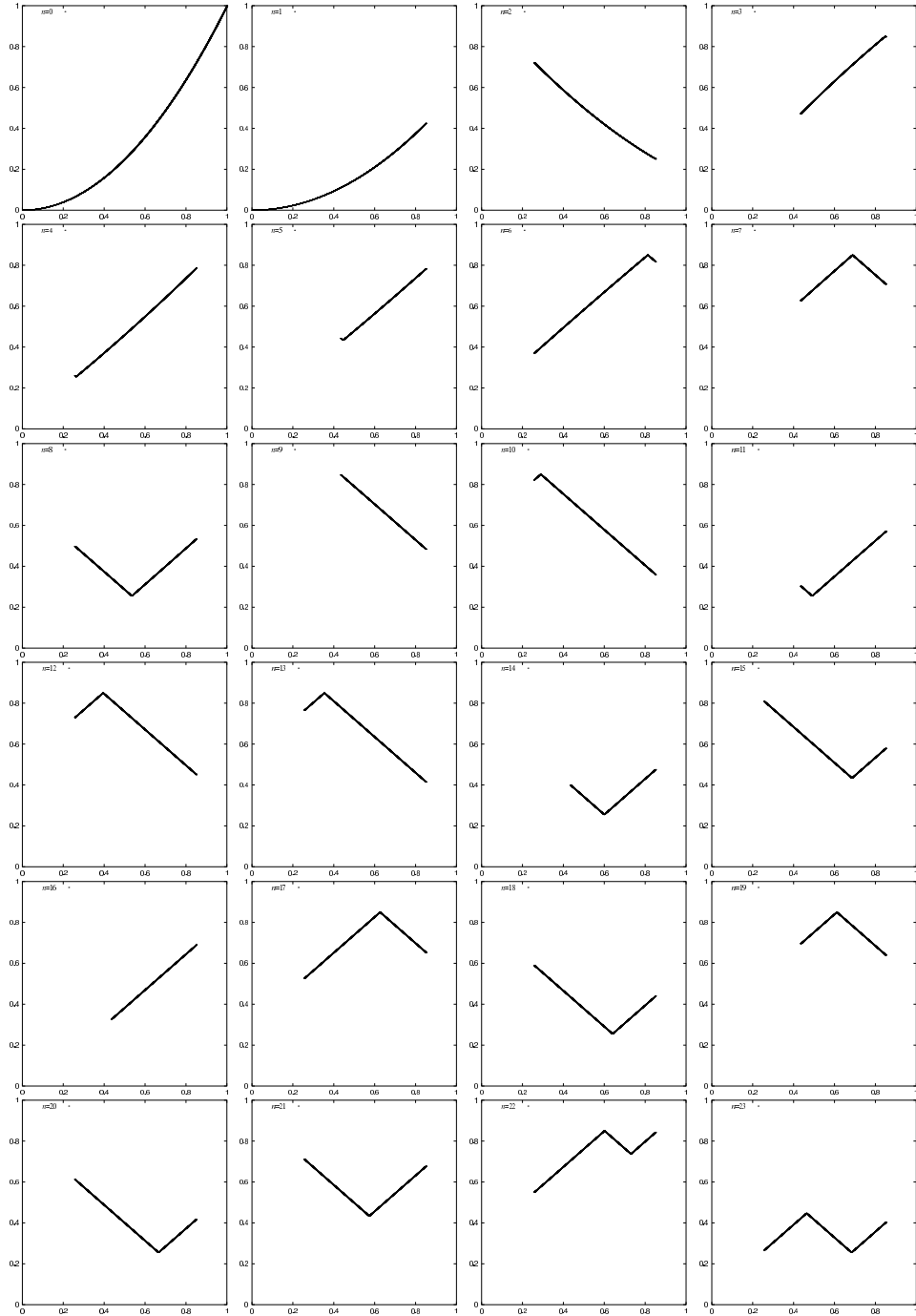


図 5.5: テント写像 g による f_n の時間発展

テント写像 $g(x) = a(0.5 - |x - 0.5|)$ で $f_0(x) = x^2$ を変換するときの f_n のグラフを, 左上から右に向かって時間発展していくように並べている ($0 \leq n \leq 23$, $a = 1.7, x = 0.4375$). g がロジスティック写像の場合と比べ, f_n にそれほど大きな変動は見られない.

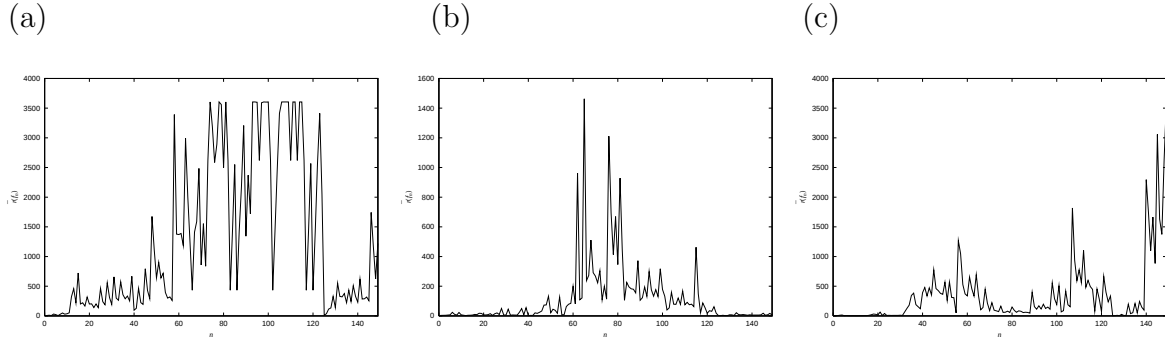


図 5.6: g がロジスティック写像のときの平均冗長度 $\bar{r}(f_n)$ の時間発展

縦軸が平均冗長度 $\bar{r}(f_n)$, 横軸が n のグラフ ($0 \leq n < 150, a = 3.9, x = 0.75$). 各グラフにおける初期関数 f_0 は (a) x^2 , (b) $x + 0.3 \pmod{1}$, (c) $\frac{2}{\pi} \arctan(2x - 1) + 0.5$, である. 初期関数 f_0 の違いによって冗長度の時間変化の仕方が異なっている. また, どの初期関数の場合においても冗長度は大きく変動していることが解る.

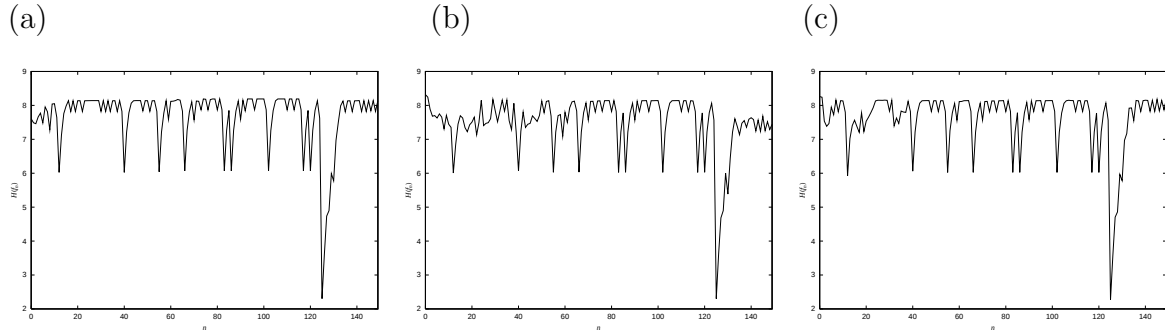


図 5.7: g がロジスティック写像のときの関数エントロピー $H(f_n)$ の時間発展

縦軸が関数エントロピー $H(f_n)$, 横軸が n のグラフ ($0 \leq n < 150, a = 3.9$). 各グラフにおける初期関数 f_0 は (a) x^2 , (b) $x + 0.3 \pmod{1}$, (c) $\frac{2}{\pi} \arctan(2x - 1) + 0.5$, である. 初期関数 f_0 が異なるにも関わらず, 関数エントロピーの時間変化の仕方はほぼ等しい.

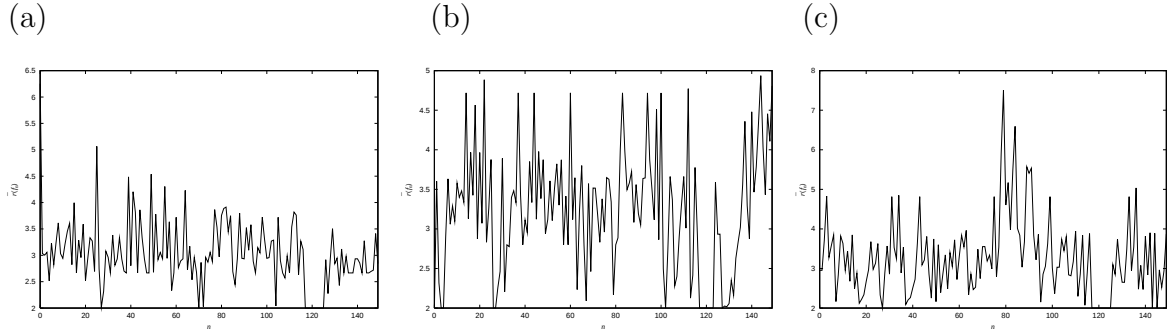


図 5.8: g がテント写像のときの平均冗長度 $\bar{r}(f_n)$ の時間発展

縦軸が平均冗長度 $\bar{r}(f_n)$, 横軸が n のグラフ ($0 \leq n < 150, a = 1.8$). 各グラフにおける初期関数 f_0 は (a) x^2 , (b) $x + 0.3 \pmod{1}$, (c) $\frac{2}{\pi} \arctan(2x - 1) + 0.5$, である. 初期関数 f_0 の違いによって冗長度の時間変化の仕方が異なることが解る. また, ロジスティック写像の場合と比べ振幅の大きさが小さい.

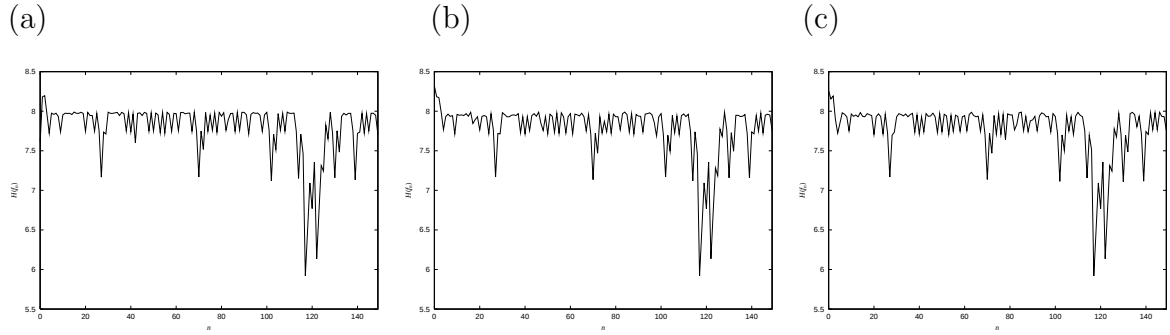


図 5.9: g がテント写像のときの関数エントロピー $H(f_n)$ の時間発展

縦軸が関数エントロピー $H(f_n)$, 横軸が n のグラフ ($0 \leq n < 150, a = 1.8$). 各グラフにおける初期関数 f_0 は (a) x^2 , (b) $x + 0.3 \pmod{1}$, (c) $\frac{2}{\pi} \arctan(2x - 1) + 0.5$, である. 初期関数 f_0 が異なるにも関わらず, 関数エントロピーの時間変化の仕方はほぼ等しい.

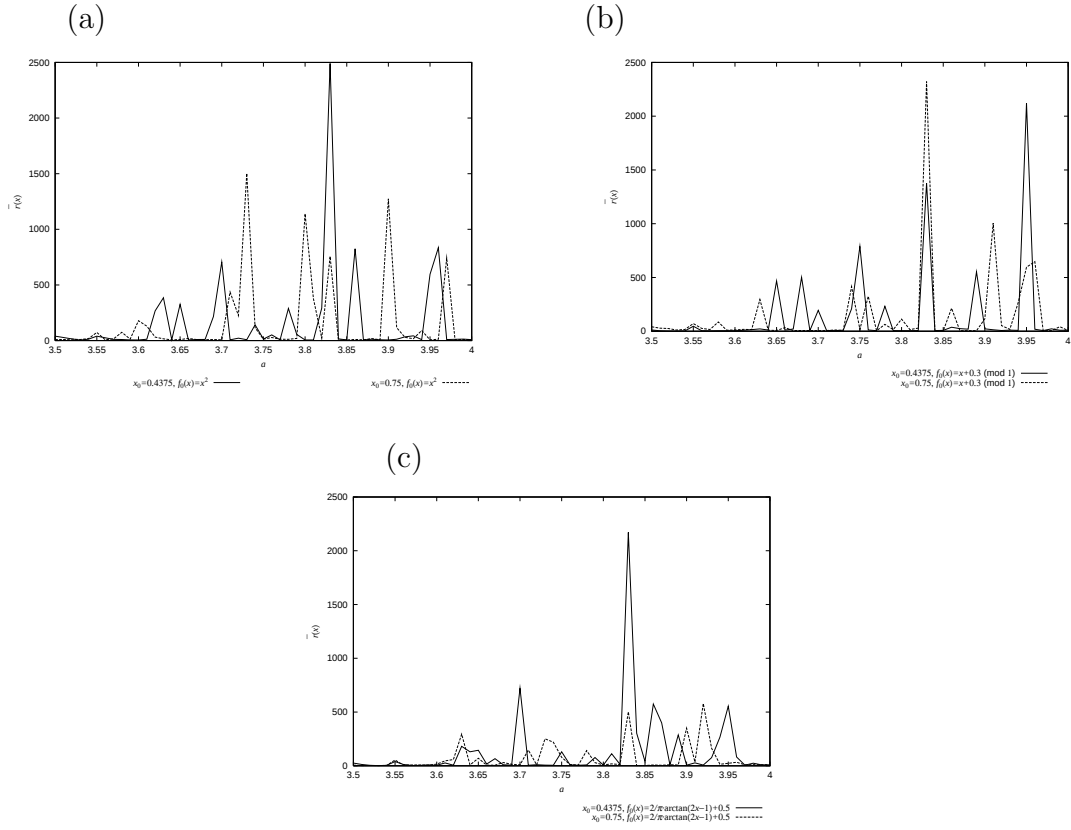


図 5.10: g がロジスティック写像のときの平均冗長度 $\bar{r}(f_n)$ の時間平均

縦軸が平均冗長度 $\bar{r}(f_n)$ の時間平均値 ($0 \leq n < 150$). 横軸がロジスティック写像 $g(x) = ax(1-x)$ におけるパラメータ a の値 (刻み幅は 0.01). 各グラフにおける初期関数 f_0 は (a) x^2 , (b) $x + 0.3 \pmod{1}$, (c) $\frac{2}{\pi} \arctan(2x-1) + 0.5$, である. パラメータ a の値によって平均冗長度 $\bar{r}(f_n)$ の取る値が大きく異なる.

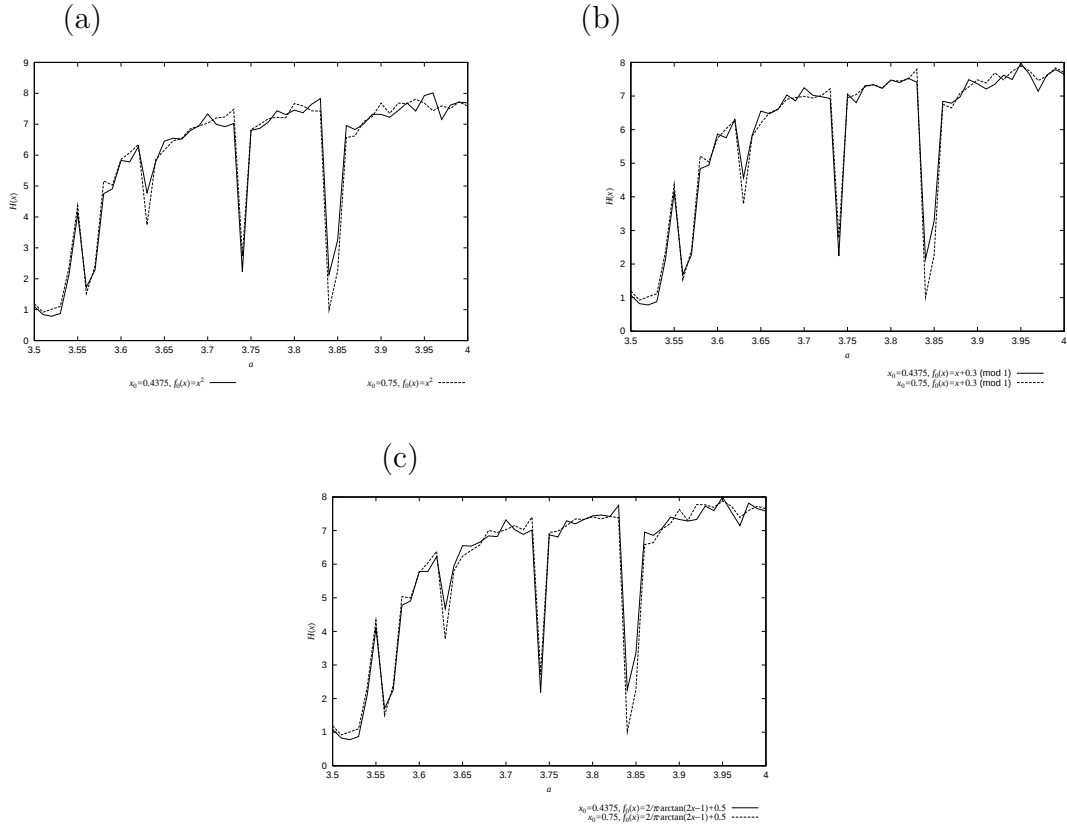


図 5.11: g がロジスティック写像のときの関数エントロピー $H(f_n)$ の時間平均

縦軸が関数エントロピー $H(f_n)$ の時間平均値 ($0 \leq n < 150$). 横軸がロジスティック写像 $g(x) = ax(1 - x)$ におけるパラメータ a の値 (刻み幅は 0.01). 各グラフにおける初期関数 f_0 は (a) x^2 , (b) $x + 0.3 \pmod{1}$, (c) $\frac{2}{\pi} \arctan(2x - 1) + 0.5$, である. f_0 の違いに関わらず, 関数エントロピー $H(f_n)$ の取る値はほとんど等しい.

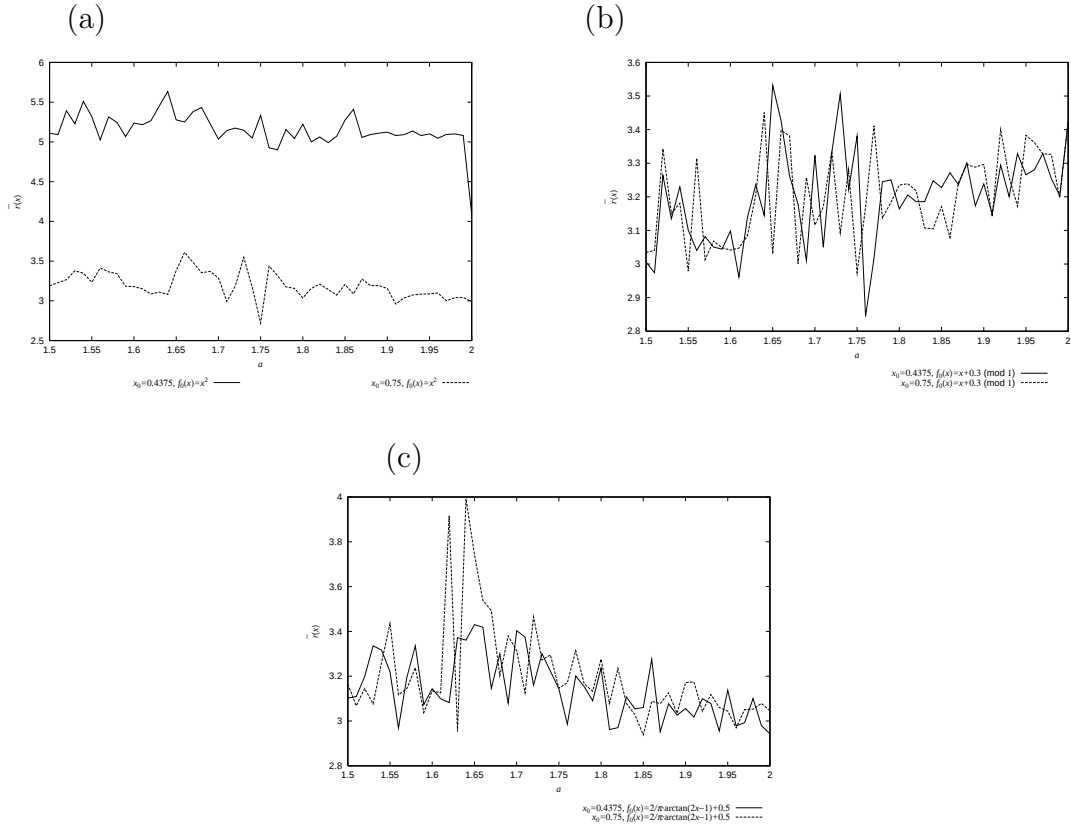


図 5.12: g がテント写像のときの平均冗長度 $\bar{r}(f_n)$ の時間平均

縦軸が平均冗長度 $\bar{r}(f_n)$ の時間平均値 ($0 \leq n < 150$). 横軸がテント写像 $g(x) = a(0.5 - |x - 0.5|)$ におけるパラメータ a の値 (刻み幅は 0.01). 各グラフにおける初期関数 f_0 は (a) x^2 , (b) $x + 0.3 \pmod{1}$, (c) $\frac{2}{\pi} \arctan(2x - 1) + 0.5$, である. パラメータ a の変化に対して平均冗長度 $\bar{r}(f_n)$ はあまり大きく変化しない.

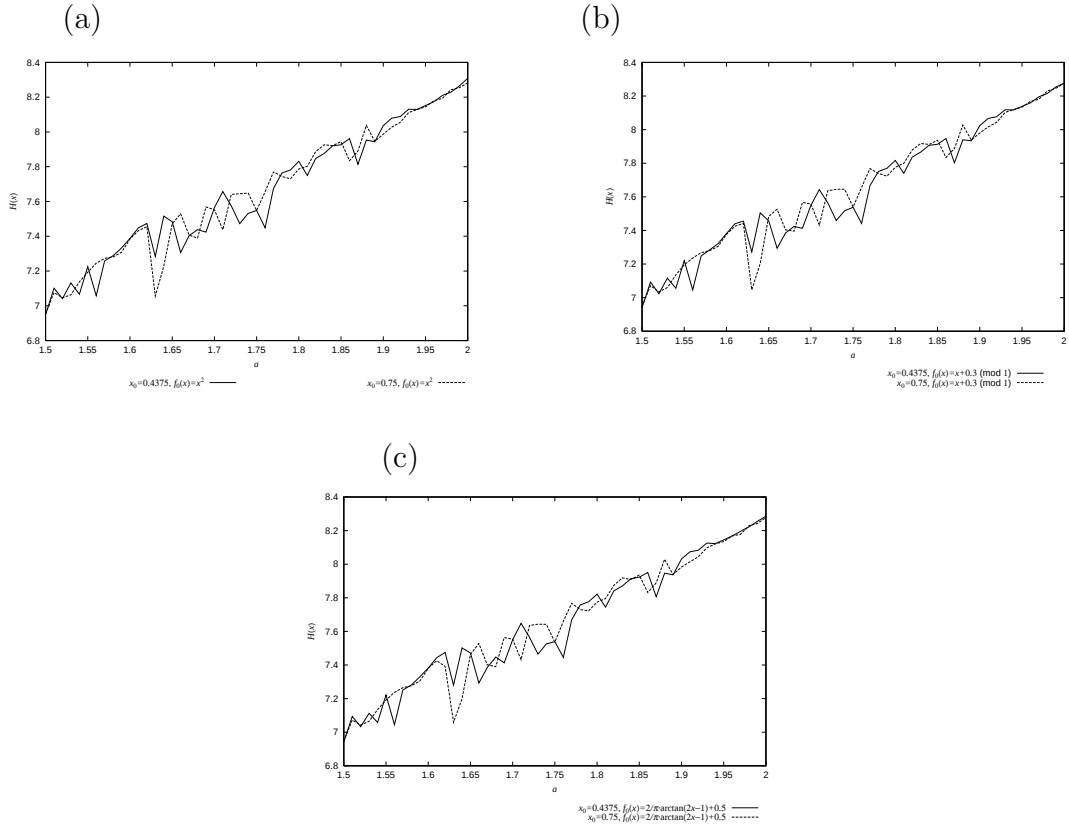


図 5.13: g がテント写像のときの関数エントロピー $H(f_n)$ の時間平均

縦軸が関数エントロピー $H(f_n)$ の時間平均値 ($0 \leq n < 150$). 横軸がテント写像 $g(x) = a(0.5 - |x - 0.5|)$ におけるパラメータ a の値 (刻み幅は 0.01). 各グラフにおける初期関数 f_0 は (a) x^2 , (b) $x + 0.3 \pmod{1}$, (c) $\frac{2}{\pi} \arctan(2x - 1) + 0.5$, である. パラメータ a の増加に対し関数エントロピー $H(f_n)$ は単調増加する傾向にある.

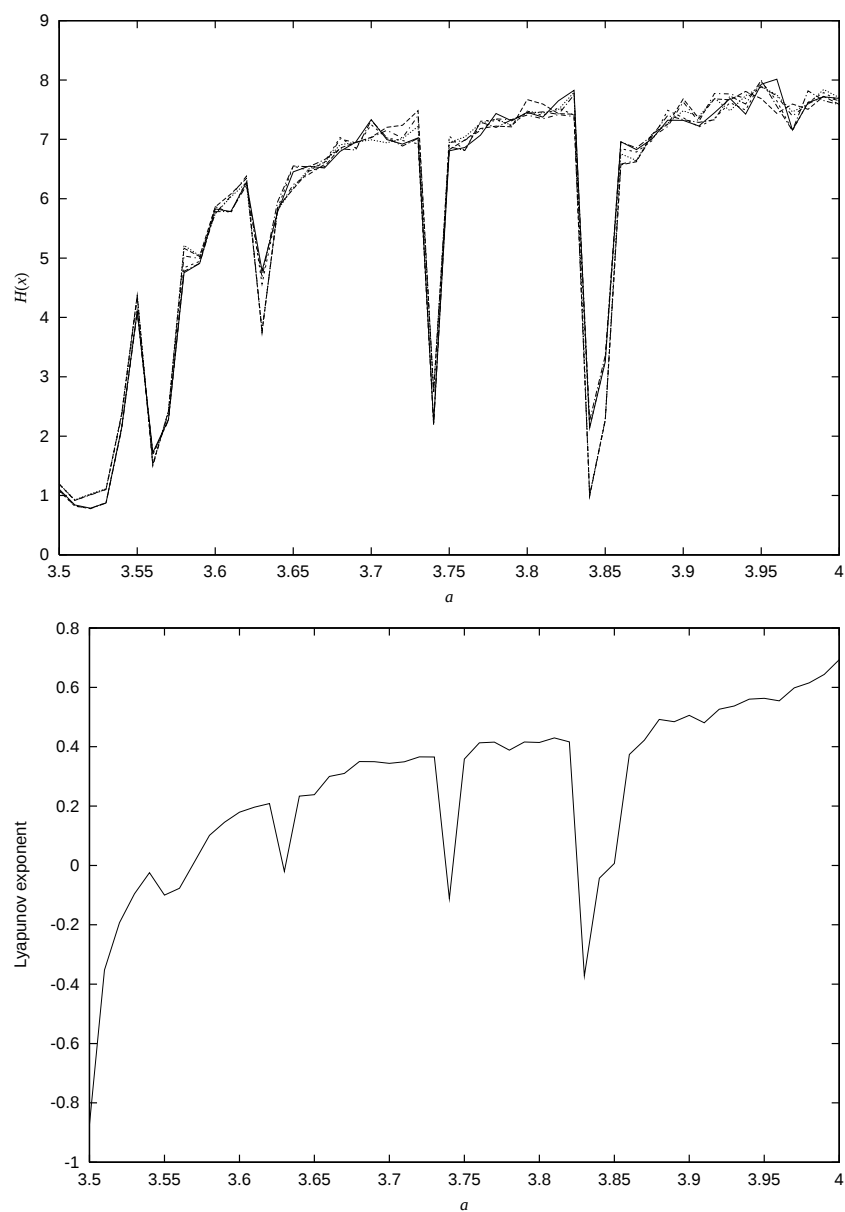


図 5.14: g がロジスティック写像のときの関数エントロピーとリアプノフ指数の比較

上のグラフが図 5.11 のグラフをそれぞれ重ね描きしたもので, 縦軸が関数エントロピー $H(f_n)$ の時間平均値. 下のグラフが g のリアプノフ指数で, 縦軸がリアプノフ指数の値. 横軸は上下のグラフ共にロジスティック写像 $g(x) = ax(1-x)$ におけるパラメータ a の値である.(刻み幅は 0.01).

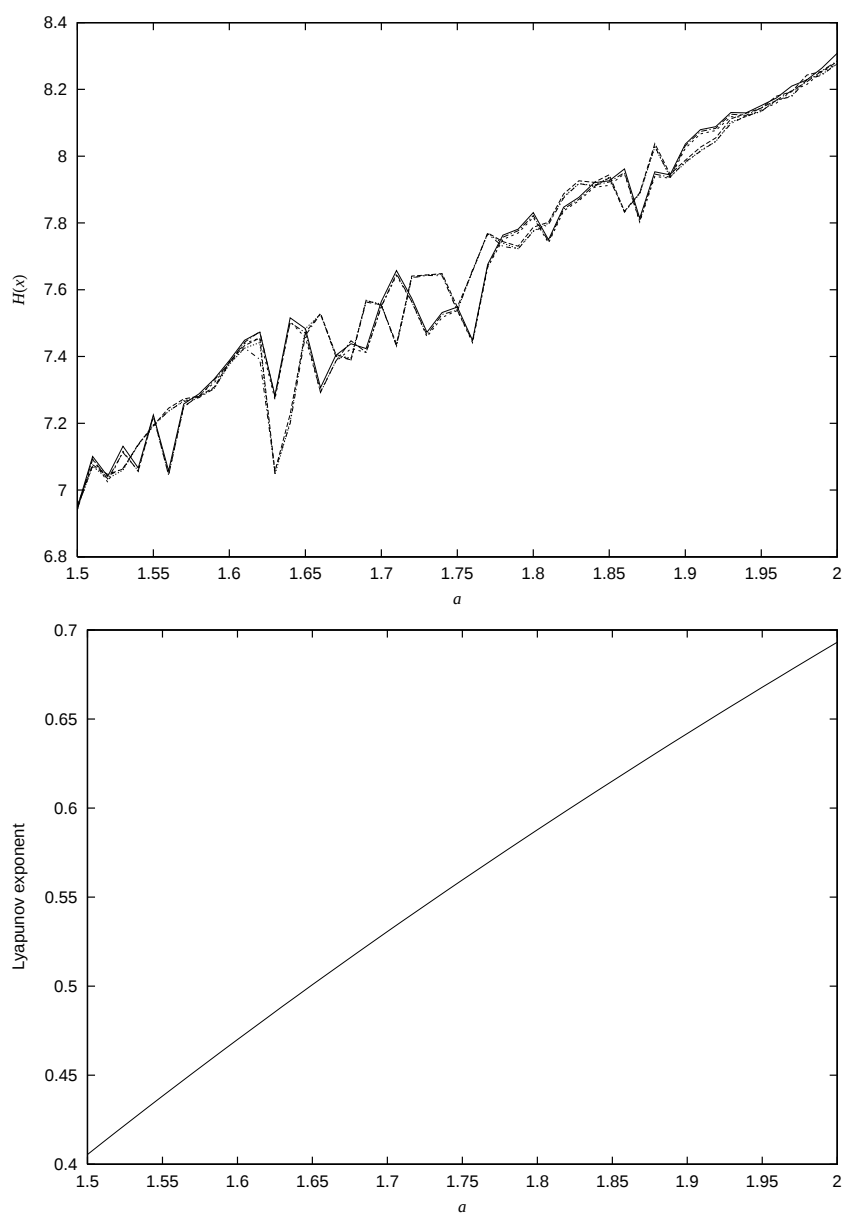


図 5.15: g がテント写像のときの関数エントロピーとリアプノフ指数の比較

上のグラフが図 5.13 のグラフをそれぞれ重ね描きしたもので, 縦軸が関数エントロピー $H(f_n)$ の時間平均値. 下のグラフが g のリアプノフ指数で, 縦軸がリアプノフ指数の値. 横軸は上下のグラフ共にテント写像 $g(x) = a(0.5 - |x - 0.5|)$ におけるパラメータ a の値である.(刻み幅は 0.01).

1. 写像 g がロジスティック写像の場合は式 (2.1) 冗長度が変化するが, テント写像の場合は大きな変化が見られない.
2. 関数エントロピー $H(f_n)$ と写像 g のリアプノフ指数との間に関連がある.

まず 1. について考える. なぜロジスティック写像とテント写像で結果が異なるのだろうか. その理由としては, 写像 g, g_n^* における像の圧縮と伸長の非一様性が考えられる. なお, ここでは g における像の圧縮を連続区間 X に対し $g(X)$ の区間が小さくなることとし, 伸長とは逆に区間が大きくなることとする.

テント写像の場合, 任意の連続区間 X に対して $g_n^*(X)$ の区間の長さは常に X の $\frac{1}{a}$ 倍である (a はテント写像の傾きの絶対値). また, $g(X)$ の区間は (X が 0.5 を含むことによる折り畳みを除けば) 常に X の a 倍である. よって, もし $a \geq 1$ ならば g_n^* では区間 X は常に圧縮され, g では伸長される. ここで重要なのは, g_n^* による圧縮と g による伸長の比率が常に等しいということである (図 5.16). 一般に, $f_n \circ g_n^*(S_{n+1})$ の区間が大きいときに f_{n+1} の冗長度は増加する傾向にあり, 逆に $f_n \circ g_n^*(S_{n+1})$ の区間が小さいとき冗長度は減少する傾向にある. 式 (2.1) より $f_n = g \circ f_{n-1} \circ g_{n-1}^*$ であることに注意すると, もし g_n^* による圧縮の比率が g による伸長の比率を上回っていれば冗長度は減少し, 下回っていれば増加するという傾向にあることが解る. しかしながらテント写像では圧縮と伸長の割合が等しい. そのため冗長度がほとんど変化しない.

一方ロジスティック写像の場合, $g(X)$ および $g_n^*(X)$ の区間は X によって圧縮される場合と伸長される場合が存在し, しかもその比率も一様ではない (図 5.17). よって, ロジスティック写像の場合は冗長度の増減が起こる.

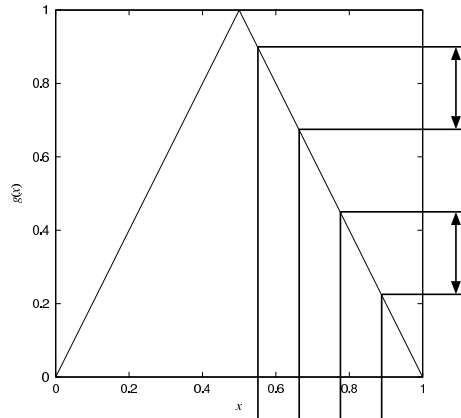


図 5.16: g がテント写像のときの像の伸長

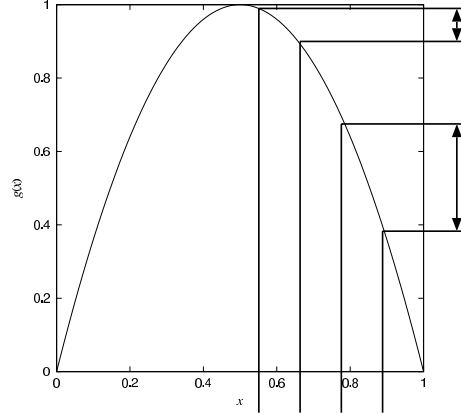


図 5.17: g がロジスティック写像のときの像の伸長

以上の結果および考察から, 冗長さの変化には g, g_n^* における像の圧縮と伸長の非一様性に関係していることが解る.

次に 2. について考察する. 一般にリアプノフ指数とは, 力学系において近接している軌道が時間と共に離れていく割合を対数で表現したものある. 一方, 関数エントロピー $H(f)$ は式 (3.16) より写像 $f: X \rightarrow Y$ の入力ランダムに与えられたときの出力のランダムネスを測る指標である. これらの定義は一見無関係でありながら, 図 5.14, 5.15 より関数エントロピー $H(f)$ の時間平均とリアプノフ指数との間に明らかな関連が見出される. それでは, これらの測度の間にどのような関係があるのだろうか.

一般に, $f_n(S_n)$ に対する g の伸長の比率が大きい程, つまり $f_n(S_n)$ に比べ $g \circ f_n(S_n)$ の区間が大きい程, 任意の点 $x, y \in S_{n+1}$ において $g \circ f_n \circ g_n^*(x)$ と $g \circ f_n \circ g_n^*(y)$ が同じ区間に入る確率が少なくなる. そのため, 関数エントロピーの定義より, g の伸長の比率が大きい程 $f_{n+1} = g \circ f_n \circ g_n^*$ の関数エントロピー $H(f_{n+1})$ が高くなる傾向にある. また, g のリアプノフ指数は微小な変位ベクトルを軌道と共に発展させたときの平均拡大率であると考えられる. よって g のリアプノフ指数が高い程, 任意の $f_n(S_n)$ に対する g の伸長の比率も高くなる. そのため, リアプノフ指数が増加するとき関数エントロピー $H(f_n)$ の時間平均も増加する傾向が現れる.

よって 1. と 2. の考察から, 冗長さの変化には g, g_n^* における像の圧縮と伸長の非一様性が, 関数エントロピーの変化には像の伸長の平均値に関係していることが解る.

第 6 章

議論

6.1 シミュレーション結果の意義

ここでは、本稿で示したシミュレーション結果の持つ意義について議論する。

第 5 章では、区間 $[0, 1]$ 上で定義された関数を用いてモデルの持つ定性的な性質を明らかにした。しかし、一方ではそのようなシミュレーション結果は定量的予測に関しては役に立たず、意味が無いという批判も考えられる。実際、ロジスティック写像やテント写像による関数変換を実際の現象に一対一対応させるのは無理であろう。

しかしながら、非線形系には初期条件に対する鋭敏性や記述不安定性（モデルの振舞が観測によって敏感に変化してしまう性質）が存在する場合がある [4][12]。したがって、現象の詳細な知識に基づいた記述的なモデルが現象を定量的によく近似するとは限らない。また、仮に偶然そういった良い近似としての記述的なモデルが得られたとしても、逆にモデルと現象の間の厳密な対応を知る術はない。このような複雑系の特徴のため、最も信頼し得るミクロ方程式から出発し、最良と思われる近似を使ってマクロ方程式を導出しモデルを構築するという従来の立場は、もしモデルが定量的に記述不安定であればその立脚点を失ってしまう。

また、微視的なレベルから大規模計算によって現象を再現すれば良いという考えもあるだろう。しかし、この場合も初期値鋭敏性や記述不安定性により定量的予測は困難になると考えられる。またそのような方法で自然をうまく再現させることに成功したとしても、その再現したモデル自身が複雑すぎて現象そのものを観察しているのと変わらなくなる可能性がある。もしそのようなになったなら、実験条件をコントロールしやすいという実用的な利点は持つが、やはり何がその現象の本質だったのか解らないままになる。

つまり、複雑系の研究においては、ひとつのモデルで定量的予測と定性的理解の両方を

得るのは困難であり、構成論的アプローチによる定性的理解と模倣的アプローチによる定量的予測の両方が必要である。

よって、第5章で示したモデルの定性的な性質は、複雑現象の本質的機構の理解に重要な役割を果たすという意味で意義を持つ。

6.2 形式的枠組の一般性

ここでは、本稿で示した形式的枠組が持つ一般性について議論する。

本稿では、変換前と変換後の関数が部分的に準同型となる力学系を示した。この力学系が記述できるダイナミクスは、変化した後の関数が変化前の関数 (の一部) に由来するという特徴を持つ。また、任意の $f: X \rightarrow Y$ に対し、 $X, Y \subseteq S$ となるような $g: S \rightarrow S$ と $\{g_i^*\}_{i=0}^\infty$ を構成することで f のダイナミクスを表現できる。それゆえ、本稿で提示した枠組はこのような特徴を持つダイナミクス一般について記述することができる。それでは、どのような現象がその特徴を持つといえるだろうか。

例として、生命の進化の問題を考えよう。表現型を状態、遺伝子型を状態を決定する関数、進化を関数を変化させるルールであるとする、生命の進化を関数のダイナミクスとして考えることができる。そして遺伝子の変化の仕方は、突然変移であれ生殖交配であれ、何らかの形で変移前の遺伝子型の一部を残している。よって、生命の進化は上記の特徴を持つダイナミクスとして捉えることができる。また、言語における文法構造の変化についても、文を状態、文法を関数として考えれば同様のことがいえる。

したがって、本稿で示した形式的枠組は上記のような現象を記述するのに十分な一般性を持ち、その結果は普遍的な性質を予測しているといえる。

6.3 具体的問題への適用

本稿で示した形式的枠組を、生命の進化や文法構造の変化などの具体的な問題に対して適用することを考える。

前節において、本稿の枠組が複雑系における系の変化を記述できるだけの一般性を持つことを主張した。しかしながら、それは複雑系を記述することが可能であるということを示しているだけであり、一般に複雑系の具体的なモデルを得るのが困難であることには変わりがない。特に、本稿の枠組のような抽象度の高い記述体系では具体的なモデルを記述することはより一層困難であろう。それでは実際には本稿の枠組を個々の問題へ適用するのは無理なのだろうか。

一般に、複雑系において系の变化そのものを具体的に与えることは困難でも、系の複雑さがどのように変化するかを観察することは可能な場合がある。よって系の複雑さがどのように変化するかという観点から関数変換の属する普遍クラスを推測し、その系のダイナミクスの持つ性質を明らかにすることはできる。そして普遍クラスの十分な分類ができれば、具体的に構成された関数のダイナミクスと実際の現象との比較を繰り返すことで、複雑現象のモデルを構成することも可能であろう。

よって本稿で示した形式的枠組を具体的な問題へ適用することは十分可能であると考えられ、また本研究において明らかにしたダイナミクスの普遍クラスはモデルを構成する際の知見をもたらすと考えられる。

第 7 章

結論

本稿では、関数の持つ複雑さがいかに変化するかを調べるため、動的な関数を記述する形式的な枠組を構築した。

写像 $f_n : S_n \rightarrow S$ ($S_n \subseteq S$) の時間発展を、 $f_{n+1} = g \circ f_n \circ g_n^*$ と定義した。ここで、写像 $g : S \rightarrow S$ と写像 $g_n^* : S_{n+1} \rightarrow S_n$ の無限列 $\{g_i^*\}_{i=0}^\infty$ は包含写像 $i_{n+1} : S_{n+1} \rightarrow S$ に対し $g|_{S_n} \circ g_n^* = i_{n+1}$ を満たす。このとき、任意の g, f_n 、そして $S_n \subseteq S$ に対し、 $x \in g_n^*(S_{n+1})$ ならば $g \circ f_n(x) = f_{n+1} \circ g(x)$ を満たすため、 f_n の時間発展は $g_n^*(S_{n+1}) \subseteq S_n$ において準同型となっている。

さらに本稿では関数の複雑さの測度として冗長度と関数エントロピーを定義した。冗長度はある出力に対応する入力の数によって与えられる。また、関数エントロピーは入力ランダムに与えられたときの出力のランダムネスを測る指標である。これらの測度は、力学系を集合上の関数として記述したとき、その軌道が周期を持つか否かを区別することが可能であり、力学系の複雑さを表現していることが解った。またこれらの複雑さの測度は、次のような性質を持つことを示した。

- g が単射のとき最大冗長度は減少する。
- g_n^* が全射のとき平均冗長度は増加する。
- g が単射でかつ g_n^* が全射のとき冗長度は変化しない。

冗長度や関数エントロピーが本稿で導入したダイナミクスによりどのように変化するかを見るために、コンピュータシミュレーションを行った。シミュレーションの結果、写像 g がロジスティック写像 $ax(1-x)$ の場合は冗長度が変化するが、テント写像 $a(0.5 - |x - 0.5|)$ の場合は大きな変化が見られないこと、および写像 f_n の関数エントロピーと写像 g のリアプノフ指数との間に関連があることが解った。

謝辞

本研究は多くの方の御支援によって進めることができました。

指導教官の橋本敬助教授には、本研究の全過程において御指導、御助言を賜りました。ここに厚く御礼申し上げます。

研究に関して、下嶋篤助教授の副テーマにおける御指導は大変参考になりました。心から御礼申し上げます。

複雑系解析論講座の諸氏との議論が本研究を進めるにあたり参考になりました。また、橋本研究室の皆様には、日頃から御討論、御協力を頂き、意義深い研究生活を送ることができました。深く感謝致します。

最後に、ここまで暖かく見守ってくれた家族に感謝致します。

参考文献

- [1] C.E.Shannon, W.Weaver, *The mathematical theory of communication*, Illinois Books, Urbana, 1963.
- [2] Kathleen Alligood, Tim Sauer, James A. Yorke, *Chaos: an introduction to dynamical system*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [3] Christos H. Papadimitriou, *Computational complexity*, Addison-Wesley, San Diego, 1994.
- [4] 金子邦彦, 津田一朗, 「複雑系のカオスのシナリオ」, 朝倉書店, 1996.
- [5] R.Badii, A.Politi, *Complexity: hierarchical structures and scaling in physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [6] Ming Li, Paul Vitányi, *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [7] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974.
- [8] N.Kataoka, K.Kaneko, Functional dynamics I: articulation process, *Physica D*, **138**, 225-250, 2000.
- [9] N.Kataoka, K.Kaneko, Functional dynamics II: syntactic structure, *Physica D*, submitted for publication, 2000.
- [10] N.Kataoka, K.Kaneko, Natural language from function dynamics, *BioSystems*, **57**, 1-11, 2000.
- [11] 水谷正大, 「記号力学系入門」, 経営情報科学, Vol.4 No.1, 31-41, 1991.

[12] 津田一朗, 「カオスの脳観 — 脳の新しいモデルをめざして」, サイエンス社, 1990.