JAIST Repository
https://dspace.jaist.ac.jp/

Title	直観主義論理に基づくトポス意味論に関する研究
Author(s)	平田，晋也
Citation	
Issue Date	2009-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/8144
Rights	
Description	Supervisor:石原　哉　准教授，情報科学研究科，修士

JAPAN
ADVANCED INSTITUTE OF
SCIENCE AND TECHNOLOGY

Japan Advanced Institute of Science and Technology

直観主義論理に基づく理論のトポス意味論に関する研究

平田 晋也 (0710060)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2009 年 2 月 5 日

キーワード: 直観主義論理, 圏, トポス, 層, 空間性トポス.

Brouwer が唱えた数学的直観主義における構成的な考え方の流れを汲んで, 1920 年代の末に Heyting 等によって整備された論理が直観主義論理である. 直観主義論理に基づく構成的な証明には, コンピュータの計算モデルの一種である型付き λ 計算との間に対応関係がつくという Curry-Howard の対応と呼ばれる事実が知られている. このことは数学的命題の構成的な証明を分析することにより, それに対応するプログラムが持つ性質もまた分析できること, 構成的な証明からプログラムを抽出できることなどを意味する. よって, 情報科学の立場からは, ある数学的命題が直観主義論理で証明できるということは重要である. しかしながら, 直観主義論理はその定義から古典論理よりも弱い論理であり, 古典論理で証明することができた命題のいくつかは直観主義論理で証明することができない. したがって, 古典論理では証明することができるが直観主義論理では証明することができない命題を明らかにすることは重要な意味を持っているといえる.

一方, 直観主義論理に基づく形式体系の意味論として, 従来の数学においてある種の位相的性質を分析するために考え出された層という概念が相性が良いことが知られている. また, 現在の数学において根底を成している集合概念を層として位相空間の上に拡大すると, それらは圏論的な立場で見れば一つのトポスを構成している. このトポスは空間性トポスと呼ばれ, 直観主義論理の意味論において用いられる.

本研究では, 古典論理で証明可能ないくつかの数学的命題が, 直観主義論理では証明不可能であるということを意味論的な手法を用いて示す.

一般に, ある数学的命題が特定の論理の上で証明可能であるということを示すためには, その論理の形式体系を導入し, その形式体系における証明図の存在を示せば十分である. 逆に, ある数学的命題が特定の論理の上で証明不可能であるということを示す際には, 構文論的な手法ではなく意味論的な手法を用いて示されることが多い. ここでの意味論的な手法とは, まず形式体系に構造という概念を用いて意味付けを行い, そこで成り立つ形式体系の健全性と呼ばれる性質, つまり「ある数学的命題が形式体系で証明可能ならば, 任意の構造においてその数学的命題は正しくなる」ということを利用したものである.

Copyright © 2009 by Shin'ya Hirata

本研究では, 上記の流れに則り, 直観主義論理の形式体系LJを導入した上で, 直観主義論理の意味論として相性の良い位相空間上の層による構造を考え, 意味付けを行う. その後, 形式体系LJの健全性の対偶, つまり「ある構造において数学的命題が正しくないならば, 形式体系LJで証明不可能である」ということから, そのような具体的な構造を構成することによって, 古典論理では証明することができるが直観主義論理では証明することができない命題の存在を示す.

まず, 連結な位相空間 $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ を考え, その位相空間の開集合系 $\mathcal{O}$ による層について考える. また, その位相空間における X と $\emptyset$ でないひとつの開集合 V を固定し, すべての開集合を V に写すような層の上の述語 P_V を定義する. すると, これらからなる位相空間の上の構造では, 任意の $U \in \mathcal{O}$ において, 以下のような論理式 $P_V(U) \vee \neg P_V(U)$, $\neg\neg P_V(U) \to P_V(U)$, $(P_V(U_1) \to P_V(U_2)) \to (\neg P_V(U_1) \vee P_V(U_2))$ が正しくない. よって, このこととLJの健全性によって, 直観主義論理では論理式 $\varphi \vee \neg\varphi$, $\neg\neg\varphi \to \varphi$, $(\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2)$ が証明不可能であることが示される.

本研究では, 高階の直観主義述語論理の論理式がトポスによってどのように解釈されるのかについてまでは言及できなかったが, 一階の直観主義述語論理において, 論理式 $\varphi \vee \neg\varphi$, $\neg\neg\varphi \to \varphi$, $(\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2)$ がなりたたないような層の集合からなる位相空間の上の構造を構成し, これらの論理式が直観主義論理で証明不可能であることが確認できた.