G.V.A. における架空名義入札の効用

面 和成　東条 敏　宮地 充子

2001 年 8 月 20 日

IS-RR-2001-020

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科
〒 923-12 石川県能美郡辰口町旭台 1-1

要旨

オークションには様々なタイプが存在するが，本論文では，Vickrey オークションを一般化した G.V.A.(Generalized Vickrey Auction) にターゲットを絞って考察する．前半では，G.V.A. に対する架空名義入札の有効性についてレビューを行う [1, 2]．架空名義入札とは，各入札者が 1 度しか入札しないオークションに対して，入札者が架空名義を使って複数入札を行うことである．後半では，次の 3 点について考察を行う．

- 単一財，複数ユニットの G.V.A. がロバストネスであることを示す．
- 架空名義入札によって落札価格がどのような条件で最大でどこまで下がるのか？
- 架空名義入札を最初から許した場合，G.V.A. はオークションプロトコルとしてどうなるのか？

1　はじめに

オークションといえば，古くは美術品や骨董品を取り引きするための手段というイメージを持っている人が多かったが，最近ではインターネットを用いて行われているヤフーオークションを思い浮かべる人が多いのではなかろうか．しかし，実はオークションという取引形態は，経済活動のいたるところで見かけられるものである．中古ゲームソフトの販売や古本屋もオークションの一種と考えられる．

実際，オークションの種類にはヤフーオークションで用いられているつり上げ式オークション (English オークション) が代表的である．しかし，古本屋のように売れない本の値段を徐々に下げていくスタイルは，まさにつり下げ式オークション (Dutch オークション) と捉えることができる．さらに，日本の建設関係で行われる入札は，一般に First-price sealed-bid オークションと呼ばれている．この他にも世界には様々なオークションスタイルが存在するが，よく知られている代表的なオークションは上記の 3 タイプであろう．

一方，オークションは経済学的観点からもよく研究もされている．オークションは競売とも言われ，他人と争うことによって取引を行うので，ゲーム理論の応用としても研究がなされている．オークションに関する研究として最も注目に値するものは，1961 年の W. Vickrey によるものであろう．彼は First-price sealed-bid オークションのプロトコルを改良して，Second-price sealed-bid オークション (Vickrey オークション) を発明してノーベル経済学賞を獲得した．このオークションプロトコルの優れた点は，入札者にとって最適戦略が存在することである．最適戦略が存在するということは，各入札者が自分の希望価格を下げても無駄であることを意味する．

その後，さらにオークションプロトコルの設計が人工知能や経済学の一分野として活発に行われてきた．そして，1995 年，H. Varian は新しいオークションプロトコルである G.V.A.(Generalized Vickrey Auction) プロトコルを発明した [4]．Vickrey オークションが単一財に対してしか扱えないプロトコルであったのに対し，G.V.A. は Vickrey オークションの優れた点をそのまま引き継いで複数財も扱えるようになったプロトコルとして注目を浴びた．つまり，G.V.A. も入札者の最適戦略が存在するプロトコルであると考えられていた．

しかしながら，1999 年に桜井らは，架空名義入札の存在によって G.V.A. が入札者の最適な戦略を持たない場合があることを指摘した [1, 2]．架空名義入札とは，各入札者が 1 度しか入札しないオークションに対して，入札者が架空名義を使って複数入札を行うことである．つまり，最適戦略を持たないということは，落札者

が架空名義入札によって自分の落札価格を下げれる可能性を持つ (これは架空名義入札に対してロバストネスでないことを意味する). もちろん，Vickrey オークションでは架空名義入札の存在があっても入札者の最適戦略を失わない. G.V.A. には，単一財，複数ユニット G.V.A. と複数財 G.V.A. の 2 種類がある. [1] では，複数財 G.V.A. がロバストネスでない反例を挙げている. つまり，彼らは複数財 G.V.A. に対して架空名義入札が有効であることを示した. このことを踏まえて，本稿の後半において次の 3 点について考察を行った.

- 単一財，複数ユニット G.V.A. がロバストネスであることを示す.
- 架空名義入札によって落札価格がどのような条件で最大でどこまで下がるのか？
- 架空名義入札を最初から許した場合，G.V.A. はオークションプロトコルとしてどうなるのか？

本稿の構成は以下の通りである. まず 2 章では，準備として用語と代表的なオークションプロトコルを説明する. 次に 3 章では Vickrey オークション，4 章では G.V.A. をそれぞれプロトコルを説明する. そして，5 章では架空名義入札に対するロバストネスについて議論する. さらに 6 章においては架空名義入札に関する新たな考察を行い，最後に 7 章でまとめた.

2 準備

2.1 用語説明

- **財:** オークションによって取引される商品を意味する. 本稿では，単一財，複数ユニットは複数の同じ商品を意味し，複数財は異なる複数の商品を意味する.
- **主催者:** 財を売る人から依頼を受けてオークションを開催する機関.
- **入札者** $i(\mathcal{B}_i)$**:** 財の買い手. エージェントとしても扱われる.
- **真の評価値:** ある財 g に対する真の評価値とは，財 g を手に入れるのに出費しても良い最大額のことである.
- **財に対する評価値 (入札値)**$v_i(g)$**:** 入札者 $(\mathcal{B}_i)$ の財 g に対する評価値を $v_i(g)$ と表記する. これは，必ずしも真の評価値と一致しない.

- **効用:** 落札者 $\mathcal{B}_i$ にとっての効用は u_i=(真の評価値)–(実際の落札値) である．一方，非落札者の効用は財を得ることができないためゼロとする．ある入札者が財 g_1 に対して真の評価値が\$20 であるとして，実際\$15 で買えたとするとその効用は\$20−\$15=\$5 である．また，効用の増加分を Δu_i と記す．

- **戦略:** 買い手の効用を最大化する入札値の選択手法．

- **支配戦略:** 他の買い手のどのような戦略に関しても最適な反応となる戦略．

- **架空名義入札:** 各入札者が 1 度しか入札しないオークションに対して，入札者が架空名義を使って複数入札を行うこと．

- **架空名義入札に対するロバストネス:** ある入札者が架空名義入札を行ったとしても自分の効用を増加できないとき，ロバストネスがあるという．

2.2 代表的なオークションプロトコル

English オークション: このタイプは，最もよく知られたタイプで，参加者が順々に入札して商品の価格をつり上げることによって，商品の最終的な価格が決定される．しかし，(1) 価格の上昇の動きが完全にオープンであることから商品に関する市場の情報が筒抜け状態となる，(2) 価格が安定するまでオークション期間を設けるため多くの時間を要する等の問題がある．

Dutch オークション: このタイプは，*English auction* の逆であり，商品の価格をつり下げることによって商品の最終的な価格を決定する．価格を下降させていき，最初に申し出た入札者が落札者となるため，落札値以外の入札値情報を秘匿できる．しかし，オークションが終了するまでに多くの時間を要するという *English auction* と同様の欠点がある．

First-price sealed-bid オークション: このタイプは，日本の建設関係でよく用いられている入札のことである．参加者は 1 回だけ自分の評価値を秘密にしたままセンタに提出する．1 回だけ入札値を提出するので，落札値を決定するまで多くの時間を要することはないが，決定された価格が市場価格に反する可能性を持つ．

Vickrey オークション (Second-price sealed-bid オークション): このタイプは，入札の方法が *First-price sealed-bid auction* と同じであるが，最高値を提示した者が 2 番目に大きな入札値で落札する．このオークションの詳細説明は次章で行う．

$(M+1)$-st price オークション: このタイプは，Vickrey オークションの変形である．主催者が同じ M 個の財を各入札者に 1 個ずつ売りたいときこのオークションを用いる．M 人の落札者に $M+1$ 番目に高い入札値で売るオークションプロトコルである．

3　Vickrey オークション

G.V.A.(Generalized Vickrey Auction) は Vickrey オークションを発展させたオークションプロトコルであるので，まず Vickrey オークションについての詳しい説明を行う．その際，Vickrey オークションが持つ経済学的意味も考える．Vickrey オークションは単一財を対象とした第二価格秘密入札 (Second-price sealed-bid auction) とも呼ばれ，ノーベル経済学賞を受賞した W.Vickrey によって提案されたものである [3]．各入札者は他者の入札値を知らされずに 1 回だけ入札を行い，最も高い入札値をつけた入札者が，二番目に高い入札値で落札する．

では，なぜ Vickrey オークションがノーベル経済学賞を取るくらいに優れたオークションプロトコルであるのかを例を用いて説明する．ここに 3 人の入札者 $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3\}$ が自動車のオークションに参加しており，自動車会社がこの 3 人の入札者のうち最も高い買値を提示した入札者に BMW を売ろうとしている．各入札者のこの BMW に対する真の評価値は以下の通りである．

- $\mathcal{B}_1$ の入札値：930 万円
- $\mathcal{B}_2$ の入札値：880 万円
- $\mathcal{B}_3$ の入札値：840 万円

ここで真の評価値とは，損も得もない最高額のことである．つまり，損得の境界線を意味している．もしオークションプロトコルとして First-price sealed-bid オークションを用いた場合，各入札者はこの額よりいくらか減らした評価値で入札してくるであろう．しかし，これには若干の問題がある．この方法を用いた場合，入札者にとって入札値をどう設定するかが難しい問題となる．実際，各入札者は真の評価値をそのまま入札値にするわけにはいかない．なぜなら，この選択は最も悪い選択であり，BMW はもらえるものの損得はゼロとなるからである．各入札者は少しでも入札値を安くして得をしたいが，BMW を買えなければ意味がない．この場合，入札者にとって他人の入札値をなるべく正しく推定することが非常に重要な課題となり，いかにして他人の入札値を盗むかに力が注がれるであろう．もし偽りの情報

に踊らされて $\mathcal{B}_1$ が安く入札値を設定したりすると，代わりに $\mathcal{B}_2$ が落札するかもしれない．もしそうなれば，$\mathcal{B}_1$ が本来 $\mathcal{B}_2$ よりも高い額で落札できたはずなのに落札に失敗することになり，自動車会社にとっても損失となる．では，実際このような事態を防ぐことができるのであろうか？

実は，用いるオークションを First-price sealed-bid オークションから Vickrey オークションに変更することによって，この事態を防ぐことが可能である．このプロトコルを用いると，各入札者が真の評価値で入札したとしても，$\mathcal{B}_1$ が 880 万円で落札することになる (50 万円の得をする)．この方法を取った場合，他者の入札値を察知することに意味がないことは明らかである．落札した場合の自分が支払う金額は他者の入札値によって決定される．そして，自分の入札値は自分の落札値を意味するものではなく，自分が落札者になれるかなれないかの判断基準でしかない．

このオークションプロトコルの優れた点は，各入札者が真の評価値で入札することが最適な戦略となることである．つまり，First-price sealed-bid オークションでは，各入札者が真の評価値よりも主観的に計算された分を減らすことになるが，Vickrey オークションでは，各入札者は自分の真の評価値で入札する．入札するのに最適戦略があるということは，各入札者が自分の入札値を下げても無駄であることを意味する．つまり，Vickrey オークションは次に示す誘因両立性を満たす．

- **誘因両立性:** 誘因両立性を満たすとは，真の評価値で入札することが支配戦略となることを意味する．前例の BMW の例を用いると，3 人の入札者 $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3\}$ が First-price sealed-bid オークションに参加しており，各入札者が自分の真の評価値で $\mathcal{B}_1$:930 万円，$\mathcal{B}_2$:880 万円，$\mathcal{B}_3$:840 万円と入札したとする．この場合，$\mathcal{B}_1$ が 930 万円で落札するが，効用はゼロである．しかし，もし $\mathcal{B}_1$ が 890 万円で入札しても同様に落札され，かつ，効用を 40 万円に増やせる．これは，真の評価値で入札することが支配戦略にならないことを意味する．つまり，First-price sealed-bid オークションの場合，自分の真の評価値で入札することが支配戦略にならない (誘因両立性を満たさない)．これに反して，例えば 3 人の入札者 $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3\}$ が Vickrey オークションに参加しており，各入札者が同様に自分の真の評価値で $\mathcal{B}_1$:930 万円，$\mathcal{B}_2$:880 万円，$\mathcal{B}_3$:840 万円と入札したとする．この場合，$\mathcal{B}_1$ が 880 万円で落札する．仮に $\mathcal{B}_1$ が自分の評価値を 890 万円まで下げたとしても $\mathcal{B}_1$ は自分の効用を増加できない．つまり，Vickrey オークションにおいて，真の評価値で入札することが支配戦略になることを意味する (誘因両立性を満たす)．

他方，もしオークションプロトコルとして English オークションを用いた場合を

考えよう．この場合，$\mathcal{B}_3$ が最初に脱落し，次に $\mathcal{B}_2$ が $(880-\alpha_1)$ 万円で脱落するであろう $(\alpha_1 \simeq 0)$．そして，結果的に $\mathcal{B}_1$ が $(880-\alpha_1+\alpha_2) \simeq 880$ 万円で落札することになる $(-\alpha_1+\alpha_2 \simeq 0)$．つまり，Vickrey オークションの落札値と English オークション落札値がほぼ同等になることが理解できる．

4 G.V.A.

G.V.A. は，1995 年に H.Varian によって考案されたプロトコルである．これは，Vickrey オークションを発展させており，価値に依存関係を持つ複数の財を扱える [4]．Vickrey オークションには入札者の最適戦略が存在するので，G.V.A. にも同様に最適戦略が存在すると考えられていた．G.V.A. は大きく分けて 2 種類あり，単一財，複数ユニット G.V.A. と複数財 G.V.A. がある．以下にプロトコルの手順を示す．ただし，ここに載せてあるプロトコルの詳細は [1, 2, 4] で紹介されているものと若干異なっているが，内容は全く同じである．

[G.V.A. プロトコル]

1. 各入札者は主催者に財の評価値を申告する．
2. 主催者は各入札者が申告した評価値の総和を最大化するように各財を入札者に割り当てる．財を 1 つでも割り当てられた入札者は落札者となる．このときの評価値の総和を V とする．
3. 主催者は落札者 $\mathcal{B}_j$ に以下によって計算される支払額 p_j を伝える：

$$
\begin{aligned}
p_j &= V_j - (\mathcal{B}_j\text{の効用}) \\
&= V_j - (V - \overline{V_j}) \\
&\quad V_j : \text{落札できた財に対する } \mathcal{B}_j \text{の真の評価値の総和} \\
&\quad \overline{V_j} : \text{落札者 } \mathcal{B}_j \text{を除く全財に対する評価値の総和を最大化する} \\
&\qquad\quad \text{評価値の総和}
\end{aligned}
$$

上記の G.V.A. プロトコルは，Vickrey オークションに適用できていることを以下で確かめる．前例の BMW の例を用いて，3 人の入札者の真の評価値をそれぞれ $\mathcal{B}_1$:930 万円，$\mathcal{B}_2$:880 万円，$\mathcal{B}_3$:840 万円とすると，V=930, V_1=930, $\overline{V_1}$=880 となる．その結果，$\mathcal{B}_1$ の支払額は $p_1 = 930 - (930 - 880) = 880$ となる．これは，G.V.A. が Vickrey オークションに適用できることを示している．

また，支払額計算の直観的意味を探る．上式の通り支払額は，自分が落札した財に対する評価値から自分の効用分を差し引いて求められる．このとき，この効用はその入札者の参加によって生じる経済学的な貢献度を表している．つまり，支払額は自分の評価値から自分の貢献度を差し引くことによって求めらるので，自分の落札値が他人の評価値のみによって決められるプロトコルであると意味付けできる．

4.1 単一財，複数ユニット G.V.A.

単一財，複数ユニット G.V.A. は，各入札者に同じ財を複数個売るプロトコルである．各入札者にそれらの財を 1 個ずつ売るのであれば，$(M+1)$-st price オークションを用いればよい．単一財，複数ユニットの財の性質として次の 2 種類が考えられる．

- **代替的 (substitutional):** 複数ユニットの財が増えるに従って，その価値が同等もしくは減少していく財である．例えば，本や CD などほとんどの財がこれに相当する．同じ物を 2 つ以上持っていても意味が無いような財では，2 つ目の財の価値がかなり減少する．

- **補完的 (complementary):** ある個数までほとんど価値がなく，ある個数になって初めて価値を生むもの．例えば，靴や箸がそうであり，2 つそろって初めて価値を生む．

[1] では単一財，複数ユニット G.V.A. に関して，代替的な財のみを扱っているので本稿もこれに従う．単一財，複数ユニット G.V.A. における補完的な財は，次章の複数財 G.V.A. における補完的な財と同様の議論ができると述べられているので，ここでは省略する．

次に，[4] で紹介されている代替的な財のみを扱う単一財，複数ユニット G.V.A. の簡単な例を示す．2 人の入札者 $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$ が 3 つの同じ財 g のオークションに参加しているとする．3 つの同じ財を区別するためにそれぞれを $\{unit_1, unit_2, unit_3\}$ とする．各入札者は最大 3 つまで財を得ることができるように，$\mathcal{B}_i$ の入札値を $(v_i(unit_1), v_i(unit_2), v_i(unit_3))$ とし，3 つ目の財までの評価を行うことができる．そして，以下のような入札結果を考える．

- $\mathcal{B}_1$ の入札値：(\$10, \$8, \$5)

- $\mathcal{B}_2$ の入札値：(\$9, \$7, \$6)

まず，主催者は3つの単一財に対する評価値の和を最大化する最適な割り当てを行う，すなわち，2つの財を $\mathcal{B}_1$ に割り当て，1つの財を $\mathcal{B}_2$ に割り当てれば評価値の和が最大化され，そのときの評価値の和は\$10+\$8+\$9=\$27となる．このとき，$\mathcal{B}_1$ の支払額は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
V &= \$27, \\
V_1 &= \$10 + \$8 = \$18, \\
\overline{V_1} &= \$9 + \$7 + \$6 = \$22, \\
p_1 &= V_1 - (V - \overline{V_1}) = \$18 - (\$27 - \$22) = \$13.
\end{aligned}
$$

同様に $\mathcal{B}_2$ の支払額は p_2=\$9-(\$27-\$23)=\$5となる．

4.2 複数財 G.V.A.

複数財のG.V.A.は異なる何種類かの財を同時にオークションする場合に適用される．このとき，複数財を同時に得る場合の評価値も加味されている．例えば，2つの財 g_1, g_2 があるとき，それぞれに対する $\mathcal{B}_i$ の評価値を $v_i(g_1), v_i(g_2)$ と表記し，財 g_1, g_2 を同時に得るときの評価値を $v_i(g_1, g_2)$ と表記する．これは，次に述べる財の種類に関係する．

4.2.1 複数財の種類

複数財には2種類の性質がある．

- **代替的 (substitutional):** 2つの財が価値として互いに独立しているときその関係を代替的と呼ぶ．例えば，紅茶とコーヒーの関係や米とパンの関係のように，どちらか片方は必要だが，必ずしも両方は同時に必要としないという財の関係をいう．代替的である異なる2つの財 g_1, g_2 があるとき，$v_i(g_1) + v_i(g_2) \geq v_i(g_1, g_2)$ の関係をもつ．

- **補完的 (complementary):** 2つの財が価値として互いに従属しているときその関係を補完的と呼ぶ．例えば，紅茶と砂糖の関係やパンとジャムの関係のように，両方同時に保有することで単独で保有した場合よりも価値が増加するような財の関係をいう．補完的である異なる2つの財 g_1, g_2 があるとき，$v_i(g_1) + v_i(g_2) < v_i(g_1, g_2)$ の関係をもつ．

4.2.2 代替的な複数財で落札する G.V.A. の具体例

3 人の入札者 $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3\}$ が 2 種類の財 g_1, g_2 のオークションに参加しているとする．$\mathcal{B}_i$ の入札値を $(v_i(g_1), v_i(g_2), v_i(g_1, g_2))$ と記述する．

- $\mathcal{B}_1$ の入札値：(\$25, \$20, \$44)
- $\mathcal{B}_2$ の入札値：(\$8, \$9, \$16)
- $\mathcal{B}_3$ の入札値：(\$18, \$24, \$38)

この場合，落札者 $\mathcal{B}_1$ にとって財 g_1, g_2 は代替的である．財 g_1 が $\mathcal{B}_1$ に，財 g_2 が $\mathcal{B}_3$ にそれぞれ割り当てられ，2 つの財の評価値の和は\$25+\$24=\$49 で最大となる．このとき，$\mathcal{B}_1$ と $\mathcal{B}_3$ の支払額はそれぞれ以下の通りである．

$$\begin{aligned}
V &= \$49, \\
V_1 &= \$25, \quad \overline{V_1} = \$18 + \$24 = \$42, \\
p_1 &= V_1 - (V - \overline{V_1}) = \$25 - (\$49 - \$42) = \$18. \\
V_3 &= \$24, \quad \overline{V_3} = \$25 + \$20 = \$45, \\
p_3 &= V_1 - (V - \overline{V_1}) = \$24 - (\$49 - \$45) = \$20.
\end{aligned}$$

4.2.3 補完的な複数財で落札する G.V.A. の具体例

3 人の入札者 $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3\}$ が 2 種類の財 g_1, g_2 のオークションに参加しているとする．$\mathcal{B}_i$ の入札値を $(v_i(g_1), v_i(g_2), v_i(g_1, g_2))$ と記述する．

- $\mathcal{B}_1$ の入札値：(\$25, \$20, \$44)
- $\mathcal{B}_2$ の入札値：(\$8, \$9, \$52)
- $\mathcal{B}_3$ の入札値：(\$18, \$24, \$38)

この場合，落札者 $\mathcal{B}_2$ にとって財 g_1, g_2 は補完的である．簡単のため，$\mathcal{B}_1$ と $\mathcal{B}_3$ の入札値は代替的な複数財を扱う G.V.A. の例と同じにしてある．財 g_1, g_2 とも $\mathcal{B}_2$ に割り当てられ，2 つの財の評価値の和は\$52 で最大となる．このとき，$\mathcal{B}_2$ の支払額は以下の通りである．

$$V = \$52,$$

$$
\begin{aligned}
V_2 &= \$52, \\
\overline{V_2} &= \$25 + \$24 = \$49, \\
p_2 &= V_2 - (V - \overline{V_2}) = \$52 - (\$52 - \$49) = \$49.
\end{aligned}
$$

5 架空名義入札に対するロバストネス

本章では，櫻井らによって提案された文献[1, 2]で述べられているように，G.V.A. に対する架空名義入札の有効性についてまとめる．

5.1 Vickrey オークション

前述のように Vickrey オークションは自分の真の評価値で入札することが支配戦略となる(誘因両立性を満たす)．もし架空名義入札をすることなしにオークションに勝つことができるなら，架空名義入札は支払いを増額させることにしかならない．逆に，架空名義入札をすることなしにオークションに勝てないなら，架空名義入札して勝つことができるかもしれないが，自分の真の評価値よりも高く支払わなければならない．これは，Vickrey オークションにおいて架空名義入札することが自分の効用を増加できないことを意味している．落札値は自分以外の入札値によって決定されることから，自分の入札値によって自分の効用を増加できないのは直観的に理解できる．したがって，Vickrey オークションは架空名義入札に対してロバストネスである．

5.2 単一財，複数ユニットを扱うオークション

単一財，複数ユニットを扱うオークションは複数の同じ財を同時にオークションする場合に適用される．ここで，入札者側が複数個欲しい財であるのか 1 つ得れば十分な財なのかによって，用いるオークションプロトコルが異なる．各入札者に財を 1 個ずつ売るオークションを行いたいのなら $(M+1)$-st price オークションを用いるべきであり，各入札者に財を複数個売るオークションであるなら単一財，複数ユニット G.V.A. を用いるべきである．以下，それぞれのオークションに対するロバストネスについて述べる．

5.2.1 $(M+1)$-st price オークション

このプロトコルは，Vickrey オークションの変形であることから，Vickrey オークションと同様の議論ができる．よって，$(M+1)$-st price オークションは架空名

義入札に対してロバストネスである．

5.2.2 単一財，複数ユニット G.V.A.

[1] では，単一財，複数ユニット G.V.A. がロバストネスであることが証明されている．しかし，単一財，複数ユニット G.V.A. の手法が間違って定義されているため，ロバストネスであることが言えていない．そこで，単一財，複数ユニット G.V.A. がロバストネスであることを次章の考察で示す．

5.3 複数財 G.V.A.

複数財 G.V.A. がロバストネスでない例として，[1] で引用されている例の仮定が間違っている．以下ではその例に多少の訂正を加えてロバストネスでない反例を示す．2 人の入札者 $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$ が異なる 2 種類の財 g_1, g_2 のオークションに参加しているとする．$\mathcal{B}_i$ の入札値を $(v_i(g_1), v_i(g_2), v_i(g_1, g_2))$ と記述する．

- $\mathcal{B}_1$ の入札値：(\$25, \$30, \$55)
- $\mathcal{B}_2$ の入札値：(\$0, \$0, \$40)

この場合，$\mathcal{B}_1$ が財 g_1, g_2 とも落札する．このとき，$\mathcal{B}_1$ の支払額は以下の通りである．

$$\begin{aligned} V &= \$55, \quad V_1 = \$55, \quad \overline{V_1} = \$40, \\ p_1 &= V_1 - (V - \overline{V_1}) = \$55 - (\$55 - \$40) = \$40. \end{aligned}$$

ここで，仮に $\mathcal{B}_1$ が架空名義 $\mathcal{B}_3$ を用いて以下のように架空名義入札を行ったとする．

- $\mathcal{B}_1$ の入札値：(\$25, \$0, \$25)
- $\mathcal{B}_2$ の入札値：(\$0, \$0, \$40)
- $\mathcal{B}_3$ の入札値：(\$0, \$30, \$30)

この場合，$\mathcal{B}_1$ と $\mathcal{B}_3$ が財 g_1, g_2 をそれぞれ落札する．このとき，$\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_3)$ の支払額は以下の通りである．

$$\begin{aligned} V &= \$25 + \$30 = \$55, \\ V_1 &= \$25, \quad \overline{V_1} = \$40, \\ p_1 &= V_1 - (V - \overline{V_1}) = \$25 - (\$55 - \$40) = \$10. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V_3 &= \$30, \quad \overline{V_3} = \$40, \\
p_3 &= V_3 - (V - \overline{V_3}) = \$30 - (\$55 - \$40) = \$15. \\
p_1 + p_3 &= \$25.
\end{aligned}
$$

以上より，$\mathcal{B}_1$ は架空名義を用いない場合に財 g_1, g_2 を\$40 で落札していたのに対し，架空名義を用いることによって，財 g_1, g_2 を\$25 で落札できることが分かる．これは，架空名義入札によって $\mathcal{B}_1$ の効用を増加できることを意味しており，この例で示されているように複数財 G.V.A. が架空名義入札に対してロバストネスでない (誘因両立性を満たさない)．

6 考察

本章では，主に次の 3 点について考察を行う．

- 単一財，複数ユニット G.V.A. がロバストネスであることを示す (6.1)
- 架空名義入札による限界効用 (6.2)
- 架空名義入札を最初から許す G.V.A.(6.3)

6.1 単一財，複数ユニット G.V.A. のロバストネス

ここでは，単一財，複数ユニット G.V.A. がロバストネスであることを示す．簡単のため，n 人の入札者 $\mathcal{B}_i(i = 1, \cdots, n)$ が同じ m 個の財 $\{unit_1, \cdots, unit_m\}$ に対して入札することを考える．ここでは同点は考えない．落札者の架空名義入札が有効となるのは，落札者が少なくとも 2 つ以上の財を落札できる場合に限られるので，架空名義入札を行う $\mathcal{B}_1$ が m_1 $(2 \leq m_1 \leq m)$ 個の単一財を落札するように設定した．$\mathcal{B}_1$ が架空名義入札を行わない入札結果を表 1に示し，$\mathcal{B}_1$ が架空名義入札を行った場合を表 2に示した．ただし，X_k は $\mathcal{B}_1$ の評価値の中で k 番目に高い値を表し，Y_k は $\mathcal{B}_i(i = 2, \cdots, n)$ が落札できた評価値の中で k 番目に高い値を表し，W_k は $\mathcal{B}_i(i = 2, \cdots, n)$ が落札できなかった評価値の中で k 番目に高い値を表す．表では，落札できた評価値を太字にした．

架空名義入札を行わない場合，$\mathcal{B}_1$ が m_1 個の財を落札できると仮定する．このとき，$\mathcal{B}_i(i = 2, \cdots, n)$ は $(m - m_1)$ 個の財を落札する．$\mathcal{B}_1$ の支払額は以下の通りである．

$$
V = \sum_{k=1}^{m_1} X_k + \sum_{k=1}^{m-m_1} Y_k,
$$

表 1: 単一財，複数ユニット G.V.A.(架空名義入札無)

入札者	m 個の単一財に対する評価値
$\mathcal{B}_1$	$\{\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_{m_1}, X_{m_1+1}, \cdots, X_m\}$
$\mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_n$	$\{\mathbf{Y}_1, \cdots, \mathbf{Y}_{m-m_1}\}, \{W_1, \cdots, W_{m_1}\}$

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \sum_{k=1}^{m_1} X_k, \qquad \overline{V_1} = \sum_{k=1}^{m-m_1} Y_k + \sum_{k=1}^{m_1} W_k, \\
p_1 &= V_1 - (V - \overline{V_1}) \\
&= \sum_{k=1}^{m_1} X_k - \left(\sum_{k=1}^{m_1} X_k + \sum_{k=1}^{m-m_1} Y_k - \sum_{k=1}^{m-m_1} Y_k - \sum_{k=1}^{m_1} W_k \right) = \sum_{k=1}^{m_1} W_k.
\end{aligned}
$$

次に，仮に入札者 $\mathcal{B}_1$ が表 2のように入札者 $\mathcal{B}_{n+1}$ になりすまして架空名義入札を行うとする．ただし，$\mathcal{B}_2$ は架空名義入札を行わないので $\mathcal{B}_2$ の効用には変化がないので，ここでは取り上げない．$\mathcal{B}_1$ は落札できる評価値で架空名義入札をしないなら，架空名義入札を行わないのと同じ結果になる．よって，$\mathcal{B}_1$ は落札できる m_1 個の財のうち m_2 個の評価値を架空名義入札するとする．落札できる全ての評価値を架空名義入札するのは意味がないので $m_1 > m_2$ とする．このとき，$\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_{n+1})$ の支払額は以下の通りになる．

$$
\begin{aligned}
V &= \sum_{k=1}^{m_1} X_k + \sum_{k=1}^{m-m_1} Y_k, \\
V_1 &= \sum_{k=1}^{m_1-m_2} X_k, \qquad \overline{V_1}' = \sum_{k=1}^{m-m_1} Y_k + \sum_{k=m_1-m_2+1}^{m_1} X_k + \sum_{k=1}^{m_1-m_2} W_k, \\
p_1' &= V_1 - (V - \overline{V_1}') \\
&= \sum_{k=1}^{m_1-m_2} X_k - \left(\sum_{k=1}^{m_1} X_k + \sum_{k=1}^{m-m_1} Y_k - \sum_{k=1}^{m-m_1} Y_k - \sum_{k=m-m_2+1}^{m_1} X_k - \sum_{k=1}^{m_1-m_2} W_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{m_1-m_2} X_k - \left(\sum_{k=1}^{m_1-m_2} X_k - \sum_{k=1}^{m_1-m_2} W_k \right) = \sum_{k=1}^{m_1-m_2} W_k.
\end{aligned}
$$

表 2: 単一財，複数ユニット G.V.A.(架空名義入札有)

入札者	m 個の単一財に対する評価値
$\mathcal{B}_1$	$\{\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_{m_1-m_2}, X_{m_1+1}, \cdots, X_{m-m_2}, 0, \cdots, 0\}$
$\mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_n$	$\{\mathbf{Y}_1, \cdots, \mathbf{Y}_{m-m_1}\}, \{W_1, \cdots, W_{m_1}\}$
$\mathcal{B}_{n+1}$	$\{\mathbf{X}_{m_1-m_2+1}, \cdots, \mathbf{X}_{m_1}, 0, \cdots, 0\}$

$$
\begin{aligned}
V_{n+1} &= \sum_{k=m-m_2+1}^{m_1} X_k, \qquad \overline{V_{n+1}} = \sum_{k=1}^{m_1-m_2} X_k + \sum_{k=1}^{m-m_1} Y_k + \sum_{k=1}^{m_2} W_k, \\
p_{n+1} &= V_{n+1} - (V - \overline{V_{n+1}}) \\
&= \sum_{k=m-m_2+1}^{m_1} X_k - \left(\sum_{k=1}^{m_1} X_k + \sum_{k=1}^{m-m_1} Y_k - \sum_{k=1}^{m_1-m_2} X_k - \sum_{k=1}^{m-m_1} Y_k - \sum_{k=1}^{m_2} W_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{m_1} X_k - \left(\sum_{k=1}^{m_1} X_k - \sum_{k=1}^{m_2} W_k \right) = \sum_{k=1}^{m_2} W_k. \\
p'_1 + p_{n+1} &= \sum_{k=1}^{m_1-m_2} W_k + \sum_{k=1}^{m_2} W_k.
\end{aligned}
$$

よって，架空名義入札による $\mathcal{B}_1$ の落札値の増加 Δp_1 は以下のように求められる．

$$
\begin{aligned}
\Delta p_1 &= (p'_1 + p_{n+1}) - p_1 \\
&= \sum_{k=1}^{m_1-m_2} W_k + \sum_{k=1}^{m_2} W_k - \sum_{k=1}^{m_1} W_k \\
&= \sum_{k=1}^{m_2} W_k - \sum_{k=m_1-m_2+1}^{m_1} W_k \\
&= \sum_{k=1}^{m_2} W_k - \sum_{k'=1}^{m_2} W_{k'+(m_1-m_2)} \\
&= \sum_{k=1}^{m_2} (W_k - W_{k+(m_1-m_2)}) > 0 \qquad (m_1 > m_2)
\end{aligned}
$$

したがって，架空名義入札によって $\mathcal{B}_1$ の落札値が増加する．これは，単一財，複数ユニット G.V.A. が架空名義入札に対してロバストネスである (誘因両立性を満たさない) ことを意味する．

では，なぜ $\mathcal{B}_1$ の落札値が増加するかを考えてみよう．$\mathcal{B}_1$ は m_1 個の単一財の落札者である．つまり，$\mathcal{B}_1$ の m_1 個の評価値は非落札者の評価値よりも高いことを意味している．G.V.A. プロトコルは他人の評価値によって自分の落札値が決定されることから，なるべく他人の評価値が低いほうが自分の落札値を低くできる．しかし，架空名義入札を行うことは，直観的にいうと自分の高い評価値を他人の評価値にすることを意味するので，その結果自分の落札値が高くなる可能性が生じる．

6.2 架空名義入札による限界効用

架空名義入札による限界効用とは，架空名義入札を行うことによって生じる効用の増加の最大値である．[1] では，複数財 G.V.A. に対して架空名義入札が有効であることは反例を用いて示されているが，どこまで有効であるかは述べられていない．そこで，本節では複数財 G.V.A. に対して架空名義入札が最大でどこまで有効であるかを議論する．ただし，架空名義入札が有効である入札者はあくまでも落

札者であり，敗者が架空名義入札を行っても敗者であることに変わりない．なぜなら，全入札者は真の評価値で入札することが前提であり，真の評価値を提出したにもかかわらず負けた入札者は，真の評価値以下で架空名義入札を行っても落札者にはなれないからである．こういう意味からも [1] の複数財 G.V.A. で載せてある例はいささかおかしい点がある．したがって，落札者が架空名義入札を行って効用を増加できるかどうかに焦点を絞って議論を進める．

まず，複数財 G.V.A. で扱う財がどの入札者にとっても代替的な財であると評価された場合，架空名義入札に対してロバストネスであることは直観的に理解できる．なぜなら，代替的な財のみであった場合，各財を個々に Vickrey オークションを行った場合と全く同じになるからである．ゆえに，Vickrey オークションがロバストネスであるのと同様に，代替的な財のみである複数財 G.V.A. はロバストネスである．

簡単のため，n 人の入札者 $\mathcal{B}_i(i=1,\cdots,n)$ が 2 つの財 g_1, g_2 に対して入札することを考える．財 $g_1, g_2, (g_1, g_2)$ に対する最高額を $U(g_1), U(g_2), U(g_1, g_2)$，二番目に高い額を $V(g_1), V(g_2), V(g_1, g_2)$ とし，同点を考えないものとする．入札者 $\mathcal{B}_1$ の落札の仕方として，次の 2 つのケースを表に表す．ただし，表では落札された入札値を太字にした．

(a) $\mathcal{B}_1$ が 2 つの財 g_1, g_2(補完的な複数財) を落札する場合

(b) $\mathcal{B}_1$ が 2 つの財 g_1, g_2(代替的な複数財) を落札する場合

6.2.1 架空名義入札による効用 (ケース (a))

まず，架空名義入札をしない場合を考える (表 3)．このとき，落札者 $\mathcal{B}_1$ の支払額は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
V &= U(g_1, g_2), \\
V_1 &= U(g_1, g_2), \quad \overline{V_1}, \\
p_1 &= V_1 - \left(V - \overline{V_1}\right) = U(g_1, g_2) - \left(U(g_1, g_2) - \overline{V_1}\right) = \overline{V_1}.
\end{aligned}
$$

次に，入札者 $\mathcal{B}_1$ が架空名義 $\mathcal{B}_{n+1}$ を用いて架空名義入札を行うとする (表 4)．しかし，$\mathcal{B}_{n+1}$ は落札者にはなれず，結局落札者 $\mathcal{B}_1$ の支払額は以下の通りとなる．

$$
\begin{aligned}
V &= U(g_1, g_2), \\
V_1 &= U(g_1, g_2), \quad \overline{V_1}', \\
p_1' &= V_1 - \left(V - \overline{V_1}\right) = \overline{V_1}'.
\end{aligned}
$$

表 3: 架空名義入札なし (a)

入札者 $\mathcal{B}_i$	$v_i(g_1)$	$v_i(g_2)$	$v_i(g_1, g_2)$
$\mathcal{B}_1$	$v_1(g_1)$	$U(g_2)$	$\mathbf{U}(g_1, g_2)$
$\mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_n$	$U(g_1)$	$V(g_2)$	$V(g_1, g_2)$

表 4: 架空名義入札あり (a)

入札者 $\mathcal{B}_i$	$v_i(g_1)$	$v_i(g_2)$	$v_i(g_1, g_2)$
$\mathcal{B}_1$	$v_1(g_1)$	0	$\mathbf{U}(g_1, g_2)$
$\mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_n$	$U(g_1)$	$V(g_2)$	$V(g_1, g_2)$
$\mathcal{B}_{n+1}$	0	$U(g_2)$	0

よって，架空名義による $\mathcal{B}_1$ の効用の増加は，$\Delta u_1 = p_1 - p_1' = \overline{V_1} - \overline{V_1}'$ となる．この場合，架空名義による入札値 $U(g_2)$ が $\overline{V_1}$ に影響を与えなければ，$\overline{V_1} = \overline{V_1}'$ より $\overline{V_1} - \overline{V_1}' = 0$ である．また，架空名義による入札値 $U(g_2)$ が $\overline{V_1}$ に影響を与えれば，$\overline{V_1} - \overline{V_1}' < 0$ である．したがって，$\overline{V_1} - \overline{V_1}' \leq 0$ が常に成り立つので，架空名義入札をすることによって効用は変わらないか減少する．ゆえに，ケース (a) の場合，架空名義入札に対するロバストネスが成り立つ．

6.2.2 ケース (b) の効用

まず，架空名義入札をしない場合を考える (表 5)．このとき，落札者 $\mathcal{B}_1$ の支払額は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
V &= U(g_1) + U(g_2), \\
V_1 &= U(g_1) + U(g_2), \quad \overline{V_1}, \\
p_1 &= V_1 - \left(V - \overline{V_1}\right) \\
&= U(g_1) + U(g_2) - \left(U(g_1) + U(g_2) - \overline{V_1}\right) = \overline{V_1} \\
&= MAX(V(g_1) + V(g_2),\ U(g_1, g_2)).
\end{aligned}
$$

もし $p_1 = V(g_1) + V(g_2)$ なら，$v_i(g_1, g_2)$ が支払額 p_1 の計算過程に全く使われないので，単一財，複数ユニット G.V.A. と同様の議論ができる．すなわち，単一財，複数ユニット G.V.A. がロバストネスであるので，$p_1 = V(g_1) + V(g_2)$ である場合

表 5: 架空名義入札なし (b)

入札者 $\mathcal{B}_i$	$v_i(g_1)$	$v_i(g_2)$	$v_i(g_1,g_2)$
$\mathcal{B}_1$	$\mathbf{U}(g_1)$	$\mathbf{U}(g_2)$	$-$
$\mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_n$	$V(g_1)$	$V(g_2)$	$U(g_1,g_2)$

表 6: 架空名義入札あり (b)

入札者 $\mathcal{B}_i$	$v_i(g_1)$	$v_i(g_2)$	$v_i(g_1,g_2)$
$\mathcal{B}_1$	$\mathbf{U}(g_1)$	0	$-$
$\mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_n$	$V(g_1)$	$V(g_2)$	$U(g_1,g_2)$
$\mathcal{B}_{n+1}$	0	$\mathbf{U}(g_2)$	0

ケース (b) もロバストネスとなる．よって，支払額を $p_1 = V(g_1) + V(g_2)$ より下げることができない．逆に，$p_1 = U(g_1, g_2)$ のときに架空名義入札が有効である可能性を持つ．

次に，入札者 $\mathcal{B}_1$ が架空名義 $\mathcal{B}_{n+1}$ を用いて架空名義入札を行うとする (表 6)．この場合，落札者 $\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_{n+1})$ の支払額は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
V &= U(g_1) + U(g_2), \\
V_1 &= U(g_1), \quad \overline{V_1}', \\
p_1' &= V_1 - \left(V - \overline{V_1}'\right) = U(g_1) - \left(U(g_1) + U(g_2) - \overline{V_1}'\right) = \overline{V_1}' - U(g_2). \\
V_{n+1} &= U(g_2), \quad \overline{V_{n+1}}, \\
p_{n+1} &= V_{n+1} - \left(V - \overline{V_{n+1}}\right) \\
&= U(g_2) - \left(U(g_1) + U(g_2) - \overline{V_{n+1}}\right) = \overline{V_{n+1}} - U(g_1). \\
p_1' + p_{n+1} &= \overline{V_1}' + \overline{V_{n+1}} - U(g_1) - U(g_2).
\end{aligned}
$$

このとき，$\overline{V_1}'$, $\overline{V_{n+1}}$ がそれぞれ以下の値を持つ．

$$
\overline{V_1}' = \begin{cases} V(g_1) + U(g_2) \\ U(g_1, g_2) \end{cases}, \quad \overline{V_{n+1}} = \begin{cases} U(g_1) + V(g_2) \\ U(g_1, g_2) \end{cases} \tag{1}
$$

では，$p_1 = U(g_1, g_2)$ のときに架空名義入札が有効であると考えられるが，落札値 $p_1' + p_{n+1}$ をどこまで低くできるのであろうか？式 (1) より，$p_1' + p_{n+1}$ の値は 4

表 7: G.V.A. に対する架空名義入札の有効性

		全入札者の財	
		全ての財が代替的	補完的な財を含む
落札者の財	代替的	×	○
	補完的	×	×

通りの組合せが考えられる．その中で $v_i(g_1, g_2)$ が計算過程に現れないようにするためには，

$$\overline{V_1}' = V(g_1) + U(g_2), \quad \overline{V_{n+1}} = U(g_1) + V(g_2) \tag{2}$$

と選択すればよい．この結果，$\mathcal{B}_1$ の支払額は以下のようになる．

$$\begin{aligned} p_1' + p_{n+1} &= \overline{V_1}' + \overline{V_{n+1}} - U(g_1) - U(g_2) \\ &= (V(g_1) + U(g_2)) + (U(g_1) + V(g_2)) - U(g_1) - U(g_2) \\ &= V(g_1) + V(g_2). \end{aligned}$$

したがって，入札者 $\mathcal{B}_1$ が式 (2) となるように架空名義入札を行えば，落札値を $V(g_1) + V(g_2)$ まで下げることが可能である．これはもうこれ以上下がらない値である．つまり，$p_1 = U(g_1, g_2)$ のとき最大で落札値を $V(g_1) + V(g_2)$ まで下げることが可能である．ただし，架空名義入札による入札値がその入札者の真の評価値を超える場合や低くなる場合も含んでいる．このときの限界効用は以下のように定められる．

$$\begin{aligned} MAX(\Delta u_1) &= MAX(p_1 - (p_1' + p_{n+1})) \\ &= \overline{V_1} - (V(g_1) + V(g_2)). \end{aligned}$$

6.1 節と 6.2 節の結果より，G.V.A. に対する架空名義入札の有効性について表 7 にまとめた．架空名義入札が有効である場合を ○，そうでない場合を × と記した．この表は，単一財，複数ユニット G.V.A. と複数財 G.V.A. の両方ともを含んでいる．よって，自分にとって財が代替的であり，かつ，財を補完的であるとみなす他の入札者が少なくとも 1 人以上存在するとき，G.V.A. に対する架空名義入札が有効となるという結果が得られた．

6.3 架空名義入札を許す G.V.A. の考察

前節の結果より最初から架空名義入札を許した場合，自分の財に対する評価が補完的であるなら架空名義入札を行わないであろうし，代替的なら架空名義入札を用いて個々に入札するであろう．本節では，架空名義入札をプロトコルとして許した場合，架空名義入札を行う入札者に最適戦略があるかどうかについて考察を行う．

表 8は，3 人の入札者 $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3\}$ が 2 種類の財 g_1, g_2 のオークションに参加している例を示している．前節の結果より，補完的な財であると評価している入札者 $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$ は財 g_1, g_2 に対して架空名義入札を用いないで入札を行う．しかし，代替的な財であると評価している入札者 $\mathcal{B}_3$ は財 g_1, g_2 に対して架空名義 $\mathcal{B}_4$ を用いて架空名義入札を行っている．ただし，落札者の架空名義入札が有効になるのは，落札者である $\mathcal{B}_3$ が少なくとも 2 つ以上の財を落札できる場合に限るので，今回 $\mathcal{B}_3$ が 2 つの財 g_1, g_2 を落札するとする．表 8より，財 g_1 が $\mathcal{B}_3$ に財 g_2 が $\mathcal{B}_4$ に割り当てられ，2 つの財の評価値の和は\$50+\$22=\$72 で最大となる．このとき，$\mathcal{B}_3(\mathcal{B}_4)$ の支払額は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
V &= \$72, \\
V_3 &= \$50, \quad \overline{V_3} = \$64, \\
p_3 &= V_3' - (V - V_3'') = \$50 - (\$72 - \$64) = \$42. \\
V_4 &= \$22, \quad \overline{V_4} = \$66, \\
p_4 &= V_4' - (V - V_4'') = \$22 - (\$72 - \$66) = \$16. \\
p_3 + p_4 &= \$58.
\end{aligned}
$$

6.2 節の議論より，架空名義入札によって最大で落札値をいくらまで下げることができるかが明らかになった．この例の場合，$\mathcal{B}_3$ の落札値は\$35 まで下げること可能である (\$8 だけ下げることが可能)．これに対して，$\mathcal{B}_4$ の落札値は\$16 であるので，これ以上下げることができない．

ここで，表 9のように $\mathcal{B}_4$ の評価値を\$22 から\$22+d とすることを考える．このとき $\mathcal{B}_4$ の支払額 p_4 は以下のように計算され，一定となることが分かる．

$$p_4 = \$22 + d - (\$72 + d - \$66) = \$16.$$

しかしながら，この $\mathcal{B}_4$ の評価値操作によって $\mathcal{B}_3$ の支払額は以下のように影響を受ける．

$$\overline{V_3} = \$64 \text{ or } (57 + d) \text{ より},$$

表 8: 架空名義入札を許す G.V.A. の例

入札者 $\mathcal{B}_i$	$v_i(g_1)$	$v_i(g_2)$	$v_i(g_1, g_2)$
$\mathcal{B}_1$	\$35	\$16	\$64
$\mathcal{B}_2$	\$8	\$8	\$45
$\mathcal{B}_3$	**\$50**	\$0	\$38
$\mathcal{B}_4$	\$0	**\$22**	\$0

$$p_3 = \begin{cases} \$50 - (\$72 + d - \$64) = \$(42 - d) & (d < 7) \\ \$50 - (\$72 + d - (\$57 + d)) = \$35 & (d \geq 7) \end{cases}$$

つまり，$\mathcal{B}_4$ が自分の評価値を増やした分だけ，$\mathcal{B}_3$ の支払額が減り，逆に $\mathcal{B}_4$ が自分の評価値を減らした分だけ，$\mathcal{B}_3$ の支払額が増えるのである．しかし，どこまでも減ったり増えたりするわけではなく，d に範囲が存在する．まず，$\mathcal{B}_4$ が落札者であるために，$p_4 = 22 + d > 16$，すなわち，$d > -6$ が成り立つ必要がある．また，d を 7 より大きくとっても，$\mathcal{B}_3$ の支払額は\$35 よりも減らない．例えば，$d = 10$ とすれば p_3=\$35 となり，$\mathcal{B}_3$ の支払額が最小値となる．逆に，$d = -5$ とすれば p_3=(\$42+\$5)==\$47 となり，$\mathcal{B}_3$ の支払額が\$5 増える．

以上より，最初から架空名義入札を許す G.V.A. において架空名義入札を行う際，次の 2 点が分かった．

- 真の評価値以上で入札すると効用が増加する可能性を持つが，真の評価値以上で財を得る危険性もある．
- 真の評価値以下で入札すると効用が減少する危険性だけが生じ，何らメリットがない．

表 9: 架空名義入札値の操作

入札者 $\mathcal{B}_i$	$v_i(g_1)$	$v_i(g_2)$	$v_i(g_1, g_2)$
$\mathcal{B}_1$	\$35	\$16	\$64
$\mathcal{B}_2$	\$8	\$8	\$45
$\mathcal{B}_3$	**\$50**	\$0	\$38
$\mathcal{B}_4$	\$0	**\$22+d**	\$0

以上により，架空名義入札を許す G.V.A. を仮定した場合，架空名義入札を行う入札者に最適戦略が存在するかどうかは不確かなものの，各入札者は自分の真の評価値で入札するのが最もよい戦略のように思える．

7 まとめ

G.V.A. プロトコルの詳細を説明し，G.V.A. に対する架空名義入札の有効性についてレビューを行った [1, 2]．さらに，考察として以下の 3 点を議論した．

- 単一財，複数ユニット G.V.A. が架空名義入札に対してロバストネスであることを示した．
- 複数財 G.V.A. に関して，架空名義入札による限界効用を示した．
- 複数財 G.V.A. に関して，最初から架空名義入札を許す G.V.A. を想定し，架空名義入札の戦略について議論した．

今後の課題としては，架空名義入札を許す G.V.A. において 3 種類以上の補完的な複数財を扱う複数財 G.V.A. に対して，本稿と同等の議論ができるかどうかの検討が必要と考えられる．

参考文献

[1] Y. Sakurai, M. Yokoo and S. Matsubara: A Limitation of the Generalized Vickrey Auction in Electronic Commerce: Robustness against False-name Bids, in *Proceedings of the Sixteenth Notional Conference on Artificial Intelligence (AAAI-99),* pp. 86–92 (1999)

[2] 横尾 真: インターネットオークションの理論と応用, 人工知能学会誌 15 巻 3 号, pp. 404–411 (2000)

[3] W. Vickrey: Counter Speculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders, *Jornal of Finance,* Vol. 16, pp. 8-37 (1961)

[4] H. Varian: Economic Mechanism Design for Computerized Agents, in *Proceedings of the First Usenix Workshop on Electronic Commerce,* (1995)

[5] S. Rosenschein and G. Zlotkin: Rules of Encounter, in *MIT Press,* (1994)