

Title	物理的・工学的実情との整合性を考慮した和分型状態方程式表現：基礎的性質および安定性の解析
Author(s)	小林, 孝一; 木山, 健; 北森, 俊行
Citation	システム制御情報学会論文誌, 19(4): 132-141
Issue Date	2006
Type	Journal Article
Text version	publisher
URL	http://hdl.handle.net/10119/8811
Rights	Copyright (C) 2006 システム制御情報学会. 小林 孝一, 木山 健, 北森 俊行, システム制御情報学会論文誌, 19(4), 2006, 132-141.
Description	

物理的・工学的実情との整合性を考慮した 和分型状態方程式表現 基礎的性質および安定性の解析*

小林 孝一[†]・木山 健[‡]・北森 俊行[§]

Expression of Summational Type State Equation Conformable to Physical/Engineering Actualities — Analysis of Basic Properties and Stability *

Koichi KOBAYASHI[†], Tsuyoshi KIYAMA[‡] and Toshiyuki KITAMORI[§]

This paper proposes a useful expression of summational type state equation conformable to physical and/or engineering actualities. The summational type state equation can solve the following two essential problems in mathematical expressions of the existing state equations: One of them is a physical problem of discontinuity in mathematical expressions for different orders of the existing state equation related to the number of inevitable many parasitic energy elements which always exist in an actual system. The other one is an engineering problem of disunification in mathematical expressions in which continuous-time and discrete-time systems are not described with consistency. First, this paper clarifies and explains the above problems to be solved with a simple example. Next, this paper defines the summational type state equation for the problems and analyzes, for example, basic properties, stability condition and Lyapunov inequality by using the defined state equation. Finally, the effectiveness of the summational type state equation is shown by numerical examples on the stability analysis. From these results, this paper points out that the proposed state equation can overcome difficulties of the above problems and get benefits from the sophisticated results of modern control theory.

1. はじめに

制御理論で扱う力学系や電気系、また、化学プラントなどといった実システムは本質的には分布定数系であり、さらに、経年変化など時間的に変化するシステムがほとんどといって過言ではない。すなわち、実システムの大多数は、動特性の次数という面で厳密には無限大であり、また、非線形時変システムともいえる。このような実システムを厳密にモデリングすることは現在不可能となっている。そこで、PID 制御を代表とする古典制御では、

制御対象の動特性を完全に知ることはできないという立場から、有限個の設計パラメータに基づく部分的補償により制御系設計を行ってきており、現実に即した制御理論として現在でも現場の主流として利用されてきている。

一方、現代制御理論では、最適レギュレータを初め、 \mathcal{H}_∞ 制御、線形行列不等式 (LMI) に基づく制御系設計にいたるまでさまざまな設計法がおもに状態方程式を用いて提案されてきている。しかしながら、従来用いられるこの状態方程式表現は、物理的システムに充満している寄生的エネルギー蓄積要素 (エネルギー蓄積要素のうち容量が微小なもの) など、数式表現上に不整合を有する問題点をもつ。これは、次数の増減に対し、たとえば可制御正準形の数式表現が連続的に変化しないこと、また、動特性の特別な場合として静特性 (直流ゲイン) を数式表現上、陽に包含しておらず、すなわち、状態方程式の一つの係数に静特性が陽に表れておらず、動特性が静特性の滑らかな拡張となっていない問題点などである。このことは、従来の状態方程式表現が物理的システムを表現するのに十分な表現であるとはいいきれないことを示していると同時に、他の状態方程式表現の可能性を示唆している。そこで、北森は積分型状態方程式表現

* 原稿受付 2005年1月19日

[†] 東京工業大学 大学院 情報理工学研究所 Graduate School of Information Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology; 2-12-1 O-okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, JAPAN

[‡] 大阪大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Osaka University; 2-1 Yamada-oka, Suita-city, Osaka 565-0871, JAPAN

[§] 法政大学 (現退職) Retired from Hosei University; Koganei-city, Tokyo, JAPAN

Key Words: summational type state equation, controllability, asymptotic stability, Lyapunov inequality, linear matrix inequality.

を提案し、この表現では上述の問題点が解消されることを示した上で、これまでの現代制御理論の基礎的な成果はそのまま成立することを明らかにした [1]。

本論文ではこれまでの成果を受け、次数の増減に関する数式表現の不連続性の問題点を解消するのみではなく、連続時間系および離散時間系を統一的に表現する和分型状態方程式表現を提案する。この表現は、サンプリング周期をゼロに近づけると、積分型状態方程式表現に収束するという意味でより一般的なシステム表現となっている。この和分型状態方程式表現を用いることにより、連続時間制御を特別な場合として包含するより一般的な離散時間制御理論を構築することが可能となる。本論文では、制御系設計において基盤となる和分型状態方程式表現の基礎的性質および安定性の解析を論じ、次数の増減に対し数式表現、安定条件が連続的に変化すること、従来結果に比べ安定条件が簡便な形式で得られることを明らかにする。とくに、次数の増減操作に対し、他の状態方程式と比較し和分型状態方程式表現を用いて数値的にも安定的に解析できることを示す。

以下、2. では本論文で取り上げる従来の状態方程式表現の問題点を説明する。3. では和分型状態方程式表現を定義し、その一般解、可制御性および可制御正準形などの性質を示す。4. では安定条件について考察し、和分型状態方程式表現を用いた Lyapunov 不等式条件を導出する。5. では数値例により和分型状態方程式表現の有効性を示す。6. はまとめである。

表記： $\mathbf{R}^{n \times m}$ は $n \times m$ の実数行列の集合、 $\mathbf{C}^{n \times m}$ は $n \times m$ の複素行列の集合とする。複素数 a に対し、 \bar{a} は共役複素数とする。行列 M に対し、 M^T は転置行列、 M^* は共役複素転置行列を表す。ラプラス演算子 s およびサンプリング周期 h に対し、差分演算子 [2-4] $\delta := (e^{hs} - 1)/h$ を定義する。なお、差分演算子 δ は $h \rightarrow 0$ とするとラプラス演算子 s に収束する性質をもつ。

2. 従来の状態方程式表現の問題点

本節では、従来の状態方程式表現の実用上での非常に重要な問題点について説明する。

2.1 物理的実情

実システムとシステム表現との整合性

まず、実システムとシステム表現との整合性について説明する。実システムの大多数を厳密に取り扱くと、無数にある寄生的エネルギー蓄積要素の影響で動特性の次数は無限大になってしまう。このことを伝達関数を例に説明すると、一入出力連続時間線形時不変系のシステム表現は、

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3 + \dots}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots} \quad (1)$$

となる。問題の本質を明らかにするために、簡単な 2 次系の伝達関数

$$G(s) = \frac{b_0}{1 + a_1s + a_2s^2} \quad (2)$$

を考える。(2) 式で近似的に表現できる実システムは数多くあるが、電気回路を例にとると Fig. 1 の RLC 回路の伝達関数 $P(s)$ は

$$P(s) = \frac{1}{1 + RCs + LCs^2}$$

となり、(2) 式で記述できる。(2) 式において、 $b_0 = 1$ 、 $a_1 = 1$ として、 $a_2 = 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1, 0$ と変化させたときのステップ応答を Fig. 2 に示す。Fig. 2 から、 $a_2 \rightarrow 0$ に対し、時間応答の典型であるステップ応答という“現象”は連続的に変化することが確認できる。 a_2 をさらに 0 に近づければ、 $a_2 = 0$ のステップ応答波形と区別ができなくなる。現象のみならず、(2) 式から伝達関数表現も同様に、 $a_2 \rightarrow 0$ に対し連続的に $a_2 = 0$ の伝達関数表現に収束していく。なお、 $a_2 \rightarrow 0$ は RLC 回路における $L \rightarrow 0$ あるいは $C \rightarrow 0$ に相当している。

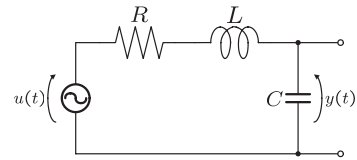


Fig. 1 RLC circuit

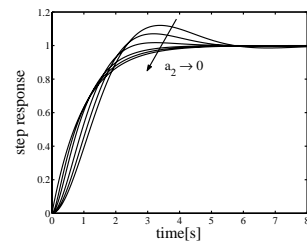


Fig. 2 Step responses of system (2) for each a_2

一方、(2) 式を可制御正準形の状態方程式で表現すると、

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{bmatrix} \frac{b_0}{a_2} & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) \end{cases}$$

となる。 $a_2 \rightarrow 0$ とするとシステム行列と出力行列に無限大になる要素が現れるので、 $a_2 \rightarrow 0$ に対し状態方程式は不連続的に変化する。詳細は参考文献 [5] を参照されたい。

そこで、(2) 式を可制御正準形の積分型状態方程式 [1] で表現すると、

$$\begin{cases} \int_0^t x(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ - \left(\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(0) \right), \\ y(t) = \begin{bmatrix} -a_1 b_0 & -a_2 b_0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix} u(t) \end{cases}$$

となる． $a_2 \rightarrow 0$ とするとシステム行列と出力行列にゼロとなる要素が表れ，各行列の(1,1)要素を取り出すと $x(t)$ の第1要素 $x_1(t)$ を状態変数とした $a_2 = 0$ の積分型状態方程式

$$\begin{cases} \int_0^t x_1(\tau) d\tau = -a_1 x_1(t) + u(t) - (-a_1 x_1(0) + u(0)), \\ y(t) = -a_1 b_0 x_1(t) + b_0 u(t) \end{cases}$$

になるので， $a_2 \rightarrow 0$ に対し積分型状態方程式は表現として連続的に変化するといえる．また，この積分型状態方程式の直達行列はシステムの静特性（直流ゲイン）を表現していることから，静特性を数式表現上に陽に包含した形式となっている．

以上から， $a_2 \rightarrow 0$ のとき，ステップ応答という現象および，伝達関数表現，積分型状態方程式表現は次数の増減に対し“連続”性を有するが，従来の状態方程式表現は“不連続”となってしまっている．すなわち，従来の状態方程式は現象と整合性が取れていないことを意味している．

また，物理的システムに適したシステム表現の一つとして，ディスクリプタシステム表現が知られている．(2)式をディスクリプタシステムで表現すると，

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a_1 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) \end{cases}$$

となる． $a_2 \rightarrow 0$ としても無限大になる係数行列内の要素は現れない．しかしながら， $a_2 = 0$ として， $\tilde{x}(t)$ の第1要素 $\tilde{x}_1(t)$ を状態変数とした1次のディスクリプタシステムは，

$$\begin{cases} a_1 \dot{\tilde{x}}_1(t) = -\tilde{x}_1(t) + u(t), \\ y(t) = b_0 \tilde{x}_1(t) \end{cases}$$

となることから，積分型状態方程式とは異なり行列の一部を取り出すといった容易な手順では低次元化ができず，一般に，逆行列の計算など煩雑な手順が必要になる．さらに，静特性を数式表現上，陽に包含していない．なお，本論文では紙面の制約もあり，ディスクリプタシステムとの詳細な関連については稿を改めて報告することにし，これ以上触れないことにする．

実システムは(1)式のように本質的に次数が無限大であるが，有限次元のシステム表現で近似し，実システムの解析・設計を行ってきている．逆に，このことは無数

に存在するエネルギー蓄積要素の中で，支配的なもの以外で，なおかつ容量が微小で無視しても問題がない寄生的エネルギー蓄積要素が無数にあることを意味している．寄生的エネルギー蓄積要素を一つ考慮するか無視するかで，上述のようにシステム表現の次数は1次変化するが，Fig. 2からわかるように時間応答という物理現象は次数の違いを区別できない，あるいは次数の増減に対し“連続”的であるといえる．本論文では，システム表現に要求される次数の増減に対する現象と整合が取れた連続性を“次数に関する表現の連続性”とよぶことにする．また，静特性を次数ゼロのシステムと考えると，この表現の連続性は静特性と動特性の連続性も意味していることにする．

以下，従来の状態方程式表現を微分型状態方程式表現とよぶことにし，状態変数 $\tilde{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ ，入力信号 $u(t) \in \mathbf{R}^m$ ，出力信号 $y(t) \in \mathbf{R}^p$ とすると，微分型状態方程式表現は，

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t), \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}u(t) \end{cases}$$

と定義される．同様に，状態変数を $x(t) \in \mathbf{R}^n$ とすると，積分型状態方程式表現は，

$$\begin{cases} \int_0^t x(\tau) d\tau = Ax(t) + Bu(t) - (Ax(0) + Bu(0)), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3)$$

と定義される．次節以降での議論をわかりやすくするために，両状態方程式の対応関係を述べておく．微分型状態方程式から積分型状態方程式への対応関係は，状態変数を $x(t) = \hat{x}(t)$ と対応づけることにより，

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ \tilde{C} \end{bmatrix} \tilde{A}^{-1} [I - \tilde{B}] \quad (4)$$

として与えられる．逆に，積分型状態方程式から微分型状態方程式への対応関係は，

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix} A^{-1} [I - B] \quad (5)$$

として与えられる．なお，積分型状態方程式には初期値 $Ax(0) + Bu(0)$ が陽に現れるが，以下では記述の簡単化のために適宜省略するので注意されたい．

2.2 工学的実情

連続時間系と離散時間系との整合性

現代制御理論において，連続時間系の場合は微分型状態方程式が用いられ，離散時間系の多くの場合は，シフト型状態方程式表現

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \hat{A}\tilde{x}_k + \hat{B}u_k, \\ y_k = \hat{C}\tilde{x}_k + \hat{D}u_k \end{cases}$$

が用いられている[6]．離散時間系を議論する際，離散化される以前の連続時間系の存在は必ずしも必要とはされ

ないが、離散時間コントローラ的设计において多くの場合、連続時間系の制御対象を離散化して扱うことから、ここでは連続時間系を周期 h でサンプリングを行い、0次ホールドにより、すなわち、ステップ不変変換 [3,4] により近似的に離散化することを考える。このとき、微分型および積分型状態方程式からシフト型状態方程式への対応関係は、(4)式、(5)式を用いると、

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\hat{A}h} & (e^{\hat{A}h} - I)\hat{A}^{-1}\hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{A^{-1}h} & (I - e^{A^{-1}h})B \\ CA^{-1} & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \quad (7)$$

として与えられる [6]。シフト型状態方程式は $h \rightarrow 0$ とすると、 $\hat{A} \rightarrow I$ 、 $\hat{B} \rightarrow 0$ に収束する。したがって、状態がシフトしない表現に退化してしまい、連続時間系の状態方程式表現との整合性を持たない。

この連続時間系と離散時間系との整合性を考慮したシステム表現として、差分型状態方程式表現

$$\begin{cases} \frac{\tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k}{h} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}u_k, \\ y_k = \tilde{C}\tilde{x}_k + \tilde{D}u_k \end{cases} \quad (8)$$

が知られている [2-4]。連続時間系と離散時間系とのシステム表現の整合性は、シフト型状態方程式への対応関係 (6) 式および (7) 式、また、微分型および積分型の状態方程式から差分型状態方程式への対応関係

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h}(\hat{A} - I) & \frac{1}{h}\hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{h}(e^{\hat{A}h} - I) & \frac{1}{h}(e^{\hat{A}h} - I)\hat{A}^{-1}\hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{h}(e^{A^{-1}h} - I) & \frac{1}{h}(I - e^{A^{-1}h})B \\ CA^{-1} & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \quad (11)$$

から

$$\tilde{A} = \frac{1}{h}(e^{\hat{A}h} - I) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \hat{A}^i h^{i-1}$$

$$\tilde{B} = \frac{1}{h}(e^{\hat{A}h} - I)\hat{A}^{-1}\hat{B} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \hat{A}^{i-1} h^{i-1} \hat{B}$$

となるので [2-4]、差分型状態方程式は $h \rightarrow 0$ とすると微分型状態方程式に収束することが知られている。しかしながら、2.1 で説明したように、微分型状態方程式には“次数に関する表現の連続性”という意味で問題があるため、差分型状態方程式も同様の“次数に関する表現の連続性”の問題点を有している。したがって、この問題点を解消する新たな状態方程式表現を次節以降で提案し、この状態方程式表現自身の基礎的性質および、この状態方程式表現に基づくシステムの安定条件を明らかに

していく。

3. 和分型状態方程式表現の基礎的性質

3.1 和分型状態方程式表現

本論文で提案する和分型状態方程式表現を以下で定義する。

【定義 1】 積分型状態方程式表現 (3) をサンプリング周期 h として、0次ホールドにより、すなわち、ステップ不変変換により近似的に離散化したシステム表現

$$\begin{cases} h \sum_{i=0}^{k-1} x_i = Ax_k + Bu_k - (Ax_0 + Bu_0), \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (12)$$

を和分型状態方程式表現と定義する。また、和分演算子 ξ を $\xi x_k := h \sum_{i=0}^{k-1} x_i$ と定義する。

和分型状態方程式では、初期値 $Ax_0 + Bu_0$ が陽に現れるが、以下では記述の簡単化のために適宜省略するので注意されたい。差分型状態方程式から和分型状態方程式への対応関係は、状態変数を $x_k = (\tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k)/h$ と対応づけることにより、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ \tilde{C} \end{bmatrix} \tilde{A}^{-1} \begin{bmatrix} I & -\tilde{B} \end{bmatrix} \quad (13)$$

として得られる。また、シフト型、微分型および積分型の状態方程式から和分型状態方程式への対応関係は、(9)~(11)式、(13)式より、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h(\hat{A} - I)^{-1} & -(\hat{A} - I)^{-1}\hat{B} \\ h\hat{C}(\hat{A} - I)^{-1} & \hat{D} - \hat{C}(\hat{A} - I)^{-1}\hat{B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h(e^{\hat{A}h} - I)^{-1} & -\hat{A}^{-1}\hat{B} \\ h\hat{C}(e^{\hat{A}h} - I)^{-1} & \hat{D} - \hat{C}\hat{A}^{-1}\hat{B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h(e^{A^{-1}h} - I)^{-1} & B \\ hCA^{-1}(e^{A^{-1}h} - I)^{-1} & D \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

として得られるので、

$$A = h(e^{A^{-1}h} - I)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} A^{-i} h^{i-1} \right)^{-1}$$

から、和分型状態方程式は $h \rightarrow 0$ とすると積分型状態方程式に収束することが理解できる。

(注意) 以下では、 $A = \tilde{A}^{-1}$ の正則性を仮定して解析を行う。この仮定は、和分型状態方程式にディスクリプタシステム表現を導入することで解消可能と思われるが、今後の課題である。

また、和分型状態方程式 (12) は、離散化される以前の連続時間系をもたない離散時間系 (離散事象システムなど) も扱うことが可能であるが、本論文では簡単のため、微分型および積分型の状態方程式との対応関係をもつ離散時間システムを扱うことにする。

【例題 1】 簡単な 1 次系の伝達関数

$$G(s) = \frac{b_0}{1+a_1s} \quad (15)$$

を考える。

まず、サンプリング周期 h でステップ不変変換により離散化された (15) 式の差分伝達関数は、

$$\hat{G}(\delta) = \frac{b_0}{1 + \frac{h}{1-e^{-h/a_1}}\delta}$$

となり、 $h \rightarrow 0$ とすると伝達関数 (15) に収束することに注意されたい。

つぎに、各状態方程式の特徴を考える。微分型状態方程式と積分型状態方程式の比較は 2.1 で説明をしたので、ここでは省略する。ステップ不変変換により離散化された (15) 式のシフト型状態方程式は、

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = e^{-h/a_1}\tilde{x}_k + (1-e^{-h/a_1})u_k, \\ y_k = b_0\tilde{x}_k \end{cases}$$

となり、サンプリング周期を $h \rightarrow 0$ とするとシステム行列は 1 に、入力行列は 0 に退化してしまう。

同様に、(15) 式の差分型状態方程式は、

$$\begin{cases} \frac{\tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k}{h} = \frac{e^{-h/a_1} - 1}{h}\tilde{x}_k + \frac{1 - e^{-h/a_1}}{h}u_k, \\ y_k = b_0\tilde{x}_k \end{cases}$$

となり、 $h \rightarrow 0$ とすると微分型状態方程式

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = -\frac{1}{a_1}\tilde{x}(t) + \frac{1}{a_1}u(t), \\ y(t) = b_0\tilde{x}(t) \end{cases}$$

に収束する。しかしながら、 $h \rightarrow 0$ および $a_1 \rightarrow 0$ とすると、システム行列と入力行列は無限大になってしまう。

一方、同様に (15) 式の和分型状態方程式は、

$$\begin{cases} h \sum_{i=0}^{k-1} x_i = \frac{h}{e^{-h/a_1} - 1} x_k + u_k, \\ y_k = \frac{b_0 h}{e^{-h/a_1} - 1} x_k + b_0 u_k \end{cases}$$

となり、 $h \rightarrow 0$ とすると積分型状態方程式

$$\begin{cases} \int_0^t x(\tau) d\tau = -a_1 x(t) + u(t), \\ y(t) = -a_1 b_0 x(t) + b_0 u(t) \end{cases}$$

に収束する。さらに、 $h \rightarrow 0$ および $a_1 \rightarrow 0$ としても、無限大になる係数行列は発生せず、この状態方程式は連続的に次数ゼロの、すなわち静特性のシステム

$$y(t) = b_0 u(t)$$

に収束する。したがって、和分型状態方程式表現は、次数およびサンプリング周期に関する表現の連続性を有していることが理解できる。

3.2 一般解

本小節では、和分型状態方程式 (12) の一般解を導出し、積分型状態方程式の一般解との関連性を明らかにする。 $h \sum_{i=0}^{k-1} x_i = Ax_k + Bu_k - (Ax_0 + Bu_0)$ は

$$x_k = (x_0 + A^{-1}Bu_0) - A^{-1}Bu_k + hA^{-1} \sum_{i=0}^{k-1} x_i$$

に変形できる。この式に $k=1, 2, 3$ を代入すると、

$$\begin{aligned} x_1 &= (I + hA^{-1})x_0 + A^{-1}Bu_0 - A^{-1}Bu_1 \\ x_2 &= (I + hA^{-1})^2(x_0 + A^{-1}Bu_0) \\ &\quad - h(I + hA^{-1})A^{-2}Bu_0 - hA^{-2}Bu_1 - A^{-1}Bu_2 \\ x_3 &= (I + hA^{-1})^3(x_0 + A^{-1}Bu_0) \\ &\quad - h(I + hA^{-1})^2A^{-2}Bu_0 \\ &\quad - h(I + hA^{-1})A^{-2}Bu_1 - hA^{-2}Bu_2 - A^{-1}Bu_3 \end{aligned}$$

となり、したがって、一般の k の場合、

$$x_k = (I + hA^{-1})^k(x_0 + A^{-1}Bu_0) - A^{-1}Bu_k - h \sum_{i=0}^{k-1} (I + hA^{-1})^{k-1-i} A^{-2}Bu_i \quad (16)$$

となる。仮定より、和分型状態方程式は積分型状態方程式との対応関係をもつ。したがって、この一般解は、 $h \rightarrow 0$ とすると $(I + hA^{-1})^k \rightarrow e^{A^{-1}hk}$ となることから [4]、積分型状態方程式の一般解 [1]

$$x(t) = e^{A^{-1}t}(x(0) + A^{-1}Bu(0)) - A^{-1}Bu(t) - \int_0^t e^{A^{-1}(t-\tau)} A^{-2}Bu(\tau) d\tau$$

に収束する。なお、(14) 式より $I + hA^{-1} = e^{A^{-1}h}$ が成立するので、 $(I + hA^{-1})^k$ は必ず正則となることに注意されたい。

3.3 可制御性と可制御正準形

和分型状態方程式の可制御性を以下のように定義する。

【定義 2】 任意の初期時刻 $k=0$ および和分型状態方程式 (12) で表現された $I + hA^{-1}$ が正則となるシステムの任意の初期状態 x_0 が与えられているとする。このとき、適当な有限時刻 N までの適当な入力 u_k を印加することによって、 $x_N = 0$ とすることができるならば、このシステムは可制御であるという。

定義した和分型状態方程式の可制御性に関して、以下の補題が成立する。

【補題 1】 和分型状態方程式 (12) で表現された $I + hA^{-1}$ が正則となるシステムが可制御である必要十分条件は、

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \right) = n \quad (17)$$

が成立することである。このとき、和分型状態方程式 (12) の可制御性は、(13) 式の対応関係から求められる差

分型状態方程式 (8) の可制御性 [3,4] と等価である。

(証明) まず, 必要性を示す。すなわち, 和分型状態方程式 (12) で表現されたシステムが可制御であれば, (17) 式が成立することを示す。可制御性の定義および和分型状態方程式の一般解 (16) より, 任意の x_0 , 適当な有限時刻 N および u_k^* が存在して $x_N = 0$ となるので,

$$x_0 = -A^{-1}Bu_0^* + (I+hA^{-1})^{-N}A^{-1}Bu_N^* + h \sum_{i=0}^{N-1} (I+hA^{-1})^{-1-i}A^{-2}Bu_i^* \quad (18)$$

が成立する。一方, $(I+hA^{-1})^{-k}$ は,

$$(I+hA^{-1}) \sum_{i=0}^{\infty} (-hA^{-1})^i = I$$

に注意すると, Cayley-Hamilton の定理より,

$$(I+hA^{-1})^{-k} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} (-hA^{-1})^i \right\}^k = \beta_0(k)I + \beta_1(k)A^{-1} + \dots + \beta_{n-1}(k)A^{-n+1} \quad (19)$$

と表すことができる。ここで, $\beta_j(k)$ は適当なスカラー関数である。まず, (18) 式第 1 項は, $-A^{-1}Bu_0^* = -hA^{-n-1}A^n u_0^*/h$ とする。 A^n は Cayley-Hamilton の定理を適用すると,

$$A^n = -\alpha_1 A^{n-1} - \dots - \alpha_{n-1} A - \alpha_n I \quad (20)$$

となる。ここで, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ は行列 A の特性多項式

$$\det[\lambda I - A] = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n \quad (21)$$

の係数である。よって,

$$-A^{-1}Bu_0^* = hA^{-n-1} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} H_0 \quad (22)$$

$$H_0 := \begin{bmatrix} \frac{\alpha_n u_0^{*T}}{h} & \frac{\alpha_{n-1} u_0^{*T}}{h} & \dots & \frac{\alpha_1 u_0^{*T}}{h} \end{bmatrix}^T$$

となる。(18) 式第 2 項は, (19) 式を適用すると,

$$(I+hA^{-1})^{-N}A^{-1}Bu_N^* = A^{-n-1}(\beta_0(N)A^n + \dots + \beta_{n-1}(N)A)Bu_N^*$$

となり, (20) 式を適用すると,

$$(I+hA^{-1})^{-N}A^{-1}Bu_N^* = hA^{-n-1} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} H_N \quad (23)$$

$$H_N := \begin{bmatrix} h_N^T(n-1) & h_N^T(n-2) & \dots & h_N^T(0) \end{bmatrix}^T$$

$$h_N(n-1) := \frac{-\alpha_n \beta_0(N)u_N^*}{h}$$

$$h_N(j) := \frac{(\beta_{j+1}(N) - \alpha_{j+1}\beta_0(N))u_N^*}{h}, \quad j=0, 1, \dots, n-2$$

となる。(18) 式第 3 項は, $(I+hA^{-1})^{-1-i}$, $i=0, 1, \dots, N-1$ に (19) 式を適用し, 整理すると,

$$h \sum_{i=0}^{N-1} (I+hA^{-1})^{-1-i}A^{-2}Bu_i^* = hA^{-n-1} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} H \quad (24)$$

$$H := \begin{bmatrix} h^T(n-1) & h^T(n-2) & \dots & h^T(0) \end{bmatrix}^T$$

$$h(j) := \sum_{i=0}^{n-1} \beta_j(i+1)u_i^*, \quad j=0, 1, \dots, n-1$$

を得る。(22) 式, (23) 式および (24) 式より, (18) 式は

$$x_0 = hA^{-n-1} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} (H_0 + H_N + H) \quad (25)$$

となる。任意の x_0 に対して, (25) 式を満たす $H_0 + H_N + H$ が存在するので, (17) 式が成立する。

つぎに, 十分性を示す。すなわち, (17) 式が成立しているならば, 和分型状態方程式 (12) で表現されたシステムが可制御であることを示す。まず,

$$G_c = h \sum_{i=1}^{N-1} (I+hA^{-1})^{-1-i}A^{-2}B \times B^T(A^{-2})^T(I+hA^{-T})^{-1-i} \quad (26)$$

で定義される行列 G_c が正定すなわち正則となることを示す。ここで, G_c が正定でないとして, 適当な n 次元ベクトル $\hat{v} \neq 0$ に対して $\hat{v}^T G_c \hat{v} = 0$ が成立し,

$$B^T(A^{-2})^T(I+hA^{-T})^{-1-i}\hat{v} = 0 \quad (27)$$

でなければならない。(17) 式の時間差分は

$$\begin{aligned} & ((I+hA^{-T})^{-i} - (I+hA^{-T})^{-1-i})/h \\ & = A^{-T}(I+hA^{-T})^{-1-i} \end{aligned}$$

となるから, (27) 式を $(n-1)$ 回時間差分し, まとめると,

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^T (A^{-n-1})^T (I+hA^{-T})^{-1-i}\hat{v} = 0$$

となる。仮定より $(A^{-n-1})^T (I+hA^{-T})^{-1-i}$ は正則であり, さらに (17) 式を仮定していることから, $\hat{v} = 0$ とならなければならない。したがって G_c は正定でなければならない。(26) 式の G_c を用いて, 入力 u_k , $k=1, 2, \dots, N-1$ を

$$u_k = B^T(A^{-2})^T(I+hA^{-T})^{-1-k}G_c^{-1}x_0$$

と定めると(ただし, $u_0 = u_N = 0$ とする), 一般解 (16) より必ず $x_N = 0$ とできる。すなわち, システム (12) は可制御である。

また, 和分型状態方程式 (12) の可制御性と差分型状態方程式 (8) の可制御性の等価性は (13) 式に注意すると,

$$\left[\tilde{A}^{n-1} \tilde{B} \ \tilde{A}^{n-2} \tilde{B} \ \dots \ \tilde{B} \right] = -A^{-n} \left[B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B \right]$$

が成立することより明らかである。

以上の可制御性を満たす場合、和分型状態方程式の可制御正準形を以下の補題で与える。なお、簡単化のため一入出力系を扱うが、多入出力系への拡張も可能である。

【補題 2】 和分型状態方程式 (12) で表現された一入出力系が可制御であるとき、次の可制御正準形と同値である。

$$h \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{x}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \tilde{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{b}} u_k,$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \end{bmatrix}}_{\tilde{c}} \tilde{x}_k + \begin{bmatrix} \kappa \end{bmatrix} u_k$$

ただし、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ は行列 A の特性多項式 (21) の係数であり、 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \kappa$ は適当な実数である。

(証明) 可制御正準形の各行列を $\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}$ とおく。なお、 κ は同値変換に対して不変である。このとき、任意の 1 入力 1 出力 n 次元の可制御なシステム

$$\begin{cases} h \sum_{i=0}^{k-1} x_i = Ax_k + bu_k, \\ y_k = cx_k + du_k \end{cases}$$

を考える。初期値 $Ax_0 + bu_0$ については、行列 A, b が同値変換されるのみで、初期値には依存しないので記述を省略する。ここで、 $\kappa = d$ とおき、変換行列

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & \dots & t_n \end{bmatrix}^{-1}$$

を定める。ただし、 $t_1 = b, t_2 = (A + \alpha_1 I)b, \dots, t_{n-1} = (A^{n-2} + \alpha_1 A^{n-3} + \dots + \alpha_{n-2} I)b, t_n = (A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} I)b$ である。Cayley-Hamilton の定理より、 $At_1 = -\alpha_1 t_1 + t_2, At_2 = -\alpha_2 t_1 + t_3, \dots, At_{n-1} = -\alpha_{n-1} t_1 + t_n, At_n = -\alpha_n t_1$ 、すなわち、 $AT^{-1} = T^{-1}\tilde{A}$ 、等価的に $\tilde{A} = TAT^{-1}$ が成立する。同様に、 $\tilde{b} = Tb, \tilde{c} = cT^{-1}$ が成立することは明らかである。したがって、和分型状態方程式 (12) で表現された一入出力系が可制御であるとき、可制御正準形と同値である。

一入出力系の差分伝達関数

$$G(\delta) = \frac{b_0 + b_1 \delta + \dots + b_{n-1} \delta^{n-1}}{1 + a_1 \delta + a_2 \delta^2 + \dots + a_n \delta^n}$$

に対する可制御正準形は、

$$h \sum_{i=0}^{k-1} x_i = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u_k,$$

$$y_k = \begin{bmatrix} -a_1 b_0 + b_1 & -a_2 b_0 + b_2 & \dots \\ -a_{n-1} b_0 + b_{n-1} & -a_n b_0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix} u_k$$

となることから、和分型状態方程式の可制御正準形は、たとえば、 a_n が微小な場合、各係数行列の一部分を取り出すことだけで、容易に低次元化されたシステムを得ることができる。すなわち、適当な次数で打ち切った残りの部分の表現は不変のままよい。この表現の不変性は、システム同定の際などに非常に有用な性質と考えられる。

可観測性に関しては、(12) 式 of 双対システムを

$$\begin{cases} h \sum_{i=0}^{k-1} x_i = A^T x_k + C^T u_k - (A^T x_0 + C^T u_0), \\ y_k = B^T x_k + D^T u_k \end{cases}$$

と定義し、双対システムの可制御性を考えればよい。詳細については省略する。

4. 安定解析

4.1 システム行列 A の固有値と安定性

和分型状態方程式で表現されたシステム (12) の安定性をシステム行列 A の固有値から考察する。和分型状態方程式で表現されたシステム行列 A の固有値は、方程式 $|\lambda I - A| = 0$ の解 λ で与えられる。

まず、和分型状態方程式で表現されたシステム (12) の漸近安定性を以下のように定義する。

【定義 3】 和分型状態方程式で表現されたシステム

$$h \sum_{i=0}^{k-1} x_i = Ax_k - Ax_0 \quad (28)$$

が与えられているとする。また、 x_k のユークリッドノルムを $\|x_k\| := (x_k^T x_k)^{1/2}$ と定義する。このとき、任意の初期状態 x_0 に対してシステム (28) の解 x_k が

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = 0 \quad (29)$$

となるとき、システム (28) は漸近安定である。

システム (28) の漸近安定性とシステム行列 A の固有値 λ との関係について、以下の補題が成立する。

【補題 3】 和分型状態方程式で表現されたシステム (28) が与えられているとする。このとき、システム (28) が漸近安定であるための必要十分条件は、システム行列 A のすべての固有値の実部が $-h/2$ 未満であることである。

(証明) まず, 必要性を対偶により示す. すなわち, A の固有値で実部が $-h/2$ 以上となるものが少なくとも一つ存在すると仮定し, システム (28) が漸近安定とならないことを示す. 実部が $-h/2$ 以上となる固有値を $\hat{\lambda}$ とし, 対応する固有ベクトルを η とする. 仮定より, $\hat{\lambda}$ は

$$\hat{\lambda} + \bar{\hat{\lambda}} + h \geq 0 \quad (30)$$

を満たす. また, システム (28) の一般解は (16) 式において $u_i = 0, i = 0, 1, \dots, k$ とすればよく,

$$x_k = (I + hA^{-1})^k x_0 \quad (31)$$

として得られることから, 初期状態 η に対する応答は $x_k = (1 + h/\hat{\lambda})^k \eta$ である. (30) 式より $|1 + h/\hat{\lambda}| \geq 1$ となることから, x_k は原点に収束せず, 漸近安定ではない.

つぎに, 十分性を示す. A のすべての固有値の実部が $-h/2$ 未満であると仮定し, システム (28) が漸近安定であることを示す. このとき, すべての固有値に対して,

$$\lambda + \bar{\lambda} + h < 0 \quad (32)$$

が成立する. (32) 式の両辺を $\lambda \bar{\lambda} \neq 0$ で割ると,

$$1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\bar{\lambda}} + \frac{h}{\lambda \bar{\lambda}} < 1$$

となり, 平方完成を施すと,

$$\left(1 + \frac{h}{\lambda}\right) \left(1 + \frac{h}{\bar{\lambda}}\right) < 1$$

を得る. したがって, ある誘導ノルム $\|\cdot\|$ が存在し, $\|I + hA^{-1}\| < 1$ が成立する [7]. したがって, 誘導ノルムの性質 [7] より, $\|(I + hA^{-1})^k\| \leq \|I + hA^{-1}\|^k < 1$ であることから, システム (28) は漸近安定である.

4.2 Lyapunov の安定条件

和分型状態方程式で表現されたシステムの安定条件として, 以下の定理を得る.

【定理 1】 和分型状態方程式で表現されたシステム (28) が与えられているとする. このとき, システム (28) が漸近安定であるための必要十分条件は,

$$PA + A^T P + hP < 0 \quad (33)$$

を満たす実対称行列 $P > 0$ が存在することである.

(証明) まず, 十分性を示す. (33) 式を満たす実対称行列 $P > 0$ が存在すると仮定する. このとき, システム行列 A が正則である仮定から, Lyapunov 関数

$$V(x_k) := x_k^T A^T P A x_k \quad (34)$$

を定義する. $V(x_k)$ の時間的变化は, (31) 式より $x_{k+1} = (I + hA^{-1})x_k$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V(x_k)}{\Delta t} &= \frac{V(x_{k+1}) - V(x_k)}{h} \\ &= x_k^T (PA + A^T P + hP) x_k < 0 \end{aligned} \quad (35)$$

として得られ, $V(x_k)$ は正定な単調減少関数となる. すなわち, x_k のユークリッドノルム $\|x_k\|$ を用いると, $\Delta V(x_k)/\Delta t \leq -\varepsilon \|x_k\|^2$ がある $\varepsilon > 0$ に対して成立することから, 平衡状態 $\Delta V(x_k)/\Delta t \equiv 0$ となるのは $x_k \equiv 0$ の場合のみである. したがって, (29) 式が成立するので, システム (28) は漸近安定である.

つぎに, 必要性を示す. システム (28) が漸近安定であると仮定する. このとき, (33) 式を満たす実対称行列 $P > 0$ が存在することを示す. 任意の実対称行列 $Q > 0$ に対して,

$$P := \lim_{k \rightarrow \infty} h \sum_{i=0}^{k-1} A^{-T} R_i A^{-1} > 0 \quad (36)$$

を定義する. ここで $R_i := (I + hA^{-T})^i Q (I + hA^{-1})^i$ である. (33) 式左辺に (36) 式を代入し, 平方完成を施すと,

$$\begin{aligned} PA + A^T P + hP &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k-1} (hA^{-T} R_i + hR_i A^{-1} + h^2 A^{-T} R_i A^{-1}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k-1} \{(I + hA^{-1})^T R_i (I + hA^{-1}) - R_i\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k-1} (R_{i+1} - R_i) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (R_k - Q) \end{aligned}$$

に変形できる. 仮定より, $\lim_{k \rightarrow \infty} (I + hA^{-1})^k = 0$ が成立するので, $\lim_{k \rightarrow \infty} (R_k - Q) = -Q < 0$ となり, (33) 式を満たす実対称行列 $P > 0$ が確かに存在する.

和分型状態方程式で表現されたシステムについての Lyapunov 不等式条件は, $h \rightarrow 0$ とすると, 収束先の積分型状態方程式で表現されたシステムについての Lyapunov 不等式条件に収束する. このことから, 上述の Lyapunov 不等式条件は, $h \rightarrow 0$ の特別な場合として連続時間系の Lyapunov 不等式条件を包含するより一般化された条件であることが理解できる.

また, 和分型状態方程式 (28) には初期状態 x_0 が含まれているが, Lyapunov 関数を (34) 式のように選び, 時間変化 (35) により, Lyapunov 不等式 (33) には初期状態 x_0 が現れてこないことに注意されたい.

4.3 一般化 Lyapunov 不等式との関係

和分型状態方程式で表現されたシステム (28) に対する安定条件として, 補題 3, 定理 1 を導出したが, ここでは, 指定した領域にシステム行列の固有値が存在するかどうかを判定する一般化 Lyapunov 不等式 [8] との関係性を明確化する.

まず, 以下の一般化 Lyapunov 不等式の命題を紹介し, つぎに, 固有値の領域を特定化することからシステム (28) が漸近安定となる必要十分条件を導出する.

【命題 1】 複素行列 $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ と実数のスカラー

$r, s, q \in \mathbf{R}$ が与えられているとする. ここで $qr - s^2 < 0$ ならば, S のすべての固有値が集合

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \mathbf{C} : \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} r & s \\ s & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} > 0 \right\} \quad (37)$$

に属するための必要十分条件は,

$$\begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} rP & sP \\ sP & qP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix} > 0 \quad (38)$$

を満たす複素エルミート行列 $P > 0$ が存在することである.

命題 1 の固有値の領域を特定化することから, 和分型状態方程式で記述されるシステム (28) に対する Lyapunov 不等式条件を以下の系で与える.

【系 1】 実数行列 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 実数の正のスカラー $h \in \mathbf{R}$ および和分型状態方程式で表現されたシステム (28) が与えられているとする. このとき, システム (28) が漸近安定であるための必要十分条件は, すなわち, 等価的にシステム行列 A のすべての固有値が集合

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \mathbf{C} : \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} > 0 \right\}$$

に属するための必要十分条件は,

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -P \\ -P & -hP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} > 0 \quad (39)$$

を満たす実対称行列 $P > 0$ が存在することである.

(証明) システム行列 A の固有値を λ とする. 和分型状態方程式で表現されたシステム (28) が漸近安定であるための必要十分条件は, 補題 3 より, すべての λ が $\lambda + \bar{\lambda} + h < 0$ を満たすことである. したがって, (37) 式および (38) 式において $r = 0, s = -1, q = -h$ とすると, 系 1 を直ちに得ることができる.

系 1 と定理 1, すなわち, 条件 (33) と条件 (39) は等価な結果を与えていることに注意されたい.

5. 数値例

和分型状態方程式の有効性を定理 1 を用いて検証する. 簡単な電気回路 [5] を解析対象とする.

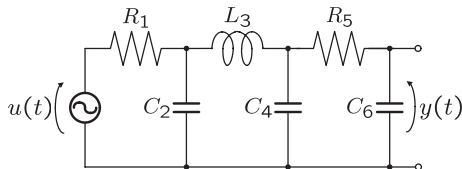


Fig. 3 Sample of analyzed system

Fig. 3 のシステムの伝達関数は,

$$G(s) = \frac{1}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4} \quad (40)$$

$$a_1 = C_2 R_1 + C_4 R_1 + C_6 R_1 + C_6 R_5$$

$$a_2 = C_2 C_6 R_1 R_5 + C_4 C_6 R_1 R_5 + C_4 L_3 + C_6 L_3$$

$$a_3 = C_2 C_4 L_3 R_1 + C_2 C_6 L_3 R_1 + C_4 C_6 L_3 R_5$$

$$a_4 = C_2 C_4 C_6 L_3 R_1 R_5$$

として得られる.

まず, このシステムの和分型状態方程式を導出する. (40) 式の伝達関数から可制御正準形の積分型状態方程式

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & 1 \end{array} \right] \quad (41)$$

を求め, サンプリング周期 h および 0 次ホールドを用いるステップ不変変換を用いた (14) 式の対応関係を適用し, システム (41) を近似的に離散化する.

つぎに, 比較のため差分型状態方程式を導出する. 伝達関数 (40) から可制御正準形の微分型状態方程式

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{a_4} & -\frac{a_1}{a_4} & -\frac{a_2}{a_4} & -\frac{a_3}{a_4} & 1 \\ \hline \frac{1}{a_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (42)$$

を求め, サンプリング周期 h および 0 次ホールドを用いるステップ不変変換を用いた (10) 式の対応関係を適用し, システム (42) を近似的に離散化する.

各パラメータは $R_1 = 0.15[\text{M}\Omega]$, $R_5 = 5 \times 10^{-14}[\text{M}\Omega]$, $L_3 = 10[\text{MH}]$, $C_4 = 2.0[\mu\text{F}]$, $C_6 = 60[\mu\text{F}]$ とし, $C_2 = 10[\mu\text{F}]$, $C_2 = 10^{-25}[\mu\text{F}]$ および $C_2 = 0[\mu\text{F}]$ の 3 通りの場合を検証する. なお, $C_2 = 10, 10^{-25}$ の場合は (41) 式, (42) 式を用いるが, $C_2 = 0$ の場合は $a_4 = 0$ となり, 制御対象の次数が 4 次から 3 次になるので, 低次元化された可制御正準形の積分型および微分型の状態方程式

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} -a_1 & -a_2 & -a_3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -a_1 & -a_2 & -a_3 & 1 \end{array} \right] \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{a_3} & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3} & 1 \\ \hline \frac{1}{a_3} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (44)$$

を同様に近似的に離散化した和分型および差分型の状態方程式を用いる.

ここで, 以下の問題を考える.

【問題1】 サンプル周期を $h = 0.01$ に固定し、 $C_2 = 10, 10^{-25}, 0[\mu F]$ において、連続時間系 (40) の積分型および微分型の状態方程式の可制御正準形 (41)~(44) 式をステップ不変変換により離散化した和分型および差分型の状態方程式に基づく各解析対象の漸近安定性を Lyapunov の安定定理を用いて確認せよ。すなわち、和分型状態方程式の場合は定理 1 より LMI 条件

$$PA + A^T P + hP < 0, \quad P = P^T > 0 \quad (45)$$

の可解性、差分型状態方程式の場合は LMI 条件 [2,4]

$$\tilde{P}\tilde{A} + \tilde{A}^T\tilde{P} + h\tilde{A}^T\tilde{P}\tilde{A} < 0, \quad \tilde{P} = \tilde{P}^T > 0 \quad (46)$$

の可解性を確認せよ。

各 C_2 に対する計算結果を Table 1 に示す。

Table 1 Feasibility of Lyapunov inequalities ($h = 0.01$)

	difference	summational
$C_2 = 10$	feasible	feasible
$C_2 = 10^{-25}$	infeasible	feasible
$C_2 = 0$	feasible	feasible

数値計算には、MATLAB6.1 LMI Control Toolbox の feasp[9] を用いた。計算機環境としては、CPU: Intel Pentium4 3.4GHz, Memory: 1GB を用いた。

いずれの場合においてもシステムは漸近安定であることから、すべての場合で (45) 式、(46) 式は可解でなければならない。実際、和分型状態方程式に基づく解析では、すべての場合で (45) 式が可解になる。しかし、差分型状態方程式に基づく解析では、 $C_2 = 10^{-25}$ の場合で (46) 式は非可解となってしまうことが理解できる。 $C_2 = 10^{-25}$ の場合、(42) 式の係数の一部が非常に大きくなり、数値的に不安定になったことが原因と考えられる。以上から、和分型状態方程式において、次数の増減に関する数式表現と数値計算結果の連続性、すなわち“次数に関する表現の連続性”が確認できる。

6. おわりに

物理的システムとの整合性および、連続時間システムと離散時間システムとの連続性という物理的・工学的実情を考慮したシステム表現として、和分型状態方程式表現を提案した。この状態方程式の基礎的性質および安定性を考察し、数値例でその有効性を検証した。和分型状態方程式表現は既存の状態方程式表現の問題点を解消したうえで、これまでの制御理論の豊かな成果を継承することから、基礎的なシステム表現の一つになるものと考えられる。

また、和分型状態方程式に基づくロバスト安定解析、制御系設計などの研究成果も既に得られているが、稿を改めて報告することにする。

最後に、有益な御意見をいただきました査読者の方々に感謝いたします。なお、本研究の一部は文部科学省科

学研究費補助金(若手研究(B)No. 16760342)による支援を受けて行われています。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- [1] T. Kitamori: Integral type state equation expression conformable to physical systems; *Preprints of China-Japan Joint Symposium on Systems Control Theory and Its Application*, pp. 99-102 (1989)
- [2] 北森: 連続時間制御と離散時間制御の融合; 計測と制御, Vol. 22, No. 7, pp. 599-605 (1983)
- [3] R. H. Middleton and G. C. Goodwin: *Digital Control and Estimation: A Unified Approach*, Prentice Hall (1990)
- [4] 金井, 堀: デジタル制御システム入門 - デルタオペレータの適用, 槇書店 (1992)
- [5] 北森: I-PD 制御方式の原理と設計法; システム/制御/情報, Vol. 42, No. 1, pp. 7-17 (1998)
- [6] 萩原: デジタル制御入門, コロナ社 (1999)
- [7] 井村: システム制御のための安定論, コロナ社 (2000)
- [8] 岩崎: LMI と制御, 昭晃堂 (1997)
- [9] P. Gahinet et al.: *LMI control toolbox, For Use with MATLAB*, The MathWorks Inc. (1995)

著者略歴

こばやし こういち
小林 孝一 (学生会員)



2000年法政大学大学院工学研究科修士課程修了。2000~2004年新日本製鐵(株)勤務。2004年東京工業大学大学院情報理工学研究科博士後期課程入学、現在に至る。制御理論の研究に従事。計測自動制御学会、日本応用数理学会の会員。

きやま つよし
木山 健 (正会員)



2001年東京工業大学大学院理工学研究科博士後期課程修了(制御工学専攻)。東京大学大学院情報理工学系研究科特任研究員、大阪大学大学院工学研究科研究員、同研究科特任教員、助手などを経て、2004年同研究科特任助手。ロバスト制御を中心に研究に従事。計測自動制御学会などの会員。博士(工学)。

きた もり とし ゆき
北森 俊行 (名誉会員)



1962年東京大学大学院数物系研究科博士課程修了、工学博士。同年4月慶應義塾大学工学部助手、専任講師、助教授を経て、1965年東京大学工学部助教授、1979~1994年同教授。1994年東京大学名誉教授。1994~2004年法政大学工学部教授。1994年度計測自動制御学会会長。制御系の工学的設計法、計測系の機能と構造、システムの機能の研究に従事。1964, 71, 80, 91, 92, 93年計測自動制御学会論文賞、1990年鳥津賞受賞。計測自動制御学会名誉会員、IEEEなどの会員。