論　文

和分型／差分型状態方程式表現に基づくロバスト制御系の解析／設計条件の関連性について*

小林　孝一 †・木山　健 ‡・北森　俊行 §

On the Relation between Analysis/Synthesis Conditions for Robust Control System via Expressions of Summational/Difference Type State Equation*

Koichi KOBAYASHI†, Tsuyoshi KIYAMA‡ and Toshiyuki KITAMORI§

This paper considers robust control analysis and synthesis problems via the expression of our previously proposed summational type state equation. The summational type state equation is a mathematical expression to solve two essential problems, i.e., one of them is a physical problem of discontinuity in mathematical expressions e.g. the controllable canonical form for different orders of the existing state equation, and the other one is an engineering problem of disunification in which continuous-time and discrete-time systems are not described with consistency. First, this paper introduces the summational type state equation. Next, a robust stability analysis condition and a feasible condition for the scaled $\mathcal{H}_\infty$ control synthesis problem are derived from the summational type state equation. Furthermore, the relation between analysis/synthesis conditions based on summational and difference type state equations is clarified. Finally, the effectiveness of the summational type state equation is shown by numerical examples on a sensitivity minimization problem. From these results, this paper points out that the summational type state equation is one of possible important mathematical expressions in control theory.

1.　はじめに

現代制御理論において従来用いられている状態方程式表現は，たとえば，一入出力系の伝達関数における分母多項式の最高次の係数をゼロに近づける場合，この伝達関数の可制御正準形の状態方程式表現が次数の増減に対し連続的に変化しない数式表現上の問題点を有する [1,2]. このことは，従来の状態方程式表現が，次数を不明瞭とする微小なエネルギー蓄積要素の充満する現実の物理的システムを表現するのに十分な表現であるとはいいきれないことを示していると同時に，他の状態方程式表現が存在する可能性も示唆している．この観点から，著者らは参考文献 [1] において，この次数の増減に関する問題点を解消するのみではなく，連続時間系および離散時間系を統一的に表現する和分型状態方程式表現を提案し，基礎的性質および安定性について論じてきた．

本論文では，参考文献 [1] の成果を受け，和分型状態方程式による制御系のロバスト安定性の解析および設計への応用を論じ，線形行列不等式（LMI）に基づくロバスト安定条件およびスケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題に対する可解条件を導出する．また，導出される条件の合同変換により，既存の差分型状態方程式 [3–5] による等価な可解条件を導出し，和分型および差分型の状態方程式による解析および設計の条件の代数的な対応関係を明確化する．とくに，和分型状態方程式に基づく条件は，既存の差分型状態方程式に基づく条件より行列不等式のサイズが小さくなる特徴を説明する．なお，得られた和分型および差分型の状態方程式による解析および設計の条件は，サンプリング周期をゼロに近づける場合，連続時間系の表現である積分型 [6] および通常（微分型）の状態方程式による対応する各条件に収束するという意味で，より一般的な解析および設計の条件になっていることに注意されたい．

* 原稿受付　1995 年 8 月 1 日
† 東京工業大学　大学院　情報理工学研究科　Graduate School of Information Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology; 2-12-1 O-okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, JAPAN
‡ 大阪大学　大学院　工学研究科　Graduate School of Engineering, Osaka University; 2-1 Yamada-oka, Suita-city, Osaka 565-0871, JAPAN
§ 法政大学（現退職）　Retired from Hosei University; Koganei-city, Tokyo, JAPAN
Key Words: summational type state equation, difference type state equation, scaled $\mathcal{H}_\infty$ control, linear matrix inequality, linearizing change-of-variable method.

また，実システムの大多数では微小なエネルギー蓄積要素などのため，動特性の次数は厳密には無限大であり，有限次元の数式表現における次数は近似にすぎない．このことから，一つの物理的システムあるいは物理的現象から次数が異なる複数の有限次元の状態方程式が同定されてしまう．制御系設計においては，この同定されたいずれの次数の状態方程式を用いた場合でも同様の設計結果が得られることが望ましい．しかしながら，従来の状態方程式の場合，次数の増減に対する数式表現の不連続性により，必ずしも同様の設計結果が得られるとは限らず，また，数値的に安定的に解が得られない場合も存在する．本論文では，このような次数の増減，さらにはサンプリング周期をゼロに近づける操作に対し，他の状態方程式と比較して和分型状態方程式を用いると，数値的にも安定的にコントローラの設計ができることも示す．

以下，**2.** では参考文献 [1] で提案した和分型状態方程式を定義する．**3.** では本論文で扱うロバスト制御問題を定式化し，問題を解くための基礎となるロバスト正則性の解析結果を紹介する．**4.** では和分型状態方程式で表現されたシステムに対するロバスト安定条件を与えた上で，ロバスト制御問題の可解条件を導出する．**5.** では和分型状態方程式による解析および設計の条件から既存の差分型状態方程式による各条件を導出することにより，両者の関連性を明確化する．**6.** では感度低減化問題による数値例により和分型状態方程式表現を用いた制御系設計の有効性を示す．**7.** はまとめである．

表記：$\mathbf{R}^{n\times m}$ は $n\times m$ の実数行列の集合，$\mathbf{C}^{n\times m}$ は $n\times m$ の複素行列の集合とする．複素数 a に対し，$\bar{a}$ は共役複素数とする．M^{T} は実数行列 M の転置行列，M^* は複素行列 M の共役複素転置行列，$\sigma_{\max(\min)}(M)$ は行列 M の最大（最小）特異値を表す．正方行列 Y に対して，$\mathsf{He}(Y):=Y+Y^{\mathrm{T}}$ を定義する．ラプラス演算子 s およびサンプリング周期 h に対し，差分演算子 [3–5] $\delta:=(e^{hs}-1)/h$ を定義する．なお，差分演算子 δ は $h\to 0$ とするとラプラス演算子 s に収束する性質をもつ．さらに，和分演算子 [1] $\xi:=1/\delta$ を定義する．サンプリング周期 h の離散時間信号 w に対する l_2 空間を $l_2:=\left\{w \mid h\sum_{k=-\infty}^{\infty}w_k^{\mathrm{T}}w_k<\infty\right\}$ で定義し，l_2 ノルムを $\|w\|_{l2}:=\left(h\sum_{k=-\infty}^{\infty}w_k^{\mathrm{T}}w_k\right)^{1/2}$ で定義する．ある演算子 λ による伝達関数 $G(\lambda)=C(\lambda I-A)^{-1}B+D$ を

$$G(\lambda)=:\left(\begin{array}{c|c}A&B\\\hline C&D\end{array}\right)$$

により表記する．

2.　和分型状態方程式の定義

離散時間システムを記述する和分型状態方程式表現の定義 [1] を以下で紹介する．

【定義 1】　k，h は整数とサンプリング周期とする．初期状態 x_0 と初期入力 u_0 が与えられているとする．このとき，離散時間システムの表現

$$\left\{\begin{aligned}h\sum_{i=0}^{k-1}x_i&=Ax_k+Bu_k-(Ax_0+Bu_0),\\ y_k&=Cx_k+Du_k\end{aligned}\right.\tag{1}$$

を和分型状態方程式表現と定義する．

和分型状態方程式 (1) は，連続時間システムが離散化された離散時間システムおよび，離散化される以前の連続時間システムが存在しない離散事象システムなど，通常の離散時間状態方程式（シフト型状態方程式）で取り扱い可能なシステムを同様に表現可能である．また，連続時間システムが離散化された離散時間システムの場合，和分型状態方程式表現 (1) は $h\to 0$ とすると，積分型状態方程式表現 [6] に収束する特徴をもつ．詳細は**付録 1.** を参照されたい．なお，和分型状態方程式では，初期値 Ax_0+Bu_0 が陽に現れているが，以下では記述の簡単化のために適宜省略されるので注意されたい．

（注意 1）以下では参考文献 [1] と同様に，A の正則性を仮定して解析および設計を行う．この仮定は，和分型状態方程式にディスクリプタシステム表現 [7–9] を導入することで不要となるが，今後の課題である．

また，本論文で用いる和分型状態方程式で表現されたシステムに対する漸近安定性に関する結果 [1] を紹介する．

【命題 1】　和分型状態方程式で表現されたシステム

$$h\sum_{i=0}^{k-1}x_i=Ax_k-Ax_0\tag{2}$$

が与えられているとする．このとき，システム (2) が漸近安定であるための必要十分条件は，システム行列 A のすべての固有値の実部が $-h/2$ 未満であること，すなわち，A の固有値を λ とすると，すべての λ に対して，

$$\lambda+\bar{\lambda}+h<0$$

が成立することである．

つぎに，和分演算子 ξ を用いた安定な伝達関数 $P(\xi)$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを以下で定義する．なお，以下では，和分演算子 ξ を用いた伝達関数を簡単に伝達関数と略記するので，注意されたい．

【定義 2】　和分型状態方程式 (1) に対応する安定な伝達関数 $P(\xi)=C(\xi I-A)^{-1}B+D$ が与えられているとする．このとき，$P(\xi)$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを

$$\|P(\xi)\|_\infty:=\sup_{\mathrm{Re}(\xi)\geq -h/2}\sigma_{\max}(P(\xi))\tag{3}$$

で定義する．

定義した $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの時間領域での解釈として，初期状態に関する条件 $x_0=-A^{-1}Bu_0$ のもとで

$$\|P(\xi)\|_\infty = \sup_{u\in l_2\backslash\{0\}} \frac{\|y\|_{l2}}{\|u\|_{l2}}$$

が成立する．なお，差分型状態方程式 (A3)[3–5] を用いると，初期状態に関する条件は $\tilde{x}_0 = 0$ であるが，状態変数の対応関係 $x_k = (\tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k)/h$ および (A4) 式より，$x_0 = -A^{-1}Bu_0$ となることに注意されたい．

3. ロバスト制御問題

3.1 問題設定

Fig. 1 で表される不確定系 $\mathcal{F}(\Delta, H(\xi))$ のロバスト制御系設計を考える．

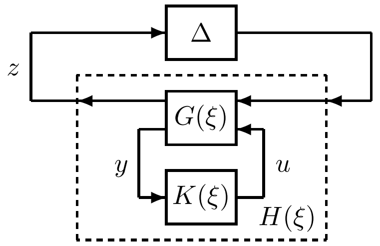

Fig. 1 Uncertain system $\mathcal{F}(\Delta, H(\xi))$

ここで，一般化プラント $G(\xi)$ は和分演算子 ξ を周波数変数とする伝達関数で，

$$\begin{bmatrix} z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(\xi) & G_{12}(\xi) \\ G_{21}(\xi) & G_{22}(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k \\ u_k \end{bmatrix} \tag{4}$$

により与えられ，$u_k \in \mathbf{R}^p$，$y_k \in \mathbf{R}^q$ はそれぞれ制御入力，観測出力である．また Δ は複素行列のサブセット

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta} := \{ \, & \Delta = \mathrm{diag}(\delta_1 I_{l_1}, \cdots, \delta_s I_{l_s}, \Delta_1, \cdots, \Delta_f) : \\ & \delta_i \in \mathbf{C},\ \Delta_i \in \mathbf{C}^{l_{s+i}\times l_{s+i}},\ \sigma_{\max}(\Delta) \le 1/\gamma \, \} \end{aligned} \tag{5}$$

に属する変動行列である．$w_k \in \mathbf{R}^l$，$z_k \in \mathbf{R}^l$ はこの不確定要素 Δ の入出力信号である．ここで $\gamma > 0$ は与えられている実数スカラーである．

この一般化プラントに対して，フルオーダ，すなわち一般化プラントと同一次元の出力フィードバックコントローラ $K(\xi)$ を考える．ここで，w_k から z_k への伝達関数を

$$\begin{aligned} H(\xi) := & \, G_{11}(\xi) \\ & + G_{12}(\xi)K(\xi)(I - G_{22}(\xi)K(\xi))^{-1}G_{21}(\xi) \end{aligned}$$

と定義する．また，$\mathcal{D}$ を $\mathbf{\Delta}$ と可換なスケーリング行列の集合

$$\begin{aligned} \mathcal{D} := \{ \, & \mathrm{diag}(D_1, \cdots, D_s, d_1 I_{l_{s+1}}, \cdots, d_f I_{l_{s+f}}) \\ & : D_i \in \mathbf{C}^{l_i \times l_i},\ d_i \in \mathbf{C},\ D_i > 0,\ d_i > 0 \, \} \end{aligned} \tag{6}$$

と定義する．

このとき，ロバスト安定解析の基礎としてスケーリング行列 $S \in \mathcal{D}$ を付加した $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを用いると，スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題は次のように記述できる．

スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題： (4) 式の一般化プラントおよび (5) 式で定義される $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ が与えられているとする．また，Fig. 1 のフィードバック結合を考える．このとき，不確定系 $\mathcal{F}(\Delta, H(\xi))$ がロバスト安定であるための十分条件

- $H(\xi)$ は $\mathrm{Re}(\xi) > -h/2$ に極をもたず，

$$\|S^{-1/2}H(\xi)S^{1/2}\|_\infty < \gamma,$$

  を満たす $S \in \mathcal{D}$ が存在すること

を満たすフルオーダの動的出力フィードバックコントローラ $K(\xi)$ が存在するための必要十分条件を求めよ．

3.2 ロバスト正則性の解析結果

スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題を解くための基礎となるロバスト正則性の解析結果 [10,11] を紹介する．

Fig. 2 に示される定数行列からなるフィードバック系を考える．

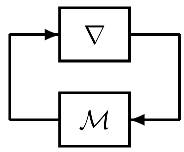

Fig. 2 Uncertain system $\mathcal{F}(\nabla, \mathcal{M})$

ここで，$\mathcal{M}$ は与えられている実数行列，∇ は既知の複素行列のサブセット $\mathbf{\nabla}$ に属するとする．この不確定系がロバスト安定であるための必要十分条件は，

$$\sigma_{\min}\left(\begin{bmatrix} I & -\mathcal{M} \\ -\nabla & I \end{bmatrix} \right) \ge \varepsilon > 0, \quad {}^\forall \nabla \in \mathbf{\nabla} \tag{7}$$

を満たす ε が存在することである．この条件を Fig. 2 のフィードバック系 $\mathcal{F}(\nabla, \mathcal{M})$ のロバスト正則性という．このとき，次のロバスト正則性の命題が知られている [10,11]．

【命題 2】 実数行列 $\mathcal{M} \in \mathbf{R}^{l\times k}$ および複素行列のサブセット $\mathbf{\nabla} \subseteq \mathbf{C}^{k\times l}$ が与えられているとする．このとき，次の条件は等価である．

(i) フィードバック系 $\mathcal{F}(\mathbf{\nabla}, \mathcal{M})$ はロバスト正則である，すなわち条件 (7) を満たす ε が存在する．

(ii) 条件

$$\begin{bmatrix} I & \mathcal{M} \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} I & \mathcal{M} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} < 0, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} \nabla & I \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} \nabla & I \end{bmatrix}^{*} \ge 0, \quad {}^\forall \nabla \in \mathbf{\nabla} \tag{9}$$

を満たす実対称行列 $\Theta \in \mathbf{R}^{(k+l)\times(k+l)}$ が存在する．

なお，**命題 2** では $\mathbf{\nabla}$ は任意の複素行列の集合とされていることから，和分型状態方程式で表現されたシステムの解析にも適用可能となっている．

4. 和分型状態方程式による制御系の解析および設計

4.1 和分型状態方程式による解析

命題 2 を特定化することにより，Fig. 1 で表される不確定系 $\mathcal{F}(\Delta, H(\xi))$ のロバスト安定条件を導出する．

まず，**命題 2** における実数行列 $\mathcal{M}$ は，伝達関数 $H(\xi)$ の状態空間での最小実現を用いて，

$$\begin{bmatrix} \xi \mathrm{x}_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}_k \\ w_k \end{bmatrix} =: \mathcal{M} \begin{bmatrix} \mathrm{x}_k \\ w_k \end{bmatrix} \tag{10}$$

により与えられる．ここで，$\mathrm{x}_k \in \mathbf{R}^n$ は状態変数である．つぎに，

$$\nabla := \begin{bmatrix} I/\xi & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \tag{11}$$

を定義すると，Fig. 1 の不確定系 $\mathcal{F}(\Delta, G(\xi))$ を等価的に Fig. 2 により表すことができる．さらに，複素行列のサブセット $\boldsymbol{\nabla}$ を

$$\boldsymbol{\nabla} := \left\{ \begin{bmatrix} I/\xi & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} : \xi \in \tilde{\boldsymbol{\Xi}},\ \Delta \in \boldsymbol{\Delta} \right\},$$
$$\tilde{\boldsymbol{\Xi}} := \{\ \xi \in \mathbf{C} :\ \xi + \bar{\xi} + h \geq 0\ \}$$

により定義する．ただし，$\tilde{\boldsymbol{\Xi}}$ は伝達関数 $G(\xi)$ の不安定な極の領域（極の実部が $-h/2$ 以上）である．

以上から，不確定系 $\mathcal{F}(\Delta, H(\xi))$ がロバスト安定であるための以下の十分条件が得られる．

【系 1】 (10) 式の伝達関数 $H(\xi) := C(\xi I - A)^{-1} B + D$ および (5) 式で定義される $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}$ のフィードバック結合を考える．このとき，不確定系 $\mathcal{F}(\Delta, H(\xi))$ がロバスト安定であるための十分条件として，以下の条件は等価である．

(i) A は $\mathrm{Re}(\xi) > -h/2$ に固有値をもたず，

$$\sigma_{\max}\left(S^{-1/2} H(\xi) S^{1/2}\right) < \gamma,\ {}^{\forall}\xi\ \ \text{s.t. } \mathrm{Re}(\xi) = -\frac{h}{2}$$

を満たす $S \in \mathcal{D}$ が存在することである．

(ii) 条件

$$\begin{bmatrix} I \\ \mathcal{M}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left[\begin{array}{cc:cc} hX & 0 & X & 0 \\ 0 & -\gamma^2 W & 0 & 0 \\ \hdashline X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W \end{array}\right] \begin{bmatrix} I \\ \mathcal{M}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0 \tag{12}$$

を満たす実対称行列 $X > 0$ および $W \in \mathcal{D}$ が存在することである．

(iii) 条件

$$\begin{bmatrix} I \\ \mathcal{M} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left[\begin{array}{cc:cc} hP & 0 & P & 0 \\ 0 & -\gamma^2 V & 0 & 0 \\ \hdashline P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V \end{array}\right] \begin{bmatrix} I \\ \mathcal{M} \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

を満たす実対称行列 $P > 0$ および $V \in \mathcal{D}$ が存在することである．

（証明） $\mathcal{F}(\boldsymbol{\Delta}, H(\xi))$ がロバスト安定である十分条件は，スモールゲイン定理より $\|S^{-1/2} H(\xi) S^{1/2}\|_\infty < \gamma$ である．以下では，**命題 2** を用いてこの条件を導出する．$H(\xi)$ の状態空間行列 $\mathcal{M}$ と変動要素 ∇ をそれぞれ (10) 式および (11) 式で定義すると，ロバスト安定条件は (7) 式の不等式が

$$\xi + \bar{\xi} + h \geq 0,\quad \sigma_{\max}(\Delta) \leq \frac{1}{\gamma} \tag{14}$$

を満たすすべての $\xi \neq 0$ と Δ に対して成立することである．ここで，**命題 2** において Θ を

$$\Theta = \begin{bmatrix} hX & 0 & X & 0 \\ 0 & -\gamma^2 W & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \tag{15}$$

と選ぶと（ただし，$X = X^{\mathrm{T}} > 0$），不等式 (9) は

$$\begin{bmatrix} (\xi + \bar{\xi} + h) X / (\xi \bar{\xi}) & 0 \\ 0 & I - \gamma^2 \Delta \Delta^* \end{bmatrix} \geq 0$$

となるので (14) 式より自動的に成立することがわかる．一方，不等式 (8) に (10) 式の $\mathcal{M}$ および (15) 式の Θ を代入した (12) 式は，Schur complement を介して**付録 2.** の**補題 1** で現れる線形行列不等式（LMI）条件 (A6) となる．したがって，ロバスト安定の十分条件 $\|S^{-1/2} H(\xi) S^{1/2}\|_\infty < \gamma$ が得られ，**付録 2.** の**補題 1** から (i) と (ii) との等価性がいえる．また，双対システム $H^{\mathrm{T}}(\xi) = B^{\mathrm{T}}(\xi I - A^{\mathrm{T}}) C^{\mathrm{T}} + D^{\mathrm{T}}$ を考えると，$\sigma_{\max}(H(\xi)) = \sigma_{\max}(H^{\mathrm{T}}(\xi))$ より，(ii) と (iii) との等価性がいえる． □

4.2 和分型状態方程式による設計

本節では，**系 1** に基づくスケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題を考える．まず，準備を行い，つぎに，問題の可解条件を与える．

4.2.1 準備

(4) 式の一般化プラント $G(\xi)$ の状態空間での最小実現は，

$$\begin{bmatrix} \xi x_k \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix},$$
$$w = \Delta z,\qquad \Delta \in \boldsymbol{\Delta} \tag{16}$$

により与えられているものとする．

（注意 2） 和分型状態方程式の場合，一般に u_k から y_k への直達項 D_{22} が存在する．そこで，参考文献 [12] と同様に $\hat{y}_k := y_k - D_{22} u_k$ とおき，$\hat{y}_k$ を新たな観測出力 y_k とみなし，D_{22} を制御対象の状態空間実現から消去することで，一般性を失うことなく $D_{22} = 0$ を仮定す

ることができる．

この制御対象に対して，Fig. 1 の状態変数 $x_k^c \in \mathbf{R}^{n_p}$ を持つフルオーダ，すなわち一般化プラントと同一次元の出力フィードバックコントローラ $K(\xi)$ の状態空間での最小実現

$$\begin{bmatrix} \xi x_k^c \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^c \\ y_k \end{bmatrix} := \mathcal{K} \begin{bmatrix} x_k^c \\ y_k \end{bmatrix} \tag{17}$$

を考え，閉ループ系の状態変数を $\mathsf{x}_k := [\, x_k^{\mathrm{T}} \; x_k^{c\mathrm{T}} \,]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ $(n := 2n_p)$ とする．

ここで，行列 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} := \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{bmatrix} := \left[\begin{array}{ccc:cc} A & 0 & B_1 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ C_1 & 0 & D_{11} & 0 & D_{12} \\ \hdashline 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & D_{21} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

と定義する．また，行列 $\mathcal{L}$ のサイズは適切に選び，

$$\mathcal{M} = \mathcal{L}_{11} + \mathcal{L}_{12}\mathcal{K}\mathcal{L}_{21}$$

を満たすものとする．

4.2.2 可解条件

系 1 を用いると，スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題の可解条件として以下の定理が得られる．

【定理 1】 和分型状態方程式で表現された (16) 式の一般化プラントおよび (5) 式で定義される $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}$ のフィードバック結合を考える．このとき，スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題が可解であるための必要十分条件は，

$$\mathsf{He}\left(\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & 0 \\ 0 & -\gamma V/2 & 0 \\ \Psi_{31} & D_{11} + D_{12}LD_{21} & -\gamma W/2 \end{bmatrix} \right) < 0, \tag{18}$$

$$\Psi_{11} := \begin{bmatrix} XA + FC_2 & M \\ A + B_2LC_2 & AY + B_2K \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{12} := \begin{bmatrix} XB_1 + FD_{21} \\ B_1 + B_2LD_{21} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{31} := \begin{bmatrix} C_1 + D_{21}LC_2 & C_1Y + D_{12}K \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad V = W^{-1} \tag{19}$$

を満たす実対称行列 X，Y，実数行列 F，M，K，L および，V，$W \in \mathcal{D}$ が存在することである．また，この条件が成立するとき，ロバスト安定性を達成するコントローラ (17) が存在する．

（証明） **系 1** の (13) 式に Schur complement を用い，線形変数変換 [13,14] を適用することにより (18) 式を得る．また同様に，$P > 0$ に線形変数変換を適用することにより (19) 式の第 1 式を得る． □

和分型状態方程式で表現されたシステムについてのスケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題の可解条件は，$h \to 0$ とすると和分型状態方程式の収束先である積分型状態方程式で表現されたシステムについてのスケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題の可解条件に収束する．このことから，上述の制御問題の可解条件は，$h \to 0$ の特別な場合として連続時間系の制御問題の可解条件を包含するより一般化された制御問題の可解条件であることが理解できる．

5. 差分型状態方程式による制御系の解析および設計との対応関係

本節では，既存の差分型状態方程式で表現されたシステムに対するロバスト安定条件および，スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題の可解条件を導出する．なお，**命題 2** を特定化することにより，これらの条件も導出可能であるが，本論文では，**4.** において導出した和分型状態方程式によるロバスト安定条件および，スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題の可解条件から，合同変換により各条件を導出することで，解析および設計の条件における和分型および差分型の状態方程式の代数的な対応関係を明確化する．

5.1 差分型状態方程式による解析

Fig. 1 で表される不確定系 $\mathcal{F}(\Delta, H(\xi))$ のロバスト安定性を差分型状態方程式を用いて考える．ここでは，周波数変数を ξ ではなく差分演算子 $\delta\ (=1/\xi)$ とし，$H(\delta)$ と表記する．差分伝達関数 $H(\delta)$ の状態空間での最小実現は，

$$\begin{bmatrix} \delta \tilde{\mathsf{x}}_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathsf{x}}_k \\ w_k \end{bmatrix} =: \tilde{\mathcal{M}} \begin{bmatrix} \tilde{\mathsf{x}}_k \\ w_k \end{bmatrix} \tag{20}$$

により与えられる．このとき，不確定系 $\mathcal{F}(\Delta, H(\delta))$ がロバスト安定であるための以下の十分条件が得られる．

【系 2】 (20) 式の差分伝達関数 $H(\delta) := \tilde{C}(\delta I - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}$ および (5) 式で定義される $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}$ のフィードバック結合を考える．このとき，不確定系 $\mathcal{F}(\Delta, H(\delta))$ がロバスト安定であるための十分条件として，以下の条件は等価である．

(i) $\tilde{A}$ は $|(\delta+1)/h| \geq 1/h$ に固有値をもたず，

$$\sigma_{\max}\left(\tilde{S}^{-1/2} H(\delta) \tilde{S}^{1/2}\right) < \gamma, \ {}^{\forall}\delta \ \text{ s.t. } \left|\frac{\delta+1}{h}\right| = \frac{1}{h}$$

を満たす $\tilde{S} \in \mathcal{D}$ が存在することである．

(ii) 条件

$$\begin{bmatrix} I \\ \tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & \tilde{X} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 \tilde{W} & 0 & 0 \\ \hdashline \tilde{X} & 0 & h\tilde{X} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{W} \end{array}\right] \begin{bmatrix} I \\ \tilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0 \tag{21}$$

を満たす実対称行列 $\tilde{X} > 0$ および $\tilde{W} \in \mathcal{D}$ が存在す

ることである．

(iii) 条件

$$\begin{bmatrix} I \\ \tilde{\mathcal{M}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & \tilde{P} & 0 \\ 0 & -\gamma^2\tilde{V} & 0 & 0 \\ \hdashline \tilde{P} & 0 & h\tilde{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{V} \end{array}\right] \begin{bmatrix} I \\ \tilde{\mathcal{M}} \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

を満たす実対称行列 $\tilde{P} > 0$ および $\tilde{V} \in \mathcal{D}$ が存在することである．

（証明）**系 1** を用いて証明する．差分型状態方程式で表現されたシステムが漸近安定であるための必要十分条件，すなわち，$\tilde{A}$ のすべての固有値に対して，$|(\delta+1)/h| < 1/h$ が成立すること [4,5] より，(i) と**系 1** の (i) との等価性がいえる．**系 1** の (13) 式は

$$\mathsf{He}(\Theta) < 0 \quad (23)$$
$$\Theta := \begin{bmatrix} PA+(hP+C^{\mathrm{T}}VC)/2 & PB+C^{\mathrm{T}}VD \\ 0 & (-\gamma^2V+D^{\mathrm{T}}VD)/2 \end{bmatrix}$$

と等価である．正則行列

$$U_a := \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (24)$$

を用いて LMI 条件 (23) の合同変換 $\mathsf{He}(U_a^{\mathrm{T}}\Theta U_a) < 0$ を行い，(A4) 式を用いると LMI 条件 (22) を得る．また，双対システム $H^{\mathrm{T}}(\delta) = \tilde{B}^{\mathrm{T}}(\delta I - \tilde{A}^{\mathrm{T}})\tilde{C}^{\mathrm{T}} + \tilde{D}^{\mathrm{T}}$ を考えると，(ii) と (iii) との等価性がいえる．□

系 2 の証明より，和分型および差分型の状態方程式によるロバスト安定条件は，(24) 式の正則行列 U_a により対応付けられることが理解できる．また，LMI 条件と $\mathcal{H}_\infty$ ノルムとの関係を明らかにする場合，和分型状態方程式を用いる場合であれば，$v_k := \begin{bmatrix} \mathsf{x}_k^{\mathrm{T}} & w_k^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ を用いた二次形式 $v_k^{\mathrm{T}}\mathsf{He}(\Theta)v_k < 0$ を考えればよい．ここで，和分型状態方程式の状態変数 x_k と差分型状態方程式の状態変数 $\tilde{\mathsf{x}}_k$ の対応関係 $\mathsf{x}_k = (\tilde{\mathsf{x}}_{k+1} - \tilde{\mathsf{x}}_k)/h$，すなわち，$\mathsf{x}_k = \delta\tilde{\mathsf{x}}_k$ および (A4) 式より，

$$v_k := \begin{bmatrix} \mathsf{x}_k \\ w_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathsf{x}}_k \\ w_k \end{bmatrix} =: U_a\tilde{v}_k$$

が成立する．したがって，正則行列 U_a による合同変換の物理的意味は，和分型状態方程式の v_k から差分型状態方程式の $\tilde{v}_k$ への等価的な変換であると考えられる．

以上のように，和分型および差分型の状態方程式による両条件は理論的には等価である．等価でありながら，後の数値例で示すように，表現の違いにより数値的に安定的に解析を行う能力に差が生じることに注意されたい．また，解析条件では，和分型および差分型の状態方程式によるいずれの条件も 2×2 ブロックとなり，行列不等式のサイズは等しくなる．しかしながら，設計条件では，差分型状態方程式による条件は和分型状態方程式による条件より行列不等式のサイズが大きくなってしまう．以下ではこのことを明らかにする．

5.2　差分型状態方程式による制御系設計

(4) 式の一般化プラント $G(\delta)$ の状態空間での最小実現は，

$$\begin{bmatrix} \delta\tilde{x}_k \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 \\ \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{C}_2 & \tilde{D}_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix},$$
$$w = \Delta z, \quad \Delta \in \mathbf{\Delta} \quad (25)$$

により与えられているものとする．この制御対象に対して，Fig. 1 のフルオーダの出力フィードバックコントローラ $K(\delta)$ の状態空間での最小実現

$$\begin{bmatrix} \delta\tilde{x}_k^c \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_c & \tilde{B}_c \\ \tilde{C}_c & \tilde{D}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k^c \\ y_k \end{bmatrix} := \tilde{\mathcal{K}} \begin{bmatrix} \tilde{x}_k^c \\ y_k \end{bmatrix} \quad (26)$$

を考える．このとき，スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題の可解条件として以下の定理が得られる．

【定理 2】　差分型状態方程式で表現された (25) 式の一般化プラントおよび (5) 式で定義される $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ のフィードバック結合を考える．このとき，スケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題が可解であるための必要十分条件は，

$$\mathsf{He}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{11} & \tilde{\Psi}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma\tilde{V}/2 & 0 & 0 \\ \tilde{\Psi}_{31} & \tilde{\Psi}_{32} & -\gamma\tilde{W}/2 & 0 \\ -h^{1/2}\tilde{\Psi}_{11} & -h^{1/2}\tilde{\Psi}_{12} & 0 & -\tilde{\Psi}_{44}/2 \end{bmatrix}\right) < 0 \quad (27)$$

$$\tilde{\Psi}_{11} := \begin{bmatrix} \tilde{X}\tilde{A}+\tilde{F}\tilde{C}_2 & \tilde{M} \\ \tilde{A}+\tilde{B}_2\tilde{L}\tilde{C}_2 & \tilde{A}\tilde{Y}+\tilde{B}_2\tilde{K} \end{bmatrix}$$
$$\tilde{\Psi}_{12} := \begin{bmatrix} \tilde{X}\tilde{B}_1+\tilde{F}\tilde{D}_{21} \\ \tilde{B}_1+\tilde{B}_2\tilde{L}\tilde{D}_{21} \end{bmatrix}$$
$$\tilde{\Psi}_{31} := \begin{bmatrix} \tilde{C}_1+\tilde{D}_{21}\tilde{L}\tilde{C}_2 & \tilde{C}_1\tilde{Y}+\tilde{D}_{12}\tilde{K} \end{bmatrix}$$
$$\tilde{\Psi}_{32} := \tilde{D}_{11}+\tilde{D}_{12}\tilde{L}\tilde{D}_{21}$$
$$\tilde{\Psi}_{44} := \begin{bmatrix} \tilde{X} & I \\ I & \tilde{Y} \end{bmatrix} > 0, \quad \tilde{V} = \tilde{W}^{-1} \quad (28)$$

を満たす実対称行列 $\tilde{X}$，$\tilde{Y}$，実数行列 $\tilde{F}$，$\tilde{M}$，$\tilde{K}$，$\tilde{L}$ および，$\tilde{V}, \tilde{W} \in \mathcal{D}$ が存在することである．また，この条件が成立するとき，ロバスト安定性を達成するコントローラ (26) が存在する．

（証明）正則行列

$$U_d := U_aU_l = \begin{bmatrix} A^{-1}\tilde{\Gamma}^{\mathrm{T}} & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$U_l := \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Gamma} := \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{Y} & -\tilde{Y} \end{bmatrix} \quad (30)$$

を用いて LMI 条件 (23) の合同変換 $\mathsf{He}(U_d^{\mathrm{T}}\Theta U_d) < 0$ を行い，(A4) 式を用いる．さらに，Schur complement を

用い，線形変数変換を適用することによりLMI 条件 (27) を得る．また同様に，$P>0$ に線形変数変換を適用することにより (28) 式の第 1 式を得る．　□

定理 2 の証明より，和分型および差分型の状態方程式によるスケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題の可解条件は (24) 式の正則行列 U_a および，線形変数変換で用いる正則行列 U_l の積 U_d により対応付けられることが理解できる．

また，差分型状態方程式で表現されたシステムについてのスケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題の可解条件は，和分型状態方程式の場合と同様に，$h\to 0$ の特別な場合として連続時間系，すなわち，通常の（微分型）状態方程式で表現されたシステムに対するスケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題の可解条件を包含するより一般化された制御問題の解であることが理解できる．しかしながら，差分型状態方程式で表現されたシステムについてのロバスト安定解析条件 (22) において，システム行列 $\tilde{A}$ の二次項 $h\tilde{A}^{\mathrm{T}}P\tilde{A}$ が存在することに起因し，LMI 条件 (27) の導出では，この二次項に対して Schur complement を用いていることから，差分型状態方程式による可解条件 (27) は，4×4 ブロックとなり，3×3 ブロックとなっている和分型状態方程式による可解条件 (18) より煩雑な記述となっていることに注意されたい．

6.　数値例

定理 1，**定理 2** を用いて，和分型および差分型の状態方程式による設計条件の数値的安定性を検証する．数値例では，簡単のためスケールド $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計問題の特別な場合である感度低減化問題を考える．感度低減化問題は次の問題である．

> **感度最適化問題：**伝達関数により与えられている制御対象 $P(\xi)$ および重み関数 $W_s(\xi)$ に対して，閉ループ系が漸近安定になり，かつ 感度関数 $S(\xi)$ に対して，$\|W_s(\xi)S(\xi)\|_\infty<\gamma$ となる最小の γ およびコントローラ $K(\xi)$ を求めよ．

感度低減化問題は**定理 1**，**定理 2** において，$\mathcal{D}$ が非構造的な場合に相当するため（$V=W^{-1}=I$，$\tilde{V}=\tilde{W}^{-1}=I$），**定理 1**，**定理 2** の可解条件は凸条件のみとなることから，以下の数値的安定性の検証は局所解ではなく，大域解のもとで行っていることに注意されたい．

制御対象は参考文献 [1,2] と同様の簡単な電気回路とする．

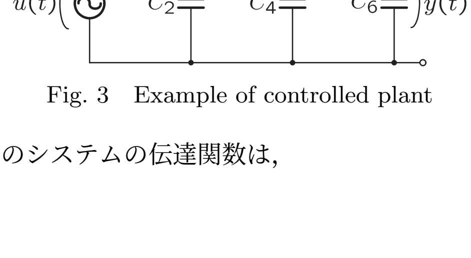

Fig. 3　Example of controlled plant

Fig. 3 のシステムの伝達関数は，

$$P(s)=\frac{1}{1+a_1s+a_2s^2+a_3s^3+a_4s^4} \tag{31}$$
$$a_1=C_2R_1+C_4R_1+C_6R_1+C_6R_5$$
$$a_2=C_2C_6R_1R_5+C_4C_6R_1R_5+C_4L_3+C_6L_3$$
$$a_3=C_2C_4L_3R_1+C_2C_6L_3R_1+C_4C_6L_3R_5$$
$$a_4=C_2C_4C_6L_3R_1R_5$$

として得られる．この制御対象の和分型状態方程式は，(31) 式の伝達関数から可制御正準形の積分型状態方程式

$$\begin{bmatrix}\mathcal{A}_p & \mathcal{B}_p\\ \mathcal{C}_p & \mathcal{D}_p\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc:c}-a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & 1\end{array}\right]$$

を求め，サンプリング周期 h および 0 次ホールドを用いるステップ不変変換 [4,5] を用いた (A2) 式の対応関係を適用し，近似的に離散化すればよい．また，重み関数は $W_s(s)=0.8/(s+0.05)+0.5$ として与えられているとし，和分型状態方程式は可制御正準形の積分型状態方程式 $\mathcal{A}_s=-20$，$\mathcal{B}_s=20$，$\mathcal{C}_s=-16$，$\mathcal{D}_s=16.5$ を同様に近似的に離散化すればよい．上記の手順により得られた制御対象および重み関数の和分型状態方程式を用いて，感度低減化問題における一般化プラントを構築すればよい（Fig. 4 参照）．

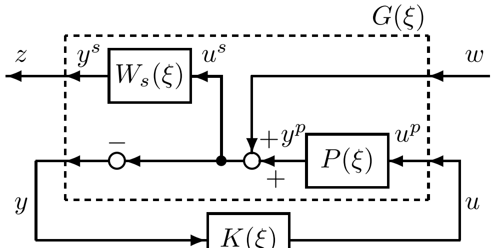

Fig. 4　Sensitivity minimization problem

なお，差分型状態方程式による一般化プラントについては，同様に，微分型状態方程式の可制御正準形から導出することが可能であり，紙面の都合により省略する．

各パラメータは，$R_1=1.0[\mathrm{M}\Omega]$，$R_5=0.5[\mathrm{M}\Omega]$，$L_3=1.0[\mathrm{MH}]$，$C_4=1.5[\mu\mathrm{F}]$，$C_6=1.0[\mu\mathrm{F}]$ とし，$C_2=10^{-5}$，$0[\mu\mathrm{F}]$ の 2 通りの場合を検証する．$C_2=10^{-5}$ の場合は制御対象の次数は 4 次となるが，$C_2=0$ の場合は制御対象の次数は 3 次となるので，低次元化された可制御正準形の積分型状態方程式

$$\begin{bmatrix}\mathcal{A}_p & \mathcal{B}_p\\ \mathcal{C}_p & \mathcal{D}_p\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:c}-a_1 & -a_2 & -a_3 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline -a_1 & -a_2 & -a_3 & 1\end{array}\right]$$

を同様に近似的に離散化した和分型状態方程式を用いる．なお，数式表現上の次数は異なるが，$C_2=10^{-5}$ は微小な値のため，両者の時間応答特性はほぼ一致する．

ここで，以下に問題を明確化する．

問題 1：サンプリング周期を $h=0.01$ に固定し，$C_2=10^{-5}$, $0[\mu\mathrm{F}]$ において，Fig. 3 の連続時間制御対象を離散化した和分型および差分型の状態方程式による感度最適化問題を解き，コントローラを求めよ．すなわち，**定理 1**，**定理 2** の可解条件を満たす各行列および最小の γ を求めよ．

各 C_2 に対する最小の γ の計算結果を Table 1，感度関数 $S(\xi)$ のゲイン曲線を Fig. 5 に示す．

Table 1　γ for each C_2 ($h=0.01$)

	γ (difference)	γ (summational)
$C_2=10^{-5}$	0.9814	0.5569
$C_2=0$	0.5083	0.5097

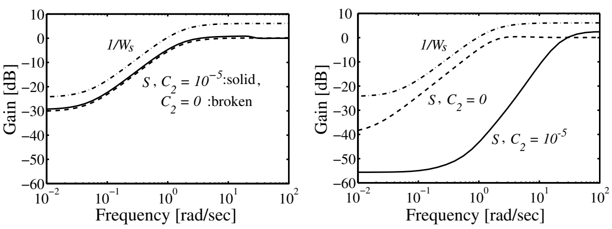

Fig. 5　Gain characteristics of sensitivity and weighting functions by summational type (left), and difference type (right)

数値計算には，MATLAB6.1 LMI Control Toolbox のコマンド mincx[15] を用いた．なお，mincx の目標相対精度は 10^{-10} とした．計算機環境としては，CPU：Intel Pentium4 3.4GHz，Memory：1GB を用いた．

$C_2=10^{-5}$ と $C_2=0$ の場合，時間応答特性など物理現象上はシステムの区別が不可能なため，γ の値およびゲイン曲線は一致することが期待される．実際，Table 1 および Fig. 5 左図のように，和分型状態方程式に基づく感度低減化の場合，2 つの γ の値およびゲイン曲線はほぼ一致している．一方，差分型状態方程式に基づく感度低減化の場合では，2 つの γ の値およびゲイン曲線は異なっていることが理解できる．$C_2=10^{-5}$ の場合，差分型状態方程式の係数行列の一部が非常に大きくなり，計算アルゴリズムが数値的に不安定になったことが原因と考えられる．以上から，次数の増減に関する数式表現の不連続性が，数値計算結果の連続性にも影響を与えることを確認し，とくに，数値計算結果という観点からの和分型状態方程式の有効性を示した．

つぎに，サンプリング周期 h をゼロに近づけることで，差分型および和分型の状態方程式に基づく設計結果が，対応する微分型および積分型の状態方程式に基づく解析結果に収束するかの整合性を確認する．

問題 2：$C_2=10[\mu\mathrm{F}]$ に固定し，サンプリング周期 $h=1.2$, 0.8, 0.4, 0 において，Fig. 3 の連続時間制御対象を離散化した和分型および差分型の状態方程式による感度最適化問題を解き，コントローラを求めよ．すなわち，**定理 1**，**定理 2** の可解条件を満たす各行列および最小の γ を求めよ．

各 h に対する最小の γ の計算結果を Table 2 に示す．

Table 2　γ for each h ($C_2=10$)

	γ (difference)	γ (summational)
$h=1.2$	1.0205	1.0205
$h=0.8$	0.8228	0.8226
$h=0.4$	0.6545	0.6468
continuous-time	0.6207	0.5611

Table 2 より，サンプリング周期 h を小さくしていくと，和分型および差分型の状態方程式から求めた γ の各値は，積分型および微分型の状態方程式から求めた対応する値に収束することが確認できる．なお，和分型（積分型）状態方程式から求めた γ の値と差分型（微分型）状態方程式から求めた γ の値は，理論上本来一致するはずである．しかしながら，いくつかの例を試行した結果，数値的には必ずしも一致しないことを付記しておく．

（注意 3）数値例の制御対象では，和分型および差分型の状態方程式を用いた場合，数値的結果に差が生じたが，制御対象の特性によっては差が生じない可能性はある．また，数値計算には，MATLAB6.1 LMI Control Toolbox で実装されている標準的な数値計算アルゴリズムを採用しているが，他の数値計算アルゴリズムを用いた場合，同様に数値的結果に差が生じない可能性はある．制御対象および数値計算アルゴリズムは多岐にわたることから，数値計算結果に対するアルゴリズム内の理論的考察は，現段階では困難である．しかしながら，和分型状態方程式表現は，実システムの伝達関数の最高次の係数を非常に小さいとみなす場合とゼロとみなす場合に，係数行列の各数値のオーダーが大きく違わないことから，数値計算結果の違いが一般的に小さい特徴をもつ．したがって，この和分型状態方程式表現は，実システムの次数および高周波数成分の特定化が困難な物理的実情に即した状態方程式表現であると考えられる．

7.　おわりに

著者らが参考文献 [1] において提案した和分型状態方程式を用いたロバスト制御問題の可解条件を導出し，既存の差分型状態方程式の可解条件との対応関係について明確化した．さらに，感度低減化問題による数値例により，次数の増減操作に対し数値的に不安定となる既存の差分型状態方程式に基づく設計の問題点を，和分型状態方程式に基づき解消できることを示した．和分型状態方程式表現はシステム解析のみならず，制御系設計におい

ても既存の状態方程式表現の問題点を解消したことにより，制御理論における主要なシステム表現の一つになるものと考えられる．

最後に，本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金（若手研究 (B)No. 16760342）による支援を受けて行われています．ここに感謝の意を表します．

参考文献

[1] 小林，木山，北森：物理的・工学的実情との整合性を考慮した和分型状態方程式表現－基礎的性質および安定性の解析；システム制御情報学会論文誌，Vol. 19, No. 4, pp. 132–141 (2006)

[2] 北森：I-PD 制御方式の原理と設計法；システム/制御/情報，Vol. 42, No. 1, pp. 7–17 (1998)

[3] 北森：連続時間制御と離散時間制御の融合；計測と制御，Vol. 22, No. 7, pp. 599–605 (1983)

[4] R. H. Middleton and G. C. Goodwin: *Digital Control and Estimation: A Unified Approach*, Prentice Hall (1990)

[5] 金井，堀：ディジタル制御システム入門 －デルタオペレータの適用－，槇書店 (1992)

[6] T. Kitamori: Integral Type State Equation Expression Conformable to Physical Systems; *Preprints of China-Japan Joint Symposium on Systems Control Theory and Its Application*, pp. 99–102 (1989)

[7] D. G. Luenberger: Dynamic Equations in Descriptor Form; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 22, No. 3, pp. 312–321 (1977)

[8] 池田：Descriptor 形式に基づくシステム理論；計測と制御，Vol. 24, No. 7, pp. 597–604 (1985)

[9] 片山：線形システムの最適制御－デスクリプタシステム入門－，近代科学社 (1999)

[10] 岩崎：LMI と制御，昭晃堂 (1997)

[11] T. Iwasaki and S. Hara: Well-Posedness of Feedback Systems: Insights into Exact Robustness Analysis and Approximate Computations; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 43, No. 5, pp. 619-630 (1998)

[12] T. Iwasaki and R. E. Skelton: All controllers for the general $\mathcal{H}_\infty$ control problem: LMI existence conditions and state space formulas; *Automatica*, Vol. 30, No. 8, pp. 1307–1317 (1994)

[13] C. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali: Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 42, No. 7, pp. 896–911 (1997)

[14] I. Masubuchi, A. Ohara and N. Suda: LMI-based controller synthesis: a unified formulation and solution; *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, Vol. 8, No. 8, pp. 669–686 (1998)

[15] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali: *LMI control toolbox, For Use with MATLAB*, The MathWorks Inc. (1995)

[16] 美多：H_∞ 制御，昭晃堂 (1994)

付　録

付録 1．和分型状態方程式と既存の状態方程式の対応関係

和分型状態方程式と既存の状態方程式の対応関係 [1] について説明する．ここでは，既存の状態方程式として積分型および差分型の状態方程式を扱う．

まず，和分型状態方程式と積分型状態方程式の対応関係について説明する．積分型状態方程式表現は，

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t x(\tau)d\tau = \mathcal{A}x(t)+\mathcal{B}u(t)-(\mathcal{A}x(0)+\mathcal{B}u(0)), \\ \qquad y(t)=\mathcal{C}x(t)+\mathcal{D}u(t) \end{cases} \tag{A1}$$

と定義される [6]．このとき，積分型状態方程式 (A1) をサンプリング周期 h として，0 次ホールドにより，すなわち，ステップ不変変換により近似的に離散化することにより，和分型状態方程式 (1) が得られる．ここで，積分型状態方程式から和分型状態方程式への対応関係は

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(e^{\mathcal{A}^{-1}h}-I)^{-1} & \mathcal{B} \\ h\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}(e^{\mathcal{A}^{-1}h}-I)^{-1} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \tag{A2}$$

となることから，

$$A = h\left(e^{\mathcal{A}^{-1}h}-I\right)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\mathcal{A}^{-i}h^{i-1}\right)^{-1}$$

より，和分型状態方程式は $h\to 0$ とすると積分型状態方程式に収束することが理解できる．

つぎに，和分型状態方程式と差分型状態方程式の対応関係 [1] について説明する．和分型状態方程式 (1)，および差分型状態方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{x}_{k+1}-\tilde{x}_k}{h} = \tilde{A}\tilde{x}_k+\tilde{B}u_k, \\ \qquad y_k = \tilde{C}\tilde{x}_k+\tilde{D}u_k \end{cases} \tag{A3}$$

が与えられているとする．このとき，和分型状態方程式から差分型状態方程式への対応関係は，状態変数を $x_k=(\tilde{x}_{k+1}-\tilde{x}_k)/h$ と対応づけることにより，

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix} I & -B \end{bmatrix} \tag{A4}$$

として得られる．

付録 2．和分型状態方程式による有界実補題

和分型状態方程式で表現されたシステムに対するスケーリング行列を用いた有界実補題を導出する．

【補題 1】 実数スカラー $\gamma>0$，離散時間実有理伝達関数 $G(\xi)=C(\xi I-A)^{-1}B+D$ および，(6) 式のスケーリング行列の集合 $\mathcal{D}$ が与えられているとする．このとき，次の条件は等価である．

(i) A は $\mathrm{Re}(\xi)=-h/2$ に固有値をもたず，

$$\sigma_{\max}\left(S^{-1/2}G(\xi)S^{1/2}\right)<\gamma,\ {}^{\forall}\xi \text{ s.t. } \mathrm{Re}(\xi)=-\frac{h}{2}$$

を満たす $S\in\mathcal{D}$ が存在することである．

(ii) 条件

$$\mathrm{He}\begin{bmatrix} PA+hP/2 & PB & 0\\ 0 & -\gamma V/2 & 0 \\ VC & VD & -\gamma V/2\end{bmatrix}<0 \qquad \text{(A5)}$$

を満たす実対称行列 P および $V=S^{-1}\in\mathcal{D}$ が存在することである．

(iii) 条件

$$\mathrm{He}\begin{bmatrix} XA^{\mathrm{T}}+hX/2 & XC^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & -\gamma W/2 & 0 \\ WB^{\mathrm{T}} & WD^{\mathrm{T}} & -\gamma W/2\end{bmatrix}<0 \qquad \text{(A6)}$$

を満たす実対称行列 X および $W=S\in\mathcal{D}$ が存在することである．

もし A が安定であれば，上の P および X は正定となる．

（証明） まず，$\hat{G}(\xi):=S^{-1/2}G(\xi)S^{1/2}$ とし，さらに，

$$\Gamma(-h/2+\xi):=\gamma^2 I-\hat{G}^{\mathrm{T}}(-h/2+\bar{\xi})\hat{G}(-h/2+\xi)$$

を定義すると，条件 (i) は $\Gamma(-h/2+\xi)>0$ および $\Gamma^{-1}(-h/2+\xi)>0$ と等価である．ここで，

$$\hat{G}(-h/2+\xi)=\left(\begin{array}{c|c} A+hI/2 & BS^{1/2} \\ \hline S^{-1/2}C & S^{-1/2}DS^{1/2}\end{array}\right)$$

となることに注意し，$\hat{A}:=A+hI/2$，$\hat{B}:=BS^{1/2}$，$\hat{C}:=S^{-1/2}C$，$\hat{D}:=S^{-1/2}DS^{1/2}$ とすると，$\Gamma(-h/2+\xi)$ は

$$\Gamma(-h/2+\xi)=\left(\begin{array}{cc|c} \hat{A} & 0 & \hat{B} \\ -\hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{C} & -\hat{A}^{\mathrm{T}} & -\hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{D} \\ \hline -\hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{C} & -\hat{B}^{\mathrm{T}} & \hat{R}\end{array}\right)$$

となる．ここで，$\hat{R}:=\gamma^2 I-\hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{D}$ である．さらに，$\Gamma^{-1}(-h/2+\xi)$ は

$$\Gamma^{-1}(-h/2+\xi)=\left(\begin{array}{c|c} \hat{\mathsf{A}} & \hat{\mathsf{B}} \\ \hline \hat{\mathsf{C}} & \hat{\mathsf{D}}\end{array}\right)$$

として得られる．ここで，

$$\begin{aligned}
\hat{\mathsf{A}}&=\begin{bmatrix} \hat{A}+\hat{B}\hat{R}^{-1}\hat{C} & \hat{B}\hat{R}^{-1}\hat{B}^{\mathrm{T}} \\ -\hat{C}^{\mathrm{T}}(I+\hat{D}\hat{R}^{-1}\hat{D}^{\mathrm{T}})\hat{C} & -(\hat{A}+\hat{B}\hat{R}^{-1}\hat{C})^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\\
\hat{\mathsf{B}}&=\begin{bmatrix} \hat{R}^{-1}\hat{B}^{\mathrm{T}} & -\hat{R}^{-1}\hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{C}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\
\hat{\mathsf{C}}&=\begin{bmatrix} -\hat{R}^{-1}\hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{C} & -\hat{R}^{-1}\hat{B}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\\
\hat{\mathsf{D}}&=\hat{R}^{-1}
\end{aligned}$$

である．$\hat{\mathsf{A}}$ がハミルトン行列となっていることに注意すると，Riccati 代数不等式

$$P\hat{A}+\hat{A}^{\mathrm{T}}P+(\hat{B}^{\mathrm{T}}P+\hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{C})^{\mathrm{T}}\hat{R}^{-1}(\hat{B}^{\mathrm{T}}P+\hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{C})+\hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{C}<0$$

を得る．詳細は参考文献 [16] を参照されたい．さらに，$\hat{R}^{-1}$ および I/γ に対して Schur complement を用い，$\hat{A}$，$\hat{B}$，$\hat{C}$，$\hat{D}$ を A，B，C，D，S，h で記述し直すことにより，LMI 条件

$$\begin{aligned}
&\mathrm{He}(\Theta)<0 \qquad \text{(A7)}\\
&\Theta:=\begin{bmatrix} P(A+hI/2) & PBS^{1/2} & 0 \\ 0 & -\gamma I/2 & 0 \\ S^{-1/2}C & S^{-1/2}DS^{1/2} & -\gamma I/2\end{bmatrix}<0
\end{aligned}$$

を得る．さらに，正則行列

$$U:=\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & S^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & S^{-1/2}\end{bmatrix}$$

を用いて (A7) 式の合同変換 $\mathrm{He}(U^{\mathrm{T}}\Theta U)<0$ を行うと (A5) 式を得る．(A6) 式は (A7) 式と双対な条件から得ることができる．　□

著 者 略 歴

小林　孝一（こばやし　こういち） (学生会員)

論文誌 Vol. 19, No. 4, p. 141 参照

木山　健（きやま　つよし） (正会員)

論文誌 Vol. 19, No. 4, p. 141 参照

北森　俊行（きたもり　としゆき） (名誉会員)

論文誌 Vol. 19, No. 4, p. 141 参照