JAIST Repository
https://dspace.jaist.ac.jp/

Title	ディスクレパンシーを効率よく求めるアルゴリズムに対する研究
Author(s)	小山，紘樹
Citation	
Issue Date	2010-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/8925
Rights	
Description	Supervisor:浅野　哲夫，情報科学研究科，修士

JAIST
JAPAN
ADVANCED INSTITUTE OF
SCIENCE AND TECHNOLOGY

Japan Advanced Institute of Science and Technology

ディスクレパンシーを効率よく求めるアルゴリズムに対する研究

小山 紘樹 (0810025)

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2010 年 2 月 9 日

キーワード: ディスクレパンシー, Van der Corput 集合, ソート.

ディスクレパンシー (discrepancy) とは，日本語で「不一致」を意味するが，計算幾何学の分野では点集合がどれくらい一様なのかを意味している．たとえば一次元では，直線上に点集合が配置されている．どの点も隣の点との距離がほぼ同じなら，これらの点は一様に分布している．すなわち，対応する点集合のディスクレパンシーは低いといえる．二次元では，点集合がどれくらい一様に平面上に配置されたかを評価することができる．しかしながら，一次元のように点同士の距離だけで単純に点が一様か判断することはできない．一次元の場合，隣の 2 点との関係だけを考えれば判断できる．しかし，二次元の場合，隣りの点を決めることが難しいのである．そのため，様々な方法が考えられる．たとえば，点を含む四角形すべてを考慮する場合，最も多く点を含むときとほとんど点を含まないときがある．これらの差によってディスクレパンシーを定めることができる．このとき，たいていは四角形に理想的に含まれるであろう点の個数と実際に含まれている点の個数が違う．これらの差によってディスクレパンシーを計算することもできる．また，四角形ではなく，円や楕円で考えることも出来る．さらには，点集合内で最大空円をとることでディスクレパンシーを求める方法もある．当然，評価方法が変われば，点集合がどれだけ一様かの評価も変わる．すなわち，ディスクレパンシーも変わってくる．

ディスクレパンシーを考えるにあたって，2 つの問題がある．一つ目は点の一様性をどのように評価するかという問題，二つ目は評価の高い点集合をどのように生成するかという問題である．前者においては，点を含む図形を変えることで評価がどのように変化するかに興味がある．また，すべての図形を調べようとするときりがない．そのため，どうやって効率的に図形を選ぶかが考えられる．例として，点を含む四角形について考える．このとき，境界に点を含む四角形だけを考えても，$O(n^4)$ 種類の四角形を考えることになる．そして，それらの内部に点をいくつ含んでいるか判定しなければいけない．よって，単純な方法では $O(n^5)$ 時間もかかる．すなわち，点数が多いとディスクレパンシーの計算にかかる時間が非常に大きくなる．以上より，この問題はいかに効率よく計算できるかが焦点となる．

Copyright © 2010 by Koyama Hiroki

一様な点集合を生成する方法としては，いくつかの手法が知られている．その例として，Van der Corput 集合や，格子状に配置された点集合を傾けたものなどがある．特に，Van der Corput 集合はディスクレパンシーが $O(\log n)$ となることが知られている．その応用として，ディジタルハーフトーニングがある．これは限られた色数で元の画像を表現する際に用いられる．また，白黒画像で濃淡を表現するときに，この一様性が重要となってくる．さらに，ディスクレパンシーが小さくなるよう定義された「超一様分布列」というものがある．これは定積分の数値を高速に求めるために利用されている．

本論文では，二次元における点集合に対して，点を含む四角形を考える．この四角形に対して，一様なら理想的に含まれるであろう点の個数と，実際に含まれる点の個数の差を求める．これを使ったディスクレパンシーを $O(n^3)$ 時間で求める．このアルゴリズムは，ソート以上の技術は使っていないため，容易に実装できる．

このアルゴリズムでは，最初に与えられた点集合を y 軸方向にソートする．続いて四角形の下辺をソートした点集合の最初の点で固定する．その後，上辺をソートした順番に定めていく．次に下辺と上辺で挟まれた領域の点で四角形を定め，そのディスクレパンシーを求める．最後に，これらのディスクレパンシーの差から，下辺と上辺を固定したときの最大ディスクレパンシーを求める．上辺をずらしていくときは，前の点を x 軸方向に順番となるよう逐次挿入していく．そうすることで，次の四角形におけるディスクレパンシーの計算が $O(n)$ 時間で可能となる．また、下辺と上辺の組み合わせは $O(n^2)$ 通りある．そのため，最終的にディスクレパンシーは $O(n^3)$ 時間で求められる．

さらに本論文では，このアルゴリズムを使って，実際の点集合のディスクレパンシーを求める．ディスクレパンシーを求める点集合は，ランダム点集合，格子状点集合，格子状に配置された点集合を傾けたもの，Van der Corput 集合の 4 種類ある．格子状点集合はディスクレパンシーが高い点集合として知られている．格子状に配置された点集合を傾けたものと Van der Corput 集合のディスクレパンシーは，ディスクレパンシーが低い点集合として知られている．それぞれの点集合のディスクレパンシーを，点数を変えながら求めている．これにより，点数とディスクレパンシーの関係を調査する．また，格子状に配置された点集合を傾けたものと Van der Corput 集合のディスクレパンシーが実際に低い事を確認する．