Title	フィッサーの論理,古典論理および一階算術に関する証明論的研究
Author(s)	石井，克正
Citation	
Issue Date	2002-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/915
Rights	
Description	Supervisor:石原 哉，情報科学研究科，博士

フィッサーの論理, 古典論理および一階算術に関する証明論的研究

石井克正
北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科

January 10, 2002

論文の内容の要旨

本論文ではフィッサーの論理, 古典論理および一階算術について証明論的に研究する.

まず最初にフィッサーによって導入された Basic Propositional Logic (BPL) および Formal Propositional Logic(FPL) に対するシーケント計算の体系を導入し, それらに対しカット除去定理を構文論的に証明する. よく知られているようにゲーデル変換を通じて様相論理 **S4** は直観主義命題論理に対応している. フィッサーはゲーデル変換によって様相論理 **GL** に対応する論理とは何かを考察した. これが FPL である. さらにフィッサーは FPL の研究の前段階として BPL を導入した. BPL に対するカット除去定理が成り立つシーケント計算の体系はすでにアルデシアの学位論文で提案されているが, この体系では subformula property が成り立たないという問題があった. その後佐々木によって BPL に対する別のシーケント計算の体系が導入されたが, この体系の subformula property は弱い形のものでしかなかった. 本論文では BPL および FPL に対し新たなシーケント計算の体系を提案した. これらの体系では通常の意味での subformula property が成立する. さらにこれらの体系に対して構文論的手法によってカット除去定理を証明した.

次に, 古典論理に対する自然演繹の体系 **NK** に対して新たな縮約手続きを定義し, この縮約手続きについての強正規化定理およびチャーチ・ロッサー性 (合流性) を証明する. **NK** の強正規化定理については論理記号を $\wedge, \rightarrow$ および $\forall$ に制限した体系についてはプラヴィッツによってすでに証明されている. すべての論理記号を含む体系についてはスタルマルクが縮約手続きを定義し, 強正規化定理を証明している. しかしスタルマルクの縮約手続きはチャーチ・ロッサー性が成り立たないという欠点があった. 本論文ではスタルマルクの縮約手続きを改良した手続きを定義し, それに対する強正規化定理とチャーチ・ロッサー性を証明した. この結果は 1995 年に定義された安東による縮約手続きの強正規化定理を導く. 実際, 安東による縮約手続きはわれわれの手続きを組み合わせてできているからである.

最後に一階算術についての証明論的考察を行なう. ここで取り上げるのは $I\Sigma_k$ の provable well-founded relation についてである. ここで $I\Sigma_k$ とは **PA** において帰納法を Σ_k-論理式に関するものに制限して得られる体系である. さて, $\prec$ を自然数上の帰納的整列順序とし, $TI(\prec)$ を $\forall x(\forall y(y \prec x \supset \varepsilon(y)) \supset \varepsilon(x)) \rightarrow \varepsilon(a)$ とする. ゲンツェンは $TI(\prec)$ が **PA** で証明できるとき $\prec$ の順序型は ε_0 より小さいことを証明した. その後, 竹内はこれを精密化し, $TI(\prec)$ が **PA** で証明できるとき次を満たす帰納的関数 f を具体的に構成した: 任意の a, b に対し $a \prec b \Leftrightarrow f(a) <^* f(b)$, ここで $<^*$ は ε_0 より小さい順序数の大小関係を表す. さらに順序数 $\mu < \varepsilon_0$ が存在し, 任意の a に対して, $f(a) <^* \mu$ が成り立つ. さらに新井は $\prec$ の条件を推移的かつ非反射的な整礎関係 (well-founded relation) に弱めた場合にも同様に f を構成できることを示した. 本論文では $I\Sigma_k$ に対するこの問題を考察し, 以下の結果を得た. すなわち, $\prec$ を推移的かつ非反射的な原始帰納的整礎関係とし $TI(\prec)$ が $I\Sigma_k$ で証明可能であるとき, $a \prec b \Leftrightarrow f(a) <^* f(b)$, かつ順序数 $\mu < \omega_{k+2}$ が存在し, 任意の a に対して, $f(a) <^* \mu$ が成り立つような原始帰納的関数 f が存在することを証明した (ここで $<^*$ は ω_{k+2} より小さい順序数の大小関係を表す).

キーワード: シーケント計算, 自然演繹, カット除去定理, 強正規化定理, BPL, FPL, 古典論理, 一階算術, provable well-founded relation