JAIST Repository
https://dspace.jaist.ac.jp/

Title	有限次元ベクトル空間の辞書式分離とその応用
Author(s)	池田, 潔
Citation	
Issue Date	2003-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/936
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰, 情報科学研究科, 博士

JAIST
JAPAN
ADVANCED INSTITUTE OF
SCIENCE AND TECHNOLOGY

Japan Advanced Institute of Science and Technology

有限次元ベクトル空間の辞書式分離とその応用

池田 潔
北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

2003 年 2 月 14 日

論文の内容の要旨

$\mathbb{R}^n$ 上の交わりを持たない二つの凸集合が辞書式順序によって分離可能であることは、Hausner and Wendel, Klee, Martínez-Legaz and Singer らの研究によって知られている。本研究の目的は、従来の結果の一般化として $\mathbb{F}^n$ 上の凸集合の辞書式分離定理を証明すること、およびその応用を与えることである。ここで $\mathbb{F}$ は $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$ をみたす順序体である。また、辞書式分離の唯一性も同時に示す。

本研究の主要な結果を以下に述べる。P は $\mathbb{F}^n$ の原点を含まない凸錐であるとし、その補集合 $\mathbb{F}^n \setminus P$ もまた凸錐であるとする。このとき、実数値をもつ $\mathbb{F}^n$ 上の線形関数 $g_1, \ldots, g_n$ が存在して、任意の $x \in \mathbb{F}^n$ に対し、$x \in P$ ならば、またそのときにかぎり $(\, g_1(x), \ldots, g_n(x)\,) >_L (\, 0, \ldots, 0\,)$ が成り立つ。ここで $>_L$ は $\mathbb{R}^n$ 上の辞書式順序を表す。すなわち $(a_1, \cdots, a_n) >_L (b_1, \cdots, b_n)$ とは、$a_i \neq b_i$ となる最小の i に対して $a_i > b_i$ となることである。また、最初の関数 g_1 は正の定数倍に関して唯一に定まることも証明される。

この辞書式分離定理は以下に述べるような辞書式順序と無限小元との対応を利用して証明することができる: $(a_0, a_1, \ldots, a_n) <_L (b_0, b_1, \ldots, b_n)$ ならば、またそのときにかぎり $a_0 + a_1\varepsilon + \cdots + a_n\varepsilon^n < b_0 + b_1\varepsilon + \cdots + b_n\varepsilon^n$。ここで ε は無限小元を表している（すなわち $0 < \varepsilon$ かつ任意の正整数 k に対し $\varepsilon < 1/k$ をみたすものである）。本研究独自の点は、このように無限小元を用いて辞書式順序を表現していること、そして無限小元を辞書式分離定理の証明に利用しているところにある。また、本研究ではさらに無限小元を（以下に述べるように）無限線形不等式系の解として導入している。

辞書式分離定理の一つの応用として「二者択一の定理」の一般化が得られる。ここでは線形不等式系 L として「すべての $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in P$ に対し $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n > 0$」を考える。$P$ は $\mathbb{R}^n$ の任意の空でない部分集合であるとする。もし $\mathbb{R}^n$ の原点が P の凸包に含まれないならば、またそのときにかぎり、線形不等式系 L は解 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を $\mathbb{R}[\varepsilon]_n$ の中にもつことが証明される。ここで $\mathbb{R}[\varepsilon]_n = \{\, r_1 + r_2\varepsilon + \cdots + r_n\varepsilon^{n-1} \mid r_1, \cdots, r_n \in \mathbb{R}\,\}$ と定義している。すなわち無限小元 ε を線形不等式系の解として導入することにより、無限線形不等式系が解をもつための必要十分条件を与えることができる。また、本研究では線形不等式系へのもう一つの応用として Farkas の補題の辞書式的な一般化を証明している。

次に辞書式分離定理の期待効用理論における応用について紹介する。従来の von Neumann–Morgenstern 期待効用理論の一般化として Hausner によって考案された辞書式期待効用理論は、実数値をもつ確率分布の集合上に定式化されているが、本研究では特に有理数値をもつ確率分布のみを考えても辞書式期待効用理論が成り立つことを示す。これは辞書式分離定理で特に $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ とした場合の応用である。$S_n = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ を有限集合とし、S_n 上の有理数値をもつ確率分布全体を $\Delta(S_n)$ によって表す。もし $\Delta(S_n)$ 上の選好順序 $\prec$ が独立性の条件をみたすならば、$\Delta(S_n)$ 上の実数値関数 $u_1, \ldots, u_{n-1}$ が存在して、任意の $x, y \in \Delta(S_n)$ に対し、$x \prec y$ と $(\, u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)\,) <_L (\, u_1(y), \ldots, u_{n-1}(y)\,)$ が同値になる、またそれぞれの $1 \leq j \leq n-1$ および有理数 $0 \leq \theta \leq 1$ に対し、$u_j(\,\theta x + (1-\theta)y\,) = \theta\, u_j(x) + (1-\theta)\, u_j(y)$ が成り立つ。さらに最初の関数 u_1 が正の一次変換に関して唯一に定まることも証明される。

最後に辞書式分離定理のもう一つの応用として、分割不可能な財の集合上の選好関係に対して、その効用関数が加法的であるための必要十分な公理系を与えている。これは Hahn の埋め込み定理として知られる代数学上の定理を変形して経済学的な解釈を与えたものとなっている。

キーワード:　分離定理, 辞書式順序, 線形不等式系, 辞書式効用理論

Copyright © 2003 by Kiyoshi Ikeda